Introducción a la Mecánica de tierras [1]

5.º *Influencia del rozamiento*

Los valores de la tensión normal σ_z, determinados por experiencias de laboratorio, cuando se aplica una fuerza aislada P sobre la masa de un terraplén consolidado artificialmente, descubren notables discrepancias con la primera ecuación del sistema [2]. Los valores prácticos de σ_z son siempre mayores que los valores teóricos en el semiespacio isótropo y homogéneo. Esto se debe a que en las consideraciones precedentes no se ha tenido en cuenta el rozamiento entre la solera y el terreno. En el caso de una placa circular, con carga aislada en el centro o uniformemente repartida, las tensiones tangenciales del rozamiento en la superficie del terreno son centrípetas, y su valor a la distancia ρ del centro de la placa es

$$s_\rho = \frac{P}{2\pi\rho^2} \qquad [15]$$

Sustituyendo la expresión [14] en la primera de las ecuaciones [13], tendremos

$$\sigma_z = \frac{\nu H}{2\pi r^2} \operatorname{sen}^{\nu-2} \theta \cos^2 \theta \qquad [16]$$

que es la tensión normal vertical debida a la fuerza horizontal H.

Si sustituímos, en vez de H, el valor de s_ρ, y procediendo en forma idéntica al ejemplo práctico desarrollado en nuestro artículo anterior, podremos calcular el incremento de la tensión σ_z, en un punto del eje, debido a las fuerzas superficiales de rozamiento. Lo mismo que sucedió en dicho ejemplo, es preciso atribuir a ν un valor particular para obtener la expresión en términos finitos.

Para $\nu = 3$ resulta

$$\Delta\sigma_z = \frac{P}{\pi z^2} \qquad [17]$$

Cualquiera que sea la distribución y la intensidad de las fuerzas elementales de rozamiento, siempre puede calcularse $\Delta\sigma_z$ a base de la ecuación [14].

6.º *La condición de plasticidad*

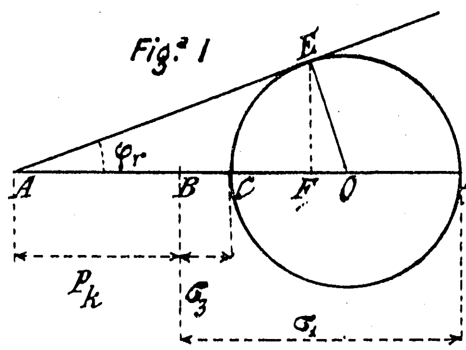
En sentido vulgar, la plasticidad es una propiedad mecánica de ciertos materiales, como, por ejemplo, las arcillas; pero en los estudios teóricos interviene el concepto de estado plástico de un cuerpo que consiste en un régimen especial de tensión, comprendido entre los límites de plasticidad y de rotura. El intervalo de ambos límites puede ser más o menos amplio. Cuando están muy próximos se dice que el material es quebradizo; si están muy separados se dice que es plástico.

Un cuerpo habrá alcanzado el estado plástico en alguno de sus puntos, según el valor de las tensiones principales en dicho punto. Existen diversas expresiones analíticas de la condición de plasticidad en un punto; pero la más general es la ecuación de Mises

$$(\sigma_3 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 = f(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \qquad [18]$$

donde $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ son las tres tensiones principales en dicho punto y f una función, característica de cada material, que se determina mediante ensayos de laboratorio.

El modo de comportarse un terreno, suelto o con cierta cohesión, cuando se le aplican cargas crecientes hasta alcanzar aquella cuyos efectos permiten asimilarla a una carga de rotura, indica que su régimen interno es de plasticidad. Por eso tiene importancia fundamental, en la Mecánica de tierras, el estudio del estado plástico de un cuerpo. Si se emplea con este objeto la ecuación de Mises, los cálculos se complican.



Suponiendo que la tensión intermedia σ_2 no influye en la aparición del estado plástico, se logra una gran sencillez.

Representando por p_k y φ_r la cohesión y el ángulo de rozamiento interno de las tierras, pueden ser σ_1 y σ_2 tales, que entre los cuatro valores se verifique la relación expresada gráficamente en la figura 1.

Como AC y AD son los ejes de la elipse de tensiones relativa al punto, nos encontramos con un diagrama de Mohr. El punto E es representativo de una orientación de plano que forma, con el eje mayor de la elipse, el ángulo

$$\frac{1}{2} \cdot \widehat{EOA} = 45^\circ - \frac{\varphi_r}{2}$$

La tensión relativa a dicho plano tiene por componentes

$$\sigma = AF$$

$$\tau = EF$$

y forma con la normal al plano (fig. 2) el ángulo φ_r.

Es evidente que si, permaneciendo σ_3 fijo, rebasara σ_1 el valor BD, se produciría un deslizamiento a lo largo del plano considerado. Este hecho va acompañado de una deformación que prácticamente puede interpretarse como el comienzo del estado de plasticidad.

[1] Véase el número anterior, página 361.

[2] V. Boussinesq, ob. cit. en el artículo anterior.

De la figura 1 se deduce

$$OE = OA \operatorname{sen} \varphi_r$$

y sustituyendo los valores

$$OE = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

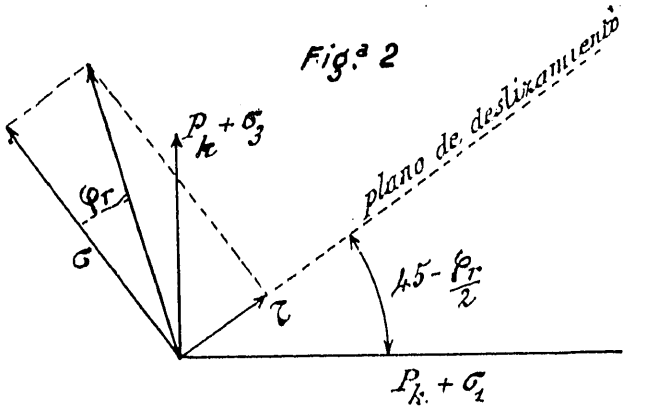
$$OA = p_k + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$$

$$\operatorname{sen} \varphi_r = k$$

resulta la ecuación de plasticidad

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2k\left[p_k + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)\right] \qquad [19]$$

comprobada en las arcillas, cuando la carga se aplica



(Los valores de p_k, σ_1, σ_3 y φ_r son los mismos en las figuras 1 y 2)

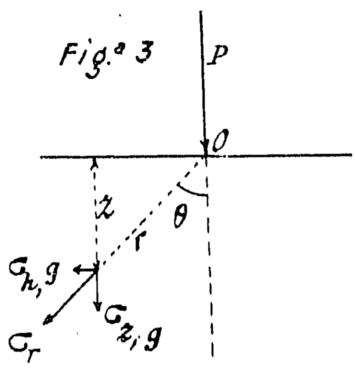
lentamente, o bien una vez compensadas las tensiones hidrodinámicas si se trata de una carga brusca, como sucede en la hinca de pilotes con martinete.

En el caso de las arenas, donde la cohesión es nula, tendremos

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = k = \text{constante} \qquad [20]$$

que es la conocida condición de Rankine.

Si la cohesión del material es muy elevada con re-



lación a las tensiones principales, podremos prescindir del sumando $\frac{1}{2}$ $(\sigma_1 + \sigma_3)$ en la fórmula [19] y tendremos

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2kp_k = \text{constante} \qquad [21]$$

que es la ecuación de plasticidad en los metales, y también en las arcillas, cuando se aplica la carga bruscamente y no han podido compensarse todavía las tensiones hidrodinámicas. Terzaghi ha comprobado, con sus investigaciones, este extremo.

7.º *Zonas elásticas y plásticas*

Como el régimen de tensiones en un punto puede ser de dos clases, importa mucho deslindar la ambigüedad, señalando en cada caso dónde están las zonas plásticas y dónde las zonas elásticas. Para ello se recurre a alguna de las ecuaciones [19], [20] y [21].

Consideremos, nuevamente, el semiespacio homogéneo, anisótropo, con una carga aislada P (fig. 3). Sean p_k la cohesión, φ_r el rozamiento interno y γ la densidad del material que ocupa el semiespacio. Por la acción del peso propio se origina un campo de tensiones cuyas trayectorias son dos haces de rectas, verticales y horizontales.

Los valores de sus tensiones principales son

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{z,g} &= \gamma z \\ \sigma_{h,g} &= \xi \gamma z \end{aligned}\right\} \qquad [22]$$

donde ξ es una constante comprendida entre 0,5 y 1.

Por otra parte, la fuerza P determina, en cada punto, el tensor elástico

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu - 2} \theta \\ \sigma_s &= 0 \\ \sigma_t &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [23]$$

estudiado en nuestro artículo anterior, y cuyas trayectorias son los semirrayos de la radiación de vértice O.

Ordinariamente el peso propio se traduce en un régimen elástico y la plasticidad se alcanza por efecto de la carga P. Es evidente que a grandes distancias del punto O, donde la influencia de P es prácticamente nula, tendremos zonas de elasticidad; pero, en cambio, podrán existir zonas de plasticidad en las proximidades de O.

En virtud de las simetrías, física y geométrica, del caso que nos ocupa, será suficiente estudiar lo que sucede en un meridiano. Suponiendo, con objeto de simplificar, $\xi = 1$, en las ecuaciones [22], tendremos que el tensor resultante de los campos tensoriales [22] y [23] es

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu - 2} \theta + \gamma z \\ \sigma_2 &= \sigma_3 = \gamma z \end{aligned}\right\} \qquad [24]$$

Sustituyendo valores en la ecuación de plasticidad [19], y teniendo en cuenta la igualdad $z = r \cos \theta$, resulta

$$\frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu - 2} \theta = k\left[2p_k + \frac{\nu P}{2\pi r^2} \cos^{\nu - 2} \theta + 2\gamma r \cos \theta\right] \qquad [25]$$

Esta es la ecuación, en coordenadas polares, de una curva, meridiana de la superficie que separa, dentro del semiespacio, las zonas plástica y elástica.

Haciendo, para simplificar,

$$\frac{2\pi\gamma}{\nu P} = C_\nu \qquad [26]$$

podremos escribir la ecuación [25] en la forma

$$r^3 + \frac{p_k}{\gamma}\frac{1}{\cos\theta}r^2 = \frac{\cos^{\nu-3}\theta}{2C_\nu}\frac{1-k}{k} \qquad [27]$$

Si el terreno carece de cohesión, la meridiana es

$$r = \cos^{\frac{\nu-3}{3}}\theta\sqrt[3]{\frac{1}{2C_\nu}\cdot\frac{1-k}{k}} \qquad [28]$$

que en el caso particular $\nu = 3$ representa una semicircunferencia (fig. 4), y en el caso $\nu = 6$ es una circunferencia.

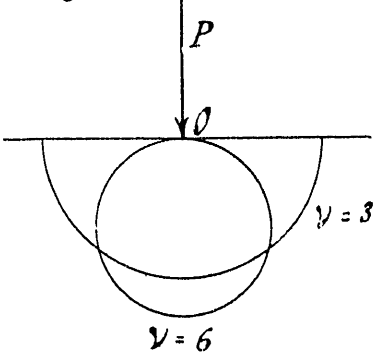
Si la carga P, en vez de actuar en un punto de la superficie, está aplicada a la profundidad t (fig. 5), también será válida la ecuación [27], sin más que sustituir p_k por $p_k + \gamma t$. En este caso, suponiendo que la cohesión de las tierras es nula, se obtiene la fórmula

$$r^3 + \frac{t}{\cos\theta}r^2 = \frac{\cos^{\nu-3}\theta}{2C_\nu}\cdot\frac{1-k}{k} \qquad [29]$$

donde se ve la influencia de la profundidad de una cimentación sobre la zona plástica.

Con lo dicho queda expuesto, en líneas generales, el procedimiento que puede seguirse para determinar

Fig.ª 4



la superficie de separación entre las zonas elásticas y plásticas en cualquier hipótesis de carga, reduciendo ésta a cargas aisladas elementales. Dicho método se resume en los siguientes términos:

1.º Se calcula el campo tensorial del semiespacio homogéneo, anisótropo y desprovisto de peso.

2.º Se determina el campo tensorial debido al peso propio.

3.º Se efectúa la composición de ambos campos.

4.º Se aplica al campo resultante la condición de plasticidad.

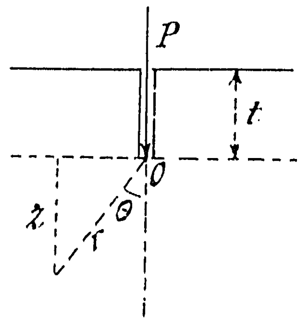
Para realizar este estudio se necesita conocer, además del sistema de fuerzas solicitantes, los siguientes valores:

γ = densidad del terreno.
p_k = cohesión del terreno.
φ_r = ángulo de rozamiento interno.
t = profundidad que alcanza la cimentación.
ν = factor de concentración.

8.º *La carga crítica*

El procedimiento anterior suscita alguna duda que es preciso aclarar. Prescindamos, por el momento,

Fig.ª 5



del campo tensorial debido al peso propio, porque su evaluación es siempre favorable a la seguridad de los cálculos. Ahora bien, las fórmulas [23], o sus análogas para otra hipótesis de carga, están deducidas suponiendo, precisamente, un régimen elástico, y no son válidas en las zonas cuyo régimen sea de plasticidad. Por otra parte, aunque los fenómenos plásticos se produjesen por la acción simultánea de los dos campos elásticos, tampoco sería válida la simple composición sumatoria en las zonas de plasticidad. Pero la teoría es rigurosa dentro de las condiciones de la ecuación [19], es decir, en el instante de iniciarse el régimen de plasticidad.

En resumen, el método expuesto no tiene otro alcance que advertirnos cuándo empieza ese régimen. Igualando a cero la ordenada máxima de la curva que separa ambas zonas, obtendremos un valor de la carga externa por debajo del cual no se originan fenómenos de plasticidad. Este límite juega un papel muy importante en las cimentaciones, y se llama carga crítica del terreno.

Cuando se rebasa el valor crítico se producen, en el terreno, deslizamientos tangenciales cuya intensidad es peligrosa para la estabilidad de la cimentación.

Por ejemplo, en el caso de una cimentación, sobre arena, a la profundidad t, por placa rectangular de gran longitud, la carga crítica uniformemente repartida vale

$$p_c = \frac{\pi\gamma t}{\cot\varphi_r - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_r\right)}$$

y es independiente del ancho de la placa.

Federico ALICART
Ingeniero de Caminos