

Teoría del arco¹

IX

Cálculo del arco

Directriz: parábola de segundo grado.

Variación de la inercia: proyección constante sobre el plano vertical

Este caso lo consideran casi todos los autores. Voy a seguir especialmente a Magnell, que lo expone de un modo completo en su obra *Pratique du Calcul du Béton Armé*².

Justificación de la solución

El autor parte de una pieza prismática curva de directriz parabólica, con sustentación isostática, y la considera cargada uniformemente a razón de p kg por unidad de longitud, según la cuerda. Los momentos flectores seguirán ley parabólica, como en las piezas prismáticas rectas, con un valor máximo en el centro $\frac{1}{8} pL^2$.

Cambiando la sustentación de modo a introducir un empuje H_o , aparecerán momentos flectores repar-

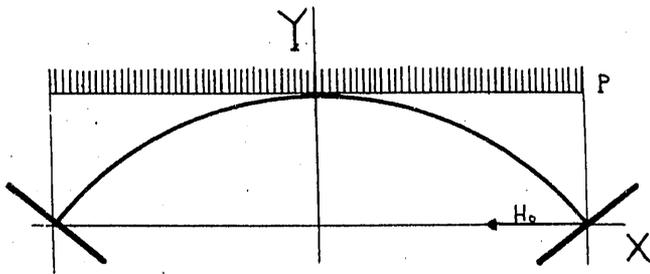


Fig. 1. Justificación del arco parabólico

tidos según ley también parabólica, con valor máximo $H_o f$. Estos se combinarán, por resta, con los anteriores, verificándose si

$$H_o f = \frac{pL^2}{8}, \text{ o sea: } H_o = \frac{pL^2}{8f}$$

que la resultante de ambos es nula; es decir, que desaparecen los momentos flectores.

Por consiguiente, en el arco empotrado, siempre que sea admisible prescindir del efecto de las compresiones longitudinales y de los esfuerzos tangenciales, se verificará que la directriz parabólica es antifunicular de las cargas uniformemente repartidas por unidad de luz.

La ecuación referida a los ejes que pasan por los arranques y por la clave es

$$y = f \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

Magnell utiliza el teorema de Castigliano, considerando el arco partido en dos mitades por la clave (procedimiento de isostatismo c del artículo anterior), llegando en el caso general, de tener en cuenta

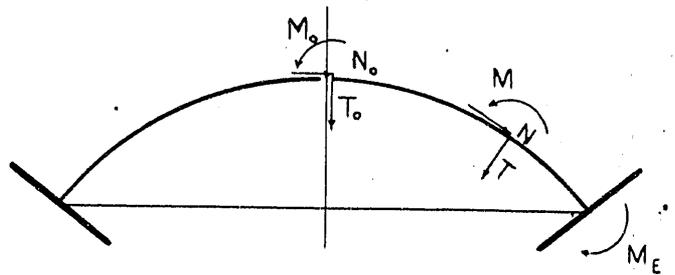


Fig. 2. Notación

los efectos del momento flector, esfuerzo tangencial y compresión longitudinal, a los siguientes valores de los elementos de cálculo en clave correspondientes a la fuerza unidad situada en la sección x :

$$T_o = \frac{-2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L} \right) + 256ba^2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{156}{5} b \frac{x}{L}}{1 + 64ba^2 + \frac{156}{5} b} - \frac{1}{2}$$

$$N_o = \frac{\frac{15}{64a} \left[4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right]^2 - 18 \frac{b}{a} \left[4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right]}{1 + \frac{45}{4} \frac{b}{a^2} + 156b}$$

$$M_o = \left[\frac{N_o a}{3} - \frac{1}{8} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right)^2 \right] L$$

en las que

$$a = \frac{r'}{L} \text{ y } b = \frac{r'^2}{L^2} \quad (r' = \text{radio de giro en clave})$$

Despreciando los términos en b del numerador y denominador de la expresión de T_o y los del numerador de la de N_o , obtiene estas otras:

$$T_o = -2 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L} \right) \pm \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} + \text{ para } x < 0 \\ - \text{ para } x > 0 \end{array} \right.$$

$$N_o = \frac{1}{48K} \left[4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right]^2$$

$$M_o = \left[\frac{N_o a}{3} - \frac{1}{8} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right)^2 \right] L$$

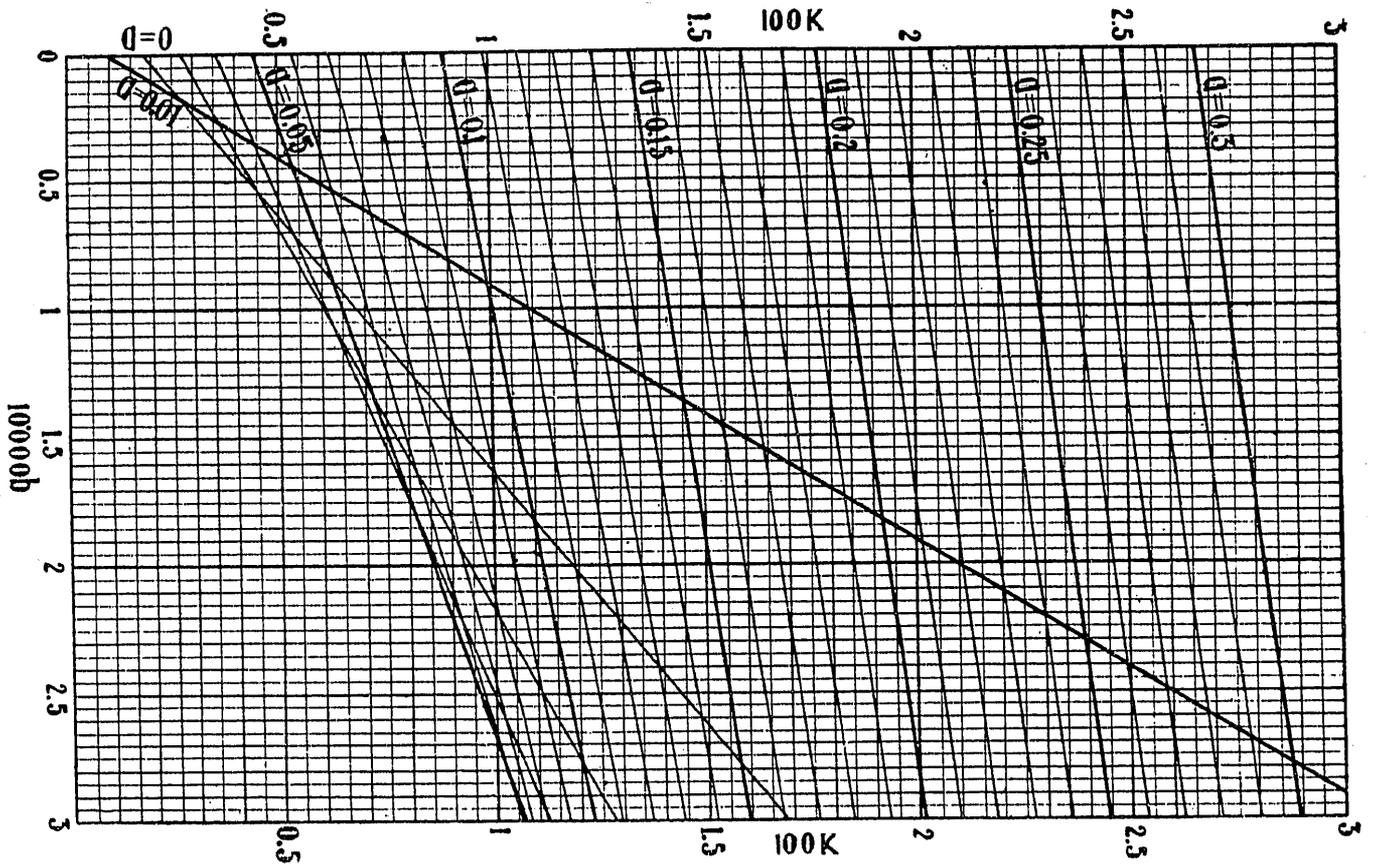
siendo

$$K = \frac{4}{45} a + \frac{b}{a} + \frac{208}{15} ba$$

Los valores numéricos de T_o y los de N_o , en función de K se indican en la tabla I, para secciones a las décimas partes de la luz. La determinación de K se realiza muy rápidamente mediante el ábaco lineal adjunto, entrando con los valores de a y b .

¹ Véase el número de 1.º de octubre, página 413

² *Pratique du Calcul du Béton Armé*, tercera parté. Dunod, 1930.



SECCIÓN		0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L
T_o		-0,500	-0,3520	-0,2160	-0,1040	-0,0280	0
N_o		$\frac{0,02083}{K}$	$\frac{0,01920}{K}$	$\frac{0,01470}{K}$	$\frac{0,00853}{K}$	$\frac{0,00270}{K}$	0
$\frac{1}{3} a N_o$		0
$\frac{1}{8} \left(\frac{2X}{L} - 1 \right)^2$		0,1250	0,0800	0,0450	0,0200	0,0050	0
$M_o = \frac{1}{3} a N_o - \frac{1}{8} \left(\frac{2X}{L} - 1 \right)^2$		0

Abaco y cuadro de Magnell para el cálculo de arcos muy rebajados

En el caso de arcos cuyo rebajamiento sea superior a 0,1 puede prescindirse de los esfuerzos tangenciales, y entonces las fórmulas se reducen a

$$T_o = -2 \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L}\right) \pm \frac{1}{2} \begin{cases} + \text{ para } x < 0 \\ - \text{ para } x > 0 \end{cases}$$

$$N_o = \frac{15}{64} \cdot \frac{L}{F} \left[4 \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 1 \right]^2$$

$$M_o = \frac{L}{64} \left[80 \left(\frac{x}{L}\right)^4 - 72 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 32 \frac{x}{L} - 3 \right]$$

De ellas se deducen fácilmente¹ las expresiones de las líneas de influencia de *M*, *N* y *T* en cualquier sección, teniendo en cuenta las fórmulas de transformación:

$$T = T_o \cos \alpha - N_o \sin \alpha + \sum_o^x F \cos \alpha$$

$$N = T_o \sin \alpha + N_o \cos \alpha + \sum_o^x F \sin \alpha$$

$$M = M_o + t_o x - N_o (f - y') + \sum_o^x F (x - x')$$

Sustituyendo valores en estas fórmulas, deduce el autor las ordenadas de las líneas de influencia de *M*, *N* y *T* para las secciones a décimas partes de la luz y para distintos rebajamientos, que resumo en las tablas II a VII². Los valores de *M* no dependen del rebajamiento mientras éste sea superior a 0,10, por lo que sólo figura una curva en el diagrama correspondiente.

Para estudiar el efecto de una sobrecarga vertical uniforme móvil reúne el autor los tres cuadros que reproducimos (cuadros números 3, 4 y 5), correspondiendo: el número 3, a los valores máximos de la compresión longitudinal en las distintas secciones del arco (tienen lugar cuando la sobrecarga ocupa toda la luz); el núm. 4, a los valores máximos del momento flector en las mismas secciones, con los de la compresión longitudinal correspondiente; aquéllos son independientes del rebajamiento, siendo positivos o negativos, según las regiones (complementarias en-

tre sí) que ocupa la sobrecarga; éstos varían con el rebajamiento y con el signo de los anteriores; por último, el núm. 5 da los valores máximos del esfuerzo tangencial, que son también positivos o negativos, según la región ocupada por la sobrecarga.

CUADRO NUM. 1

Valores de sen α

SECCION	$\frac{F}{L} = 0,1$	$\frac{F}{L} = 0,2$	$\frac{F}{L} = 0,3$	$\frac{F}{L} = 0,4$	$\frac{F}{L} = 0,5$
0	0	0	0	0	0
0,1L	0,080	0,158	0,233	0,305	0,371
0,2L	0,158	0,305	0,433	0,539	0,624
0,3L	0,233	0,433	0,585	0,693	0,768
0,4L	0,305	0,539	0,693	0,787	0,848
0,5L	0,371	0,625	0,768	0,848	0,900

CUADRO NUM. 2

Valores de cos α

SECCION	$\frac{F}{L} = 0,1$	$\frac{F}{L} = 0,2$	$\frac{F}{L} = 0,3$	$\frac{F}{L} = 0,4$	$\frac{F}{L} = 0,5$
0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1L	0,997	0,987	0,972	0,952	0,928
0,2L	0,987	0,952	0,902	0,842	0,781
0,3L	0,972	0,902	0,812	0,722	0,640
0,4L	0,952	0,842	0,722	0,615	0,530
0,5L	0,928	0,781	0,640	0,530	0,448

CUADRO NUM. 3

Valores máximos de *N* para sobrecarga vertical uniforme móvil

SECCION	$\frac{F}{L} = 0,1$	$\frac{F}{L} = 0,2$	$\frac{F}{L} = 0,3$	$\frac{F}{L} = 0,4$	$\frac{F}{L} = 0,5$
0	1,250	0,625	0,417	0,313	0,250
0,1L	1,252	0,632	0,428	0,328	0,269
0,2L	1,266	0,655	0,461	0,370	0,320
0,3L	1,283	0,694	0,514	0,434	0,391
0,4L	1,310	0,742	0,577	0,506	0,470
0,5L	1,344	0,801	0,651	0,590	0,563

CUADRO NUM. 4

Valores máximos de *M* con los correspondientes a *N* para sobrecarga vertical uniforme móvil

SECCION	M MAXIMO	N CORRESPONDIENTE				
		$\frac{F}{L} = 0,1$	$\frac{F}{L} = 0,2$	$\frac{F}{L} = 0,3$	$\frac{F}{L} = 0,4$	$\frac{F}{L} = 0,5$
0	$\pm 0,00537 \rho L^2$	0,655 ρL	0,328 ρL	0,218 ρL	0,161 ρL	0,131 ρL
0,1L	- 0,00537	0,595	0,297	0,198	0,149	0,119
	0,00706	0,625	0,319	0,220	0,173	0,145
0,2L	- 0,00706	0,627	0,313	0,208	0,155	0,124
	0,00928	0,778	0,404	0,285	0,230	0,200
0,3L	- 0,00928	0,488	0,251	0,176	0,140	0,120
	0,00731	0,961	0,506	0,363	0,297	0,261
0,4L	- 0,00731	0,322	0,188	0,151	0,137	0,130
	0,00416	0,705	0,418	0,339	0,306	0,290
0,5L	- 0,00416	0,605	0,324	0,238	0,200	0,180
	0,01724	0,497	0,373	0,353	0,349	0,350
	- 0,01724	0,847	0,428	0,298	0,241	0,213

¹ Los cuadros número 1 y número 2, facilitan esta labor.

² Por falta de espacio se han dejado para el artículo próximo.

CUADRO NUM. 5

Valores máximos de T para sobrecarga vertical uniforme móvil

SECCION	$\frac{F}{L} = 0,1$	$\frac{F}{L} = 0,2$	$\frac{F}{L} = 0,3$	$\frac{F}{L} = 0,4$	$\frac{F}{L} = 0,5$
0	$\pm 0,095\rho L$				
0,1L	$\pm 0,084$	$\pm 0,083$	$\pm 0,082$	$\pm 0,080$	$\pm 0,078$
0,2L	$\pm 0,068$	$\pm 0,066$	$\pm 0,062$	$\pm 0,058$	$\pm 0,054$
0,3L	$\pm 0,079$	$\pm 0,073$	$\pm 0,066$	$\pm 0,058$	$\pm 0,052$
0,4L	$\pm 0,119$	$\pm 0,105$	$\pm 0,091$	$\pm 0,077$	$\pm 0,066$
0,5L	$\pm 0,180$	$\pm 0,152$	$\pm 0,124$	$\pm 0,103$	$\pm 0,088$

Los efectos debidos a una *variación de temperatura* t son:

$$H = \frac{45EI_0\alpha t}{4f^2}$$

$$M_E = -\frac{15EI_0\alpha t}{2f}$$

$$M_o = \frac{15EI_0\alpha t}{4f}$$

El centro elástico se encuentra a $\frac{f}{3}$ de clave.

Los efectos del *desplazamiento de un apoyo* integrado de los tres elementales Δh , Δv y $\Delta \alpha$, son:

$$V = \frac{12EI_0}{f^3} \left(\frac{L}{2} \Delta \alpha - \Delta v \right)$$

$$H = -\frac{45}{4} \frac{EI_0}{f^2L} \left(\frac{2}{3} f \Delta \alpha + \Delta h \right)$$

$$M_o = \frac{L}{2} V - \frac{2}{3} f H + \frac{EI_0}{L} \Delta \alpha$$

La *curva de las intersecciones* es una horizontal a $\frac{F}{5}$ sobre la clave, y las *envolventes*, dos ramas de

hipérbolas que se cortan en el eje a $\frac{f}{3}$ de clave.

El autor estudia, además, en el arco empotrado, el efecto de fuerzas horizontales mediante líneas de influencia; el caso particular de rebajamiento 0,2,

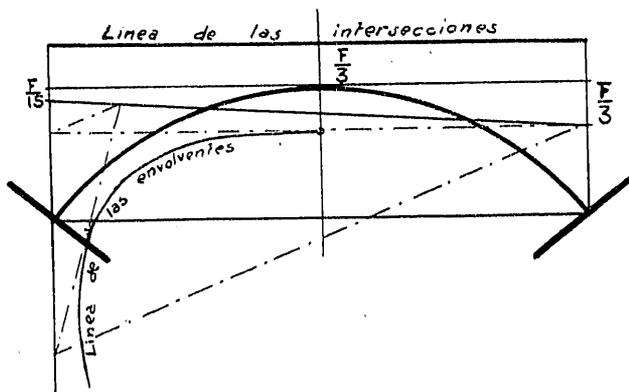


Fig. 3. Curvas de las intersecciones y de las envolventes

el más corriente en arcos de cubiertas, por medio de las curvas de las M y las N correspondientes a distintas posiciones de una fuerza vertical, horizontal y de una carga uniformemente repartida horizontal o verticalmente en diversas zonas a partir de un extremo. También estudia con idéntico determinimiento los arcos simétricos de dos y tres articulaciones.

El autor advierte que pueden utilizarse las fórmulas deducidas, y por consiguiente, los gráficos correspondientes para los *arcos cuya directriz sea intermedia entre la parábola y el arco de circunferencia* de la misma luz y flecha, con los siguientes márgenes de error:

a) La curva de T_o se obtendrá con un error inferior al 1 por 100 de su ordenada máxima.

b) La curva de N_o se obtendrá con un error inferior al 1,5 por 100 de su ordenada máxima mientras a no pase de 0,30.

c) Las curvas de M_o dan errores inferiores al 5 por 100 de su ordenada máxima mientras a sea inferior a 0,15; el error no llegará al 10 por 100 si a no pasa de 0,30.

Comparación del arco y la viga recta

Magnell resuelve la cuestión que se plantea al considerar el arco parabólico uniformemente cargado cuyo rebajamiento disminuye hasta hacerse cero, convirtiéndose entonces en la viga recta. Como ordinariamente se supone que para dicho arco no existe sino una compresión longitudinal, cuyo valor crece en sentido contrario del rebajamiento, debía esto seguir ocurriendo en el límite, que es precisamente lo contrario de lo que la teoría elemental de las vigas rectas establece.

Pero ya hemos visto que la nulidad de los momentos flectores se obtiene únicamente cuando se consideran despreciables los efectos de N y T , lo cual sólo es admisible para arcos peraltados, siendo de todo punto erróneo para arcos de gran rebajamiento. Considerando únicamente la compresión longitudinal, podemos mirar el problema del siguiente modo: al producirse acortamiento por compresión longitudinal, el valor de ésta sufre una disminución proporcionada, y como la deformación por compresión es preponderante en el caso de arcos rebajados, la reducción correspondiente es cada vez mayor, y aunque el valor aparente del empuje tiende hacia infinito, su valor real tiende hacia cero.

El estudio completo de este problema puede hacerse fácilmente mediante el ábaco de los valores de K (el cual se ha deducido, como hemos visto, sin despreciar los efectos de N y T), obteniéndose los valores del empuje en clave en función del rebajamiento mediante la fórmula

$$N_o = \frac{1}{48K}$$

para arcos definidos por el radio de giro; es decir, por b .

Los resultados aparecen en la figura 4, y puede

observarse que, excepto para el caso de $b = 0$, el empuje tiene un máximo—que es tanto menor cuanto el arco es más rígido—, a partir del cual disminuye, hasta anularse para $a = 0$; es decir, la viga recta. El caso de $b = 0$ correspondería a $\Omega = \infty$, es decir: arco que no se deforma por la acción de N y T , sino sólo por la acción de M , el cual no tiene realidad física, pero puede tenerse en cuenta a partir de un cierto rebajamiento, pues vemos en la figura que, por encima del valor de $a = 0,10$, las curvas se concentran y el empuje tiende a ser independiente de b , pudiendo admitirse el valor que resulta de la

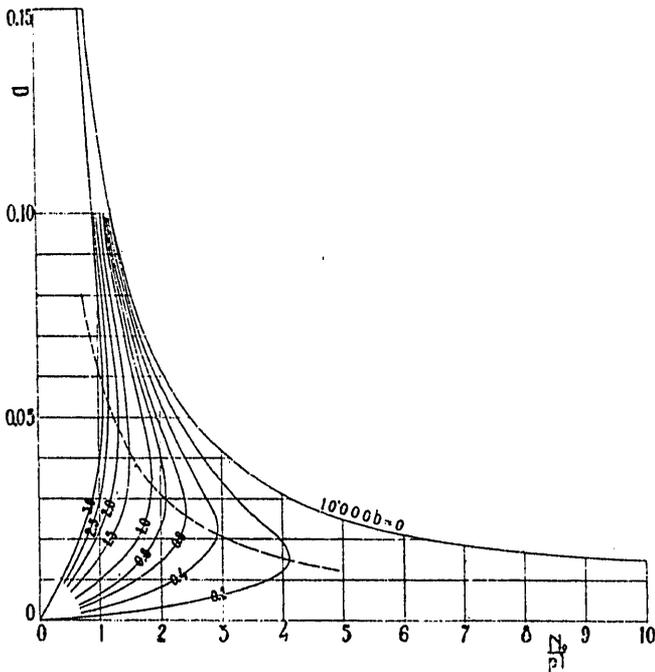


Fig. 4. Comparación del arco y la viga recta. Empujes

hipótesis $b = 0$. Resalta claramente en la figura 4 el absurdo de llevar esta hipótesis al cálculo de los arco rebajados, pues equivale a sustituir las curvas marcadas correspondientes a los distintos valores de b por la rama libre de la hipérbola $b = 0$.

Vemos, pues, que no existe solución de continuidad entre los arcos y la viga recta por lo que se refiere a los empujes; lo mismo ocurre en cuanto a los momentos flectores, y así, en la figura 5 se representan los momentos flectores en clave para carga

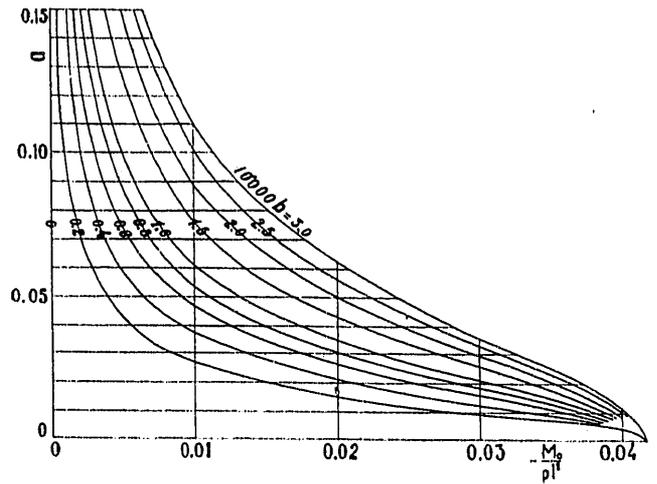


Fig. 5. Comparación del arco y la viga recta. Momentos flectores en clave

uniforme en función de a y b ; suponer que siempre la parábola es antifunicular equivaldría a reemplazar todas las curvas de la serie por el eje de las ordenadas, lo que es evidentemente absurdo.

Por consiguiente, quedan sentadas las dos conclusiones siguientes:

1.ª No existe solución de continuidad entre la teoría de los arcos y las vigas rectas.

2.ª Es absolutamente erróneo considerar que en los arcos parabólicos rebajados sometidos a carga uniformemente repartida no hay momentos flectores; esto sólo puede considerarse aproximadamente válido en el caso de arcos peraltados. Resulta verdaderamente infantil el procedimiento seguido por algunos de calcular estos arcos como elementos sometidos a una compresión longitudinal, comprobándolos después a la flexión accidental que pudiera aparecer por pandeo.

Carlos FERNANDEZ CASADO
Ingeniero de C., C. y P.

Presente y porvenir de las electrificaciones ferroviarias

En el interesantísimo libro titulado *El problema de los ferrocarriles españoles*, que se editó en mayo del presente año, se trata, en las páginas 34 y 35, el tema de las electrificaciones ferroviarias, haciéndose unas consideraciones someras, de carácter general, sobre el porvenir de las electrificaciones, y consignándose algunas cifras estadísticas sobre las electrificaciones españolas y la comparación que su extensión guarda con las de las electrificaciones de los principales países europeos.

Es lástima que en un libro tan profundamente documentado, y en el que con tanta minuciosidad se consiguan datos estadísticos de los distintos aspectos de la explotación ferroviaria, se haya tratado tan a la

ligera la cuestión de las electrificaciones, que puede afectar de modo importante a aquélla. Y decimos que se ha tratado a la ligera, no sólo porque únicamente se hayan dedicado dos páginas a este tema, sino porque las cifras que se dan no son exactas, como tampoco son exactas las conclusiones que se deducen respecto a la situación actual de esta cuestión. Este error en las cifras y en las apreciaciones no podemos atribuirlo a otra cosa que a que el autor o los autores no se han documentado debidamente acerca de este extremo, y que, por una u otra causa, no le han dedicado la atención que le es debida.

Como el libro que comentamos ha tenido una gran difusión, y su aparición ha tenido también cierta re-