

Colección de puentes de altura estricta¹

EL MÉTODO DE CROSS PARA EL CÁLCULO DE ENTRAMADOS

En el cálculo de los pórticos correspondientes a los modelos de las series III y IV he utilizado el método de Cross, que resuelve de un modo elegantísimo las ecuaciones del "slope-deflection" mediante la *repartición de los momentos de empotramiento perfecto*.

Este método, que los norteamericanos consideran como la "aportación más valiosa, durante los treinta años del siglo, al cálculo de Estructuras, es de un interés extraordinario para la resolución de entramados; su perfección teórica es ejemplar, resultando de una sencillez y naturalidad encantadoras. Como es muy poco conocido en España voy a dar una descripción, aclarada con ejemplos, exponiendo los detalles del mecanismo de cálculo que la experiencia de su aplicación, durante dos años, en diversos tipos de estructuras me ha hecho seleccionar como más eficaces.

Expuse en un artículo anterior el desarrollo del método "slope-deflection", y vimos se llegaba a un sistema de ecuaciones lineales integrado por: ecuaciones de nudo (tantas como nudos), ecuaciones de barra (doble del número de barras) y ecuaciones de continuidad (tantas como pisos), en las que figuraban los pares de empotramiento de todas las barras, los ángulos de giro en los nudos y los desplazamientos de éstos.

Podría interpretarse el método de Cross como una resolución por aproximaciones sucesivas del sistema de ecuaciones lineales; pero este punto de vista es absolutamente lícito para la teoría de las Estructuras; en cambio sería obligado para el matemático. Si analizamos cualquier método de cálculo nos encontramos con que en el fondo consiste esencialmente en una serie de intuiciones del fenómeno físico correspondiente, aunque en apariencia es un mecanismo combinatorio puramente matemático. Al trasponer la realidad física a la abstracción matemática, las intuiciones se convierten en hipótesis de partida, y en la mayoría de los casos el proceso de cálculo se desarrolla independientemente del fenómeno físico, y únicamente al final se interpretan los resultados dando a los números una significación concreta. Por consiguiente, a lo largo del proceso de cálculo sólo existen dos puntos de contacto, inicial y final, entre estos dos mundos diferentes de lo físico y lo matemático, no debiendo nunca olvidarse que por los terrenos del segundo se va siempre de paso, y que lo único que interesa es el punto de llegada para lo técnico y la comprensión del fenómeno físico para la teoría de Estructuras (teoría = visión).

Pero existen también otros métodos de cálculo en los que las intuiciones directoras no se limitan a establecer el punto de partida, sino que influyen a lo largo de todo el desarrollo, dando a las transforma-

ciones de cálculo un sentido más valioso que el puramente combinatorio. Los puntos de contacto entre las esferas de lo físico y lo matemático jalonan todo el proceso y, a través de las operaciones abstractas, transparece la realidad concreta del fenómeno físico. A este tipo de métodos pertenece el que vamos a exponer.

Ventajas prácticas: poseyendo la intuición del fenómeno físico, que es lo que debe aprenderse en la teoría de Estructuras, no hace falta más: los problemas se resuelven sin necesidad de recordar combinaciones artificiosas; por consiguiente, de un modo más sencillo, más seguro y más agradable. En cada caso concreto se hace teoría, lo que tiene un sentido particularmente eficaz, dado el carácter esencialmente plástico de las estructuras.

Vamos a analizar los métodos de cálculo de entramados descubriendo sus intuiciones fundamentales. En primer lugar, aparecen las morfológicas; tratándose de estructuras cuya geometría es discontinua y se individualiza en barras, el método ha de ajustarse a esta desintegración, tomando como unidad este elemento y estableciendo con este desglose todas las relaciones desde el punto de partida. En segundo lugar, encontramos las intuiciones correspondientes al material; así, en los metálicos, para los que la elevada resistencia específica del material concreta las barras en delgadez de fibras, como contrafigura de esfuerzos axiales, éstos absorben toda la atención, traduciéndose a hipótesis en la de libertad de giro, o sea unión de las barras por articulación en los nudos; en cambio, el hormigón armado ha traído la hipótesis contraria: rigidez de los enlaces, o sea indeformabilidad completa de los ángulos de cruce en cada nudo.

Al estudiar separadamente las barras se considera generalmente, primero, la flexión producida por las fuerzas exteriores (elementos de cálculo isostáticos), y después, las coacciones debidas a los enlaces con las otras barras (pares de empotramiento), obteniendo los elementos de cálculo definitivos por superposición de ambos.

La intuición fundamental del método de Cross consiste en partir, por el contrario, de las barras perfectamente empotradas en sus extremos; es decir, considerar la estructura con rigidez absoluta en los nudos (imposibilidad de giros y desplazamientos), pasando a la estructura real por sucesivas transformaciones con significación física concreta. Así, después de calcular los pares de empotramiento que actuarían en las barras de la estructura virtual, se deshace, en parte, la rigidez de los nudos, permitiendo los giros; pero no los desplazamientos; esto se traduce numéricamente en una repartición de los pares resultantes alrededor del nudo, entre las barras que concurren, proporcionalmente a las masas elásticas respectivas. De este modo se equilibran los nudos aisladamente, pues la operación tiene la siguiente significación física: al libertar los nudos existen unos pares aplicados en

¹ Véase el número anterior, página 101.

las barras, cuya resultante, en general distinta de cero, hará girar todas las barras del nudo; pero éstas opondrán una reacción proporcional a su rigidez y al ángulo de giro, y, como éste es único, el par resistente será proporcional a la rigidez, debiendo, además, equilibrar entre todos al actuante.

El segundo paso para llegar a la estructura real consiste en permitir los desplazamientos de los nudos, pero suponiendo que las barras no se deforman (acortamientos o alargamientos) por esfuerzo axial.

Estos desplazamientos, en el caso de tratarse de entramado compuesto de dinteles y pilares sustentados sobre un plano horizontal, serán exclusivamente horizontales y, además, iguales en los planos sucesivos de los pisos; por consiguiente, darán únicamente momentos directos en los pilares, con valores proporcionales a la rigidez de cada uno. Estos momentos iniciales habrá que repartirlos del mismo modo que en la etapa anterior, superponiendo los resultados con los de dicha etapa para obtener los totales; pero hay que tener en cuenta que existen dos clases de desplazamientos: los debidos a causas exteriores, como variación termohigrométrica o asiento accidental de los apoyos, y los que se producen naturalmente en la estructura por actuación de fuerzas horizontales, o bien disimetría en las fuerzas verticales. En el primer caso, los desplazamientos son conocidos y, por consiguiente, los momentos directos; pero en el segundo caso ocurre lo contrario, y precisamente hay que determinar éstos con la condición de que exista equilibrio para los esfuerzos transversales, en cualquier porción de la estructura que se considere aislada. Cortando todos los pilares por planos horizontales inmediatos a pisos adyacentes, los esfuerzos transversales serán los esfuerzos horizontales actuantes, más los términos de esfuerzo tangencial en cada barra, que vienen expresados por la suma de los pares de empotramiento divididos por la altura del pilar. Así obtenemos una ecuación por piso que nos permite resolver el problema, puesto que le correspondía un solo desplazamiento desconocido.

La tercera etapa del método consiste en permitir que las barras se deformen por esfuerzo axial, para lo cual es preciso determinar primero los valores de estos esfuerzos, que son iguales a la reacción isostática de cada barra, más los términos hiperestáticos, que vienen expresados por la suma de los pares de empotramiento divididos por la luz del dintel. Conocidos estos esfuerzos se deducen fácilmente las deformaciones correspondientes, y el problema es el mismo que en la etapa anterior para el caso de desplazamientos conocidos.

Cuando se trata de entramados del tipo viga reticulada, como cubiertas, vigas de puentes metálicos, vigas Vierendeel, etc., resulta cómodo superponer las dos etapas finales, determinándose directamente los desplazamientos totales por procedimientos generalmente gráficos, por ejemplo, el diagrama de Williot.

Vamos a aclarar las ideas exponiendo su aplicación a dos casos particulares: la estructura de edificio que aparece en la lámina 1 y el pórtico de los modelos de las series III y IV (lámina 2).

Determinamos primero las características de la estructura, que en el primer caso, suponiendo los dinteles y pilares de sección constante, serán:

<i>Coefficientes elásticos</i>	$\frac{1}{L}$
<i>Factores de transmisión</i>	0,50
<i>Momentos de empotramiento perfecto</i>	$\frac{1}{12} pL^2$

Como no interesan los valores absolutos de las masas elásticas, sino los valores relativos para poder realizar la repartición de pares, tomamos como unidad la del dintel central de los pisos superiores, apareciendo en los círculos las que corresponden a cada uno de los elementos. Para facilitar las operaciones indicamos la suma de masas elásticas de un nudo en un pequeño rectángulo próximo.

Consideramos dos casos de carga: carga en todos los dinteles y cargas en dinteles alternados, por corresponder a las condiciones de carga permanente y y carga permanente + sobrecarga más desfavorable. Hay que tener en cuenta que en el piso inferior, tanto la carga como la sobrecarga es un 20 por 100 mayor que en los pisos restantes.

La primera etapa del método, determinación de los pares de empotramiento perfecto, es bien sencilla, y, en lugar de considerar los valores absolutos, es más fácil para la repartición sustituir por números sencillos proporcionales; así, hemos partido del valor 100 para los dinteles exteriores de los pisos superiores; en las otras barras se deducen teniendo en cuenta que son proporcionales a la carga por metro lineal y al cuadrado de la luz. En los diagramas corresponden a estos pares los números más próximos a las barras en los extremos respectivos, y se colocan, alternativamente, por encima y por debajo para evitar superposición de columnas. En los pilares, naturalmente, los pares valen cero.

La segunda etapa, distribución de los momentos de empotramiento perfecto, se lleva a cabo empezando por el nudo superior izquierdo, cuyo momento desequilibrado, 100, se reparte entre pilar y dintel, tocando a 72,7 y 27,3, respectivamente.

La actuación del par 72,7 en el extremo izquierdo del dintel da lugar a un par en el extremo derecho, que se obtiene multiplicando por el coeficiente de transmisión, o sea por 1/2, correspondiéndole —36,35.

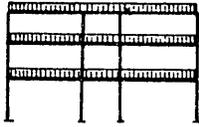
Pasamos a equilibrar el nudo siguiente, superior central izquierdo, en el que la resultante de los pares es: —100, —36,5 + 25 = —111,50, que repartimos proporcionalmente a 4, 1 y 1,5, trasladando inmediatamente en cada barra la mitad de los momentos de distribución a los extremos opuestos.

El nudo considerado a continuación es el exterior del segundo piso, procediendo del mismo modo para la distribución y traslado de momentos en las barras que a él concurren.

En cuanto equilibramos todos los nudos volvemos a empezar, procediendo lo mismo con los momentos trasladados, y repetimos tantas veces la operación como sea preciso para la exactitud buscada.

En el diagrama se aprecia la sucesión de etapas, puesto que, cada vez que equilibramos un nudo, ponemos una raya cortando la columna de cifras. Como puede apreciarse por el valor relativo de las correcciones, la repartición, a partir de la tercera vuelta, influye escasamente en el resultado.

Como se trata de estructura simétrica y las cargas también lo son, no es preciso considerar la etapa ter-



$$\begin{array}{r}
 -70.90 \\
 + 0.82 \\
 - 0.60 \\
 + 5.85 \\
 + 9.10 \\
 + 68.50 \\
 - 36.35 \\
 - 100
 \end{array}$$

LAMINA I
Carga total

5.5

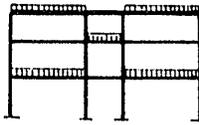
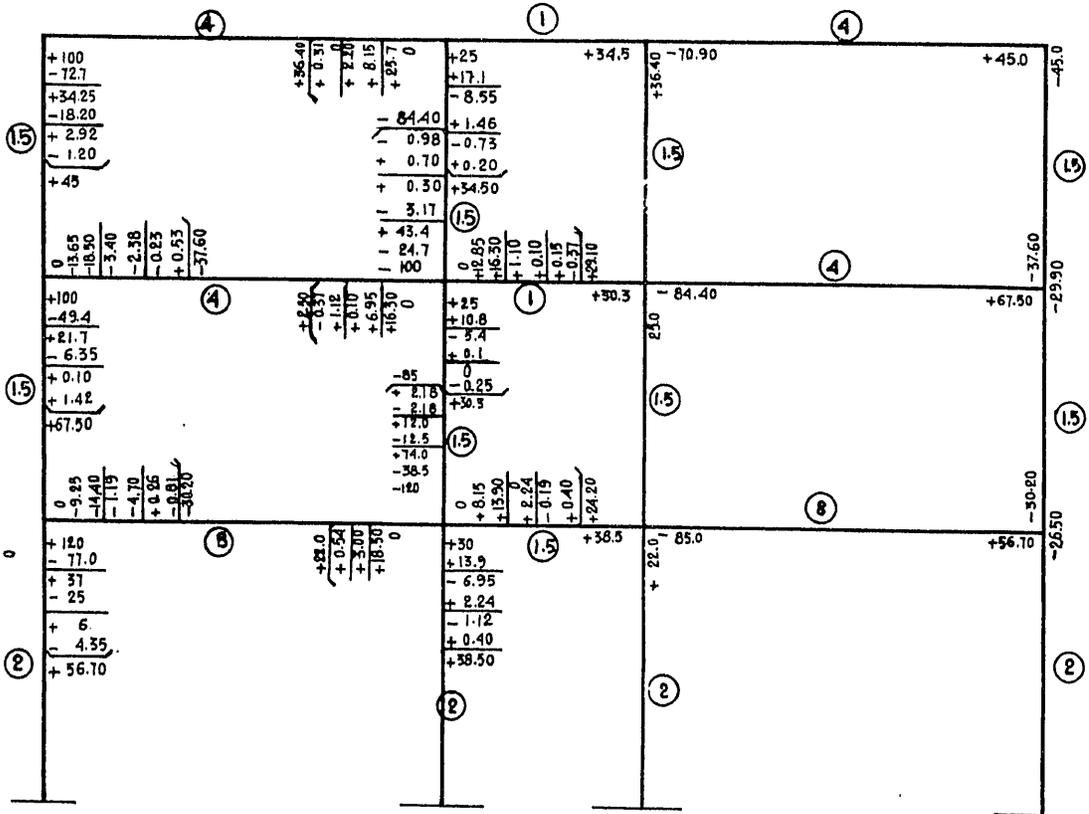
7

11.5

$$\begin{array}{r}
 -49.0 \\
 + 0.46 \\
 - 1.19 \\
 - 6.80 \\
 - 9.25 \\
 - 21.5 \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -29.90 \\
 + 0.53 \\
 - 2.35 \\
 - 2.36 \\
 - 7.40 \\
 - 18.50 \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -26.50 \\
 + 1.11 \\
 - 6.2 \\
 - 19.2 \\
 0
 \end{array}$$



$$\begin{array}{r}
 + 5.5 \\
 - 4.5 \\
 + 19.0 \\
 - 15.7 \\
 + 84.0 \\
 - 36.5 \\
 - 100
 \end{array}$$

Cargas alternadas

5.5

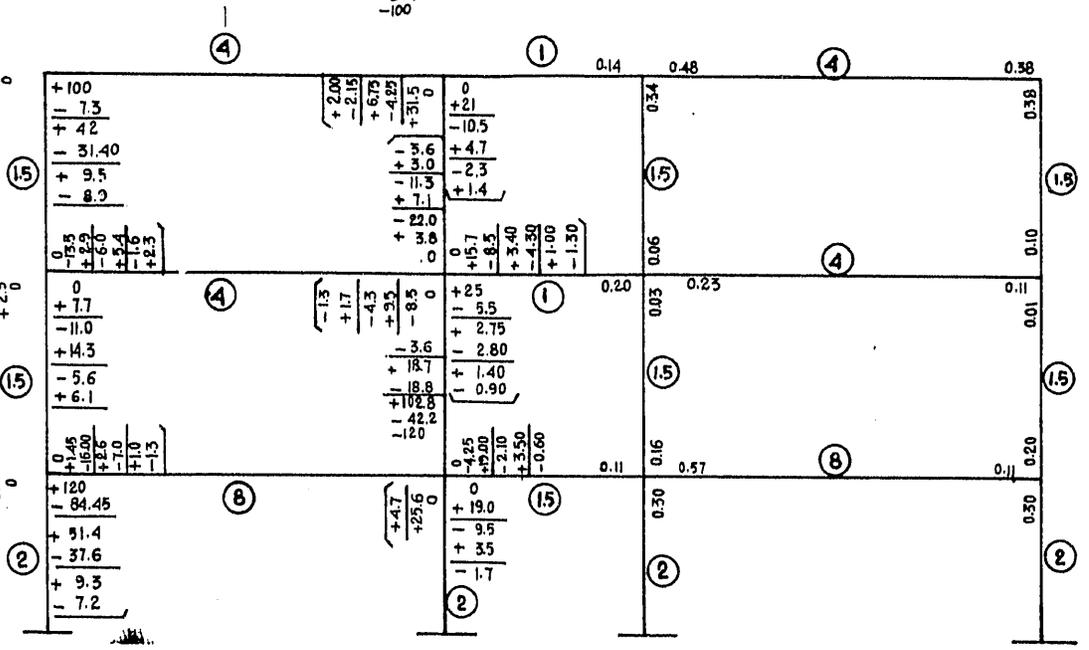
7

11.5

$$\begin{array}{r}
 -3.3 \\
 + 2.7 \\
 - 12.05 \\
 + 5.3 \\
 - 8.0 \\
 + 2.5 \\
 0
 \end{array}$$

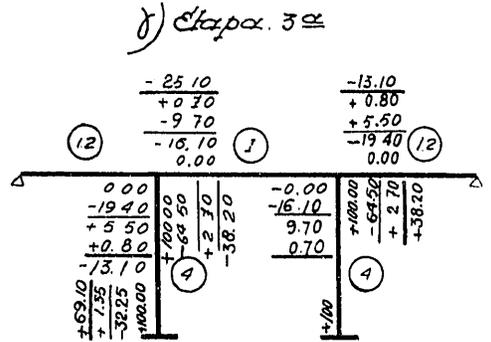
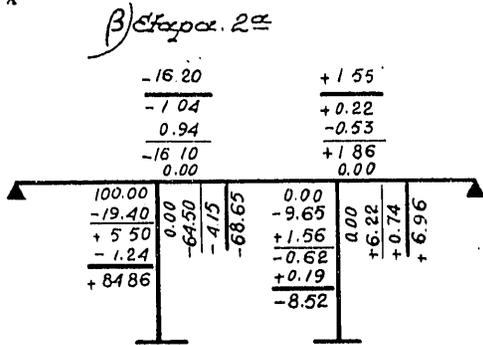
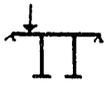
$$\begin{array}{r}
 + 2.3 \\
 - 3.5 \\
 + 5.3 \\
 - 8.0 \\
 + 2.5 \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -18 \\
 -94 \\
 -21.0 \\
 0
 \end{array}$$



LAMINA II

Determinacion de los momentos de empotramiento



$$M_0 + M_1 + m_1 = 0$$

$$M_1 + M_2 + m_2 = 0$$

$$\theta_0 + \alpha_0 \theta_1 = 0$$

$$M_0 = 4ER_0(\theta_1 + \beta_0 \theta_0) + \mu_0$$

$$M_1 = 4ER_1(\theta_1 + \alpha_1 \theta_2)$$

$$M_2 = 4ER_2(\theta_2 + \beta_2 \theta_1)$$

$$M_2' = 4ER_2(\theta_2 + \beta_0 \theta_2)$$

$$\theta_3 + \alpha_3 \theta_2 = 0$$

$$m_1 = 4Ep_1 \theta_1$$

$$m_2 = 4Ep_2 \theta_2$$

$$M_0 + M_1 + m_1 = 0$$

$$M_1 + M_2 + m_2 = 0$$

$$\theta_0 + \alpha_0 \theta_1 = 0$$

$$M_0 = 4ER_0(\theta_1 + \beta_0 \theta_0)$$

$$M_1' = 4ER_1(\theta_1 + \alpha_1 \theta_2)$$

$$M_2 = 4ER_2(\theta_2 + \beta_2 \theta_1)$$

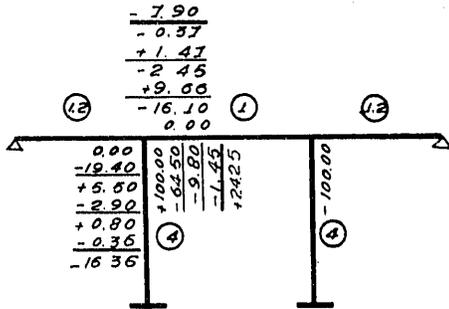
$$M_2' = 4ER_2(\theta_2 + \beta_0 \theta_2)$$

$$\theta_3 + \alpha_3 \theta_2 = 0$$

$$m_1 = 4Ep_1(\theta_1 - \frac{3\Delta}{2})$$

$$m_2 = 4Ep_2(\theta_2 - \frac{3\Delta}{2})$$

Variacion de temperatura



$$M_0 + M_1 + m_1 = 0$$

$$M_1 + M_2 + m_2 = 0$$

$$\theta_0 + \alpha_0 \theta_1 = 0$$

$$M_0 = 4ER_0(\theta_1 + \beta_0 \theta_0)$$

$$M_1 = 4ER_1(\theta_1 + \alpha_1 \theta_2)$$

$$M_2 = 4ER_2(\theta_2 + \beta_2 \theta_1)$$

$$M_2' = 4ER_2(\theta_2 + \beta_0 \theta_2)$$

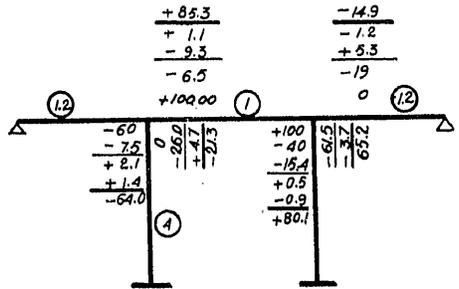
$$m_1 = 2Ep_1(2\theta_1 - 3\delta)$$

$$m_2 = 2Ep_2(2\theta_2 - 3\delta)$$

$$\delta = \frac{0.0001 \times 0.60 \times L}{h}$$

L	M ₀	M ₂ '	M ₁	M ₂	m ₁	m ₂
+15	10.8	I _p $\frac{L}{H^2}$	5.3	I _p $\frac{L}{H^2}$	16.4	I _p $\frac{L}{H^2}$
-25	16.5	"	8.8	"	2.74	"

Desnivelacion de los apoyos



$$M_0 + M_1 + m_1 = 0$$

$$M_1 + M_2 + m_2 = 0$$

$$\theta_0 + \alpha_0 \theta_1 - (1 + \alpha_0) \delta_0 = 0$$

$$M_0 = 4ER_0[\theta_1 + \beta_0 \theta_0 - (1 + \beta_0) \delta_0]$$

$$M_1' = 4ER_1[\theta_1 + \alpha_1 \theta_2 - (1 + \alpha_1) \delta_0]$$

$$M_2 = 4ER_2[\theta_2 + \beta_2 \theta_1 - (1 + \beta_2) \delta_0]$$

$$M_2' = 4ER_2(\theta_2 + \beta_0 \theta_2)$$

$$\theta_3 + \alpha_3 \theta_2 = 0$$

$$m_1 = 4Ep_1 \theta_1$$

$$m_2 = 4Ep_2 \theta_2$$

$$\delta_0 = \frac{\Delta}{L_0} \quad \delta_1 = \frac{\Delta}{L_1}$$

Δ	M ₀	M ₁ '	M ₂	M ₂ '	m ₁	m ₂
10%	62	$\frac{I_p}{L_1^2}$	77	$\frac{I_p}{L_1^2}$	20	$\frac{I_p}{L_1^2}$
40%	24	"	31	"	81	"
						25

cera, y prescindimos de la cuarta y quinta, pues tanto las deformaciones por esfuerzo axial como los desplazamientos por esfuerzo tangencial son insignificantes.

En los diagramas se indica únicamente el desarrollo de los cálculos para una de las mitades, anotando en la otra los resultados finales. Hay que tener en cuenta, para los signos, que se trata de pares de empotramiento y no de momentos flectores en los extremos.

En el caso del pórtico de nuestros modelos, el desarrollo del método es el siguiente:

Etapá primera.—La determinación de las características de cada uno de los elementos se ha llevado a cabo como expusimos en artículos anteriores, obteniendo los siguientes valores:

	Coefficientes de transmisión	Coefficiente elástico
Dinteles exteriores.....	0,40 0,70	1,30 $\frac{I_0}{L_0}$
Dintel interior.....	0,60	1,40 $\frac{I_0}{L_1}$
Pilares.....	0,50	$\frac{I_p}{h}$

Entre las luces de los dinteles hemos elegido la relación óptima, que, como ya indicamos, era la que resultaba de igualar los momentos flectores para empotramiento perfecto en los extremos comunes, llegando a:

$$L_0 = L_2 = 0,77L_1$$

De este modo, la relación entre los coeficientes elásticos de dinteles es: $k_0 = 1,20 k_1$. También hemos fijado la correspondiente a pilar-dintel interior en: $p_1 = 4k_1$. Para el diagrama tomamos como unidad la de éste, correspondiéndole a los demás 1,2 y +, números que aparecen junto a las correspondientes barras encerrados en pequeños círculos.

La determinación de los momentos de empotramiento perfecto ya se llevó a cabo, al mismo tiempo que las características de los diversos elementos; para conveniencias en las operaciones numéricas de repartición partimos del valor 100 que es puramente representativo y según los casos iguala: μ_0 para fuerzas situadas en el primer tramo, μ_1 y μ'_1 para fuerzas situadas en el segundo tramo,

$$\frac{6E\mu_0 \times 0,0001 \times 0,50L_1 t}{h}$$

para variación de temperatura t y

$$\frac{+Ek_1(1 + \sigma_1)\Delta}{L_1}$$

para asiento accidental de los apoyos Δ .

Etapá segunda.—En la lámina 2 exponemos el desarrollo de la segunda etapa para los casos de fuerza aplicada en el primer tramo, variación de tem-

peratura y asiento accidental; claramente se sigue la marcha de las operaciones y únicamente llamaremos la atención sobre el hecho de que cuando una barra tiene extremidad con empotramiento perfecto, no hace falta trasladarle sucesivamente los momentos, puesto que como los absorbe sin devolución, es más sencillo hacer la cuenta al final; por ejemplo, en el caso de los pilares le corresponde la mitad del momento de compensación en el extremo opuesto. Del mismo modo, cuando una barra se termina en extremidad articulada, no es preciso hacer el doble traslado de momentos; se obtiene el mismo resultado multiplicando el momento de compensación por el producto de los dos factores de transmisión y cambiando de signo.

Etapá tercera. — Indicamos la correspondiente a fuerza situada en el primer tramo. Empezamos por hallar los esfuerzos transversales que actúan en la estructura de la etapa anterior, cuyo valor viene dado por la suma de los pares de empotramiento dividida por la altura, para cada uno de los pilares, y nos resulta:

$$3 \times \frac{-68,65 + 6,96}{2h} = \frac{-92,03}{h}$$

Esta fuerza se equilibra virtualmente al suponer inamovilidad de los nudos; pero en la realidad, al desplazarse éstos, aparecerán nuevos momentos y las correspondientes fuerzas transversales que equilibrarán a la anterior. Esta nueva distribución de momentos la obtenemos partiendo del coeficiente 100, cuyo valor es distinto del caso anterior, suponiendo momentos de empotramiento perfecto iguales en los extremos de los cuatro pilares. En seguida procedemos con ellos como en la segunda etapa y calculamos la resultante de los esfuerzos transversales correspondientes que nos resulta:

$$2 \times \frac{69,10 + 38,20}{h} = \frac{214,6}{h}$$

Por consiguiente, el equilibrio de los esfuerzos transversales habrá de conseguirse del siguiente modo:

$$-\frac{92,03}{h} \beta + \frac{214,6}{h} \gamma = 0$$

de donde $\gamma = 0,43\beta$ y los pares de empotramiento totales:

$$M_\gamma = M^2\beta + M^3\gamma = \beta(M^2 + 0,43M^3)$$

Dando a β los valores que correspondan para distintas posiciones de la fuerza unidad, llegamos a las líneas de influencia del par de empotramiento.

Aunque para claridad en la exposición didáctica se ha verificado en todos los casos la distribución de momentos, el problema es mucho más sencillo, pues basta hacerlo una vez para el momento 100 en un nudo, deduciendo los casos particulares, por superposición de esta misma solución para situaciones del mismo en distintas barras.