

Teoría del arco¹

IX

Directriz: parábola de segundo grado.

Variación de la inercia: proyección constante sobre el plano vertical

Utilidad de este tipo de arco

Estudiaremos el valor de este tipo de arco, en los dos elementos que lo definen: directriz y modulación de espesores.

En cuanto a directriz, la repartición de esfuerzos que le da virtualidad es: distribución continua uniforme por unidad de longitud según la cuerda. Veamos en qué condiciones tiene realidad este supuesto.

El *peso propio*, aun en el caso menos probable de espesor constante, da, por la propia incurvación del arco, una repartición horizontal creciente de clave a arranques, acentuada cuando la variación de espesores, caso más frecuente, coincide en esta dirección de crecimiento.

Las *cargas* aumentan de clave a arranques (espesor de tímpano y relleno, alturas de tabiques, etc.), excepto en el puente con tablero colgado mediante cables.

En cuanto a la *sobrecarga*, sólo el caso de puente-acueducto con apoyo continuo sobre el arco cumple estrictamente las condiciones del supuesto.

Por último, los esfuerzos que resulten de las *variaciones termohigrométricas* y *asiento de los apoyos* quedan fuera del planteamiento del problema.

En cuanto a repartición de espesores, la eficacia de la ley adoptada para variación de momentos de inercia depende del grado de uniformidad que se obtenga para las tensiones en los diferentes puntos del arco. Suponiendo secciones homogéneas de forma rectangular, para las que corresponden las relaciones de espesor en clave y arranques que se indican en el cuadro núm. 6, vamos a considerar separadamente las compresiones longitudinales y los pares de flexión.

Las compresiones longitudinales, en el caso extremo de haber conseguido el régimen antifunicular, con un empuje horizontal constante H_0 , variarán según la ley:

$$N = \frac{H_0}{\cos \alpha}$$

Y como el área de las secciones resistentes viene dada por

$$\Omega = \frac{\Omega_0}{\sqrt[3]{\cos \alpha}}$$

las tensiones se expresarán mediante

$$t = \frac{N}{\Omega} = t_0 \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 \alpha}}$$

En el cuadro número 6 he calculado la relación entre las tensiones de clave y arranques, para distintos rebajamientos, apareciendo claramente su divergencia con la unidad, que aumenta en sentido contrario al rebajamiento, llegando a valer casi dos, cuando éste es el $\frac{1}{2}$.

En los pares de flexión se deduce que el de arranques es dos veces el de clave, para carga uniformemente repartida, y casi triple para sobrecarga horizontal uniforme móvil. En cambio, la relación de momentos resistentes de las secciones es

$$\frac{r}{r_0} = \left(\frac{e}{e_0}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{\cos^2 \alpha}}$$

o sea la misma que para las tensiones en compresión pura, y, por consiguiente, sólo llega a obtenerse una compensación muy lejana en el caso de arcos peraltados.

Rebajamiento	Relación de momentos de inercia en clave y arranques	Relación de espesores en clave y arranques	Relación de tensiones para compresión pura en clave y arranques
	$I_a = I_0 / \cos \alpha_a$	$e_a = e_0 / \sqrt[3]{\cos \alpha_a}$	$t_a = t_0 / \sqrt[3]{\cos \alpha_a^2}$
0,1	1,078	1,02	1,04
0,2	1,280	1,08	1,18
0,3	1,562	1,16	1,35
0,4	1,885	1,24	1,53
0,5	2,230	1,30	1,70

Vemos, pues, que, lo mismo por lo que se refiere a directriz que a distribución de la materia en las diferentes secciones, y a mi entender más por esta segunda causa, este tipo de arco queda descalificado para la mayoría de las aplicaciones prácticas. Sin embargo, puede admitirse en dos casos: arco de puente-acueducto y arco de pequeña luz, para el cual se adopta constructivamente directriz en arco de circunferencia y espesor mínimo constante, obteniéndose un error despreciable al hacer la sustitución por facilidad de cálculo.

Así, doy como ejemplo la resolución de cada uno de estos dos casos que pueden presentarse.

Ejemplo 1.º Arco de pequeña luz muy rebajado

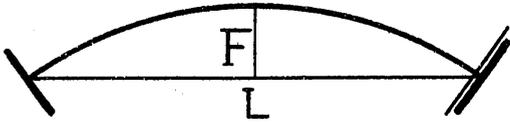
Bóveda de hormigón armado, cuyos datos y cargas probables, así como el desarrollo de los cálculos, se reúnen en la hoja adjunta. La bóveda se convierte simplemente en arco, tomando una faja de ancho unidad.

He utilizado el procedimiento de Magnell para arcos muy rebajados, sirviéndome de su ábaco y cuadro para deducir las líneas de influencia en clave. De ellas se deducen inmediatamente las correspondientes al arranque, contentándose con estas dos secciones, pues interesa poco la distribución en las intermedias.

¹ Véase el número de 1.º de noviembre de 1933, página 457.

TABLA II

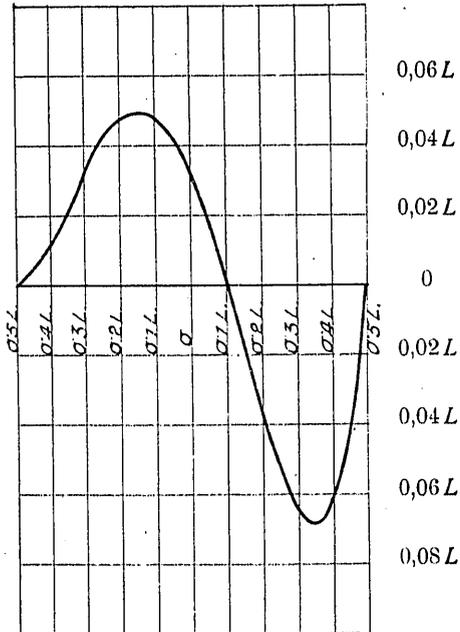
LINEAS DE INFLUENCIA SECCION: X = 0,5L



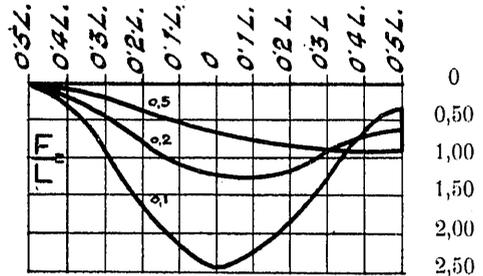
$$y = F \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$I \cos \alpha = \text{constante}$

M



N



T

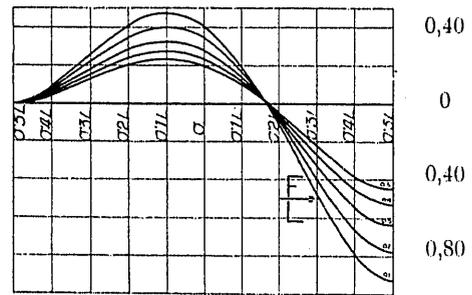
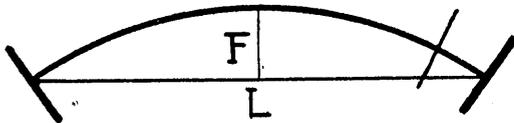


TABLA III

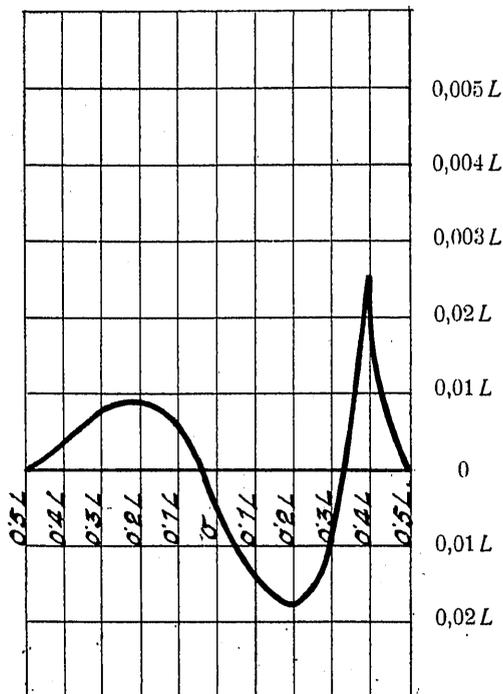
LINEAS DE INFLUENCIA SECCION: X = 0,4L



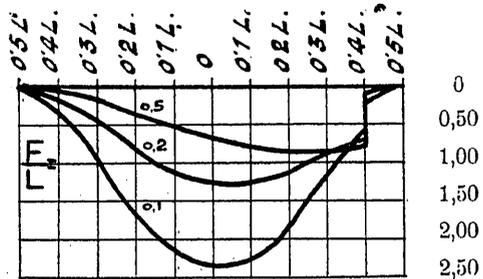
$$y = F \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$I \cos \alpha = \text{constante}$

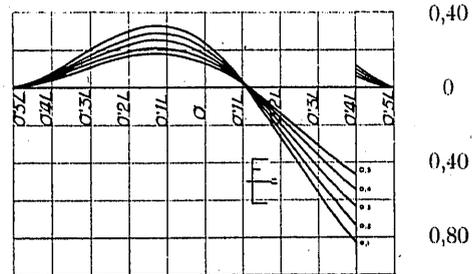
M



N



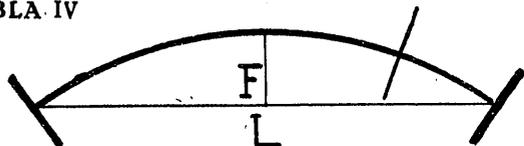
T



Para arcos de rebajamiento igual o superior a 0,10

TABLA IV

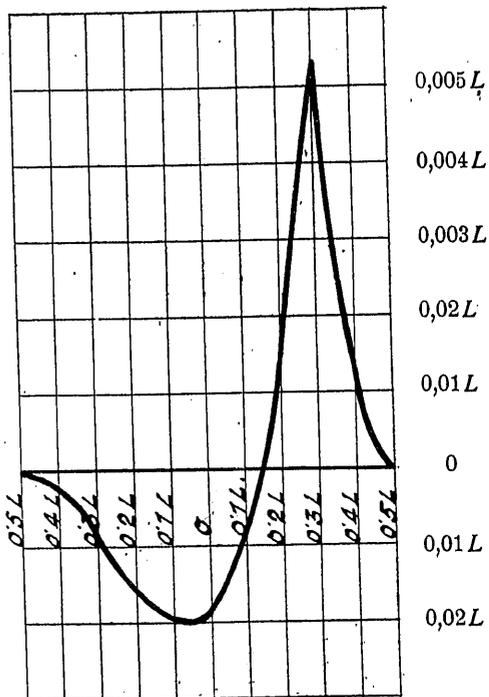
LINEAS DE INFLUENCIA SECCION: X = 0,3L



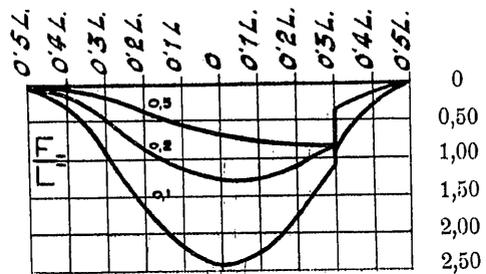
$$y = F \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$I \cos \alpha = \text{constante}$$

M



N



T

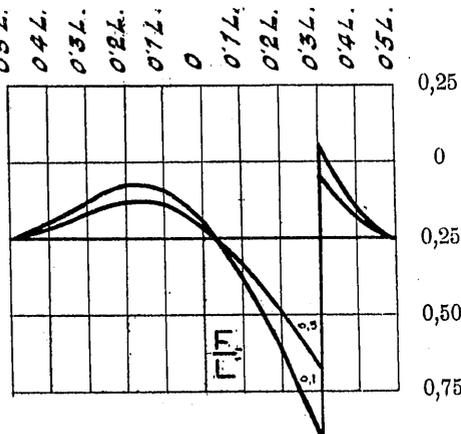
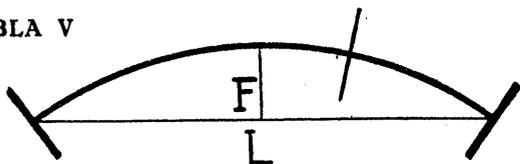


TABLA V

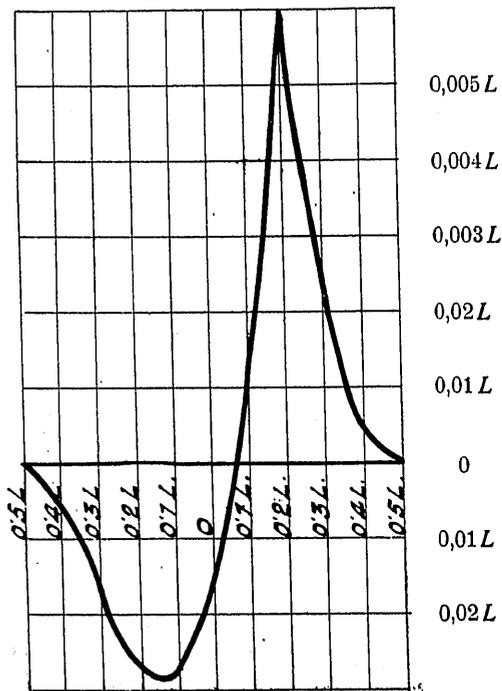
LINEAS DE INFLUENCIA SECCION: X = 0,2L



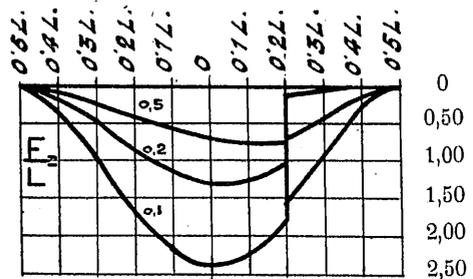
$$y = F \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

$$I \cos \alpha = \text{constante}$$

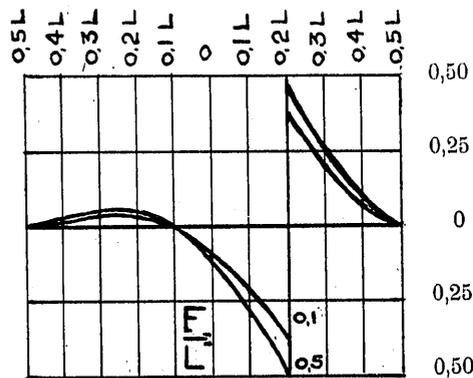
M



N



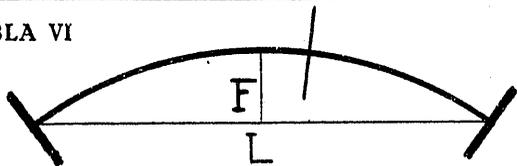
T



Para arcos de rebajamiento igual o superior a 0,10

TABLA VI

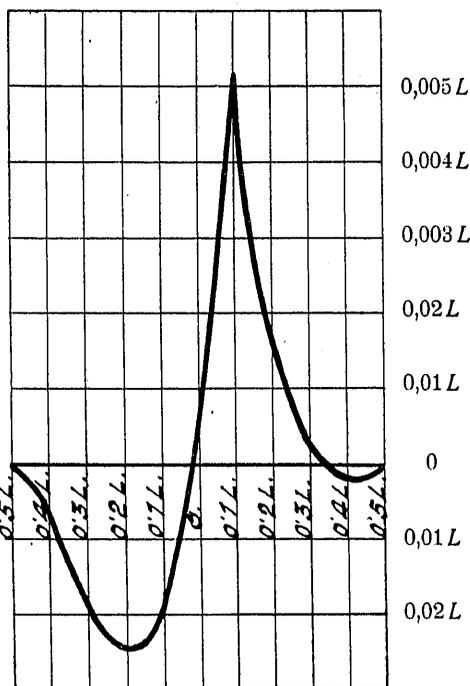
LINEAS DE INFLUENCIA SECCION: X = 0,1L



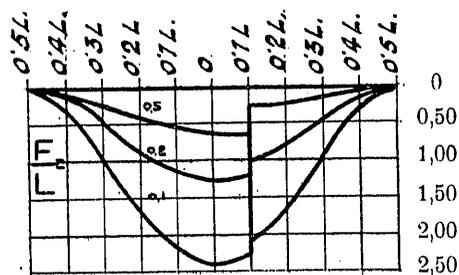
$$y = F \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

I cos α = constante

M



N



T

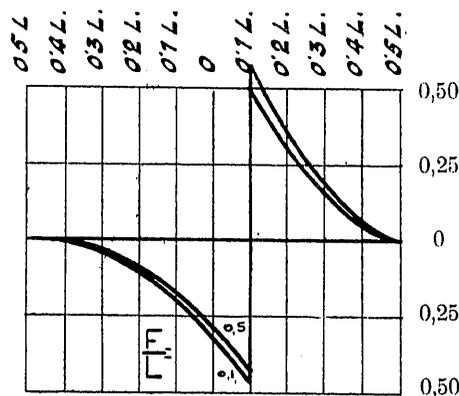
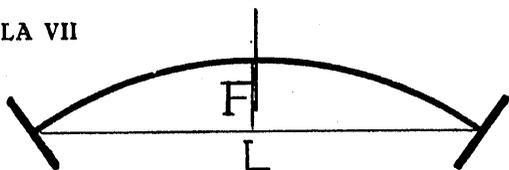


TABLA VII

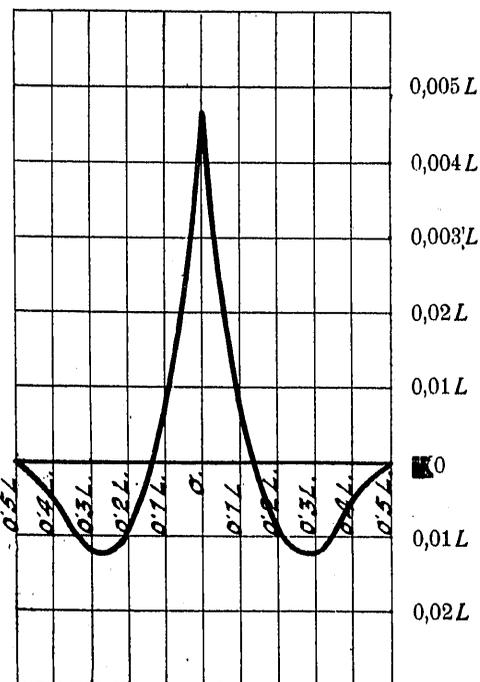
LINEAS DE INFLUENCIA SECCION: X = 0



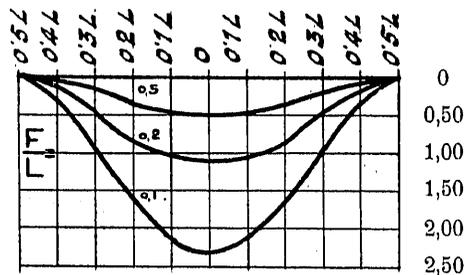
$$y = F \left[1 - 4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right]$$

I cos α = constante

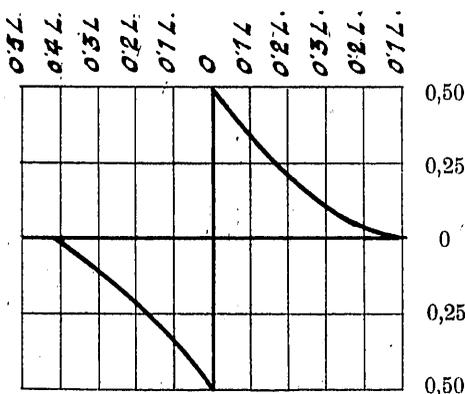
M



N



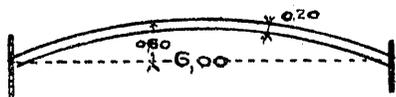
T



Para arcos de rebajamiento igual o superior a 0,10

EJEMPLO NUM 1

ARCO DE PEQUEÑA LUZ



DATOS

Luz 6,00 m
 Flecha . . 0,60 »
 Espesor . . 0,20 »

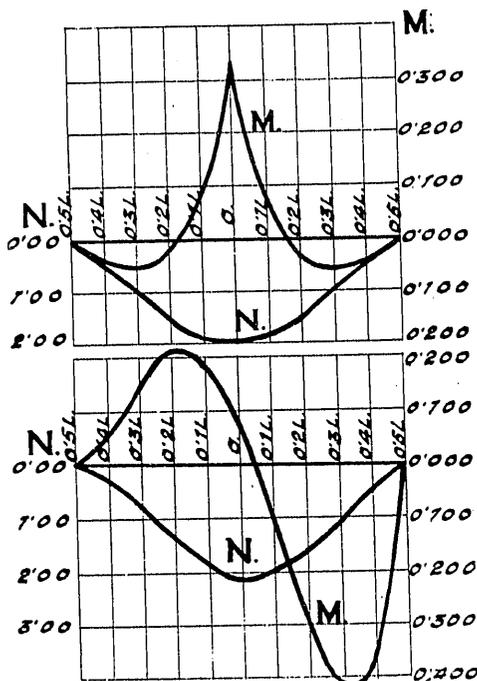
CARGAS

Peso propio $p_1 = 500 \text{ kg/m}^2$
 Carga permanente. $p_2 = 1000 \text{ »}$
 Sobrecarga móvil. $p_3 = 600 \text{ »}$
 Variación temp.^a. $+ 15 \text{ a } - 20^\circ \text{ C}$

LÍNEAS DE INFLUENCIA EN CLAVE

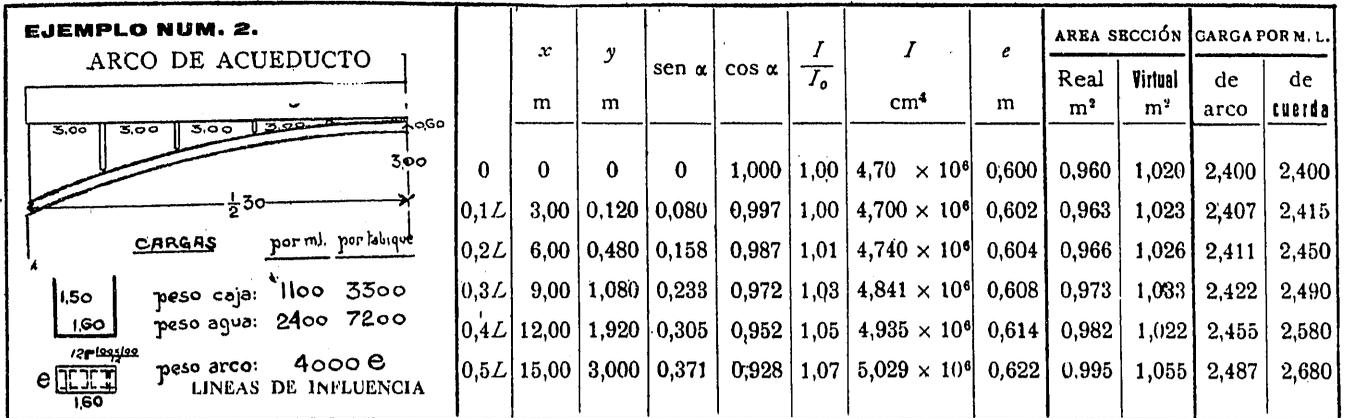
$T_0 = -2 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{x}{L} \right) \pm \frac{1}{2}$ $N_0 = \frac{1}{48K} \left[4 \left(\frac{x}{L} \right)^2 - 1 \right]^2$ $M_0 = L \left[\frac{1}{3} a N_0 - \frac{1}{8} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right)^2 \right]$						
	0,5L	0,4L	0,3L	0,2L	0,1L	0
T_0	0	0,028	0,104	0,216	0,352	0,500
N_0	0	0,270	0,853	1,470	1,920	2,083
$\frac{1}{3} a N_0$ $\frac{1}{8} \left(2 \frac{x}{L} - 1 \right)^2$ M_0/L	0	0,009	0,029	0,049	0,064	0,070
	0	0,005	0,021	0,045	0,080	0,125
	0	0,004	0,008	0,001	0,016	0,055
M_0	0	0,024	0,048	0,024	0,096	0,336

LÍNEAS DE INFLUENCIA

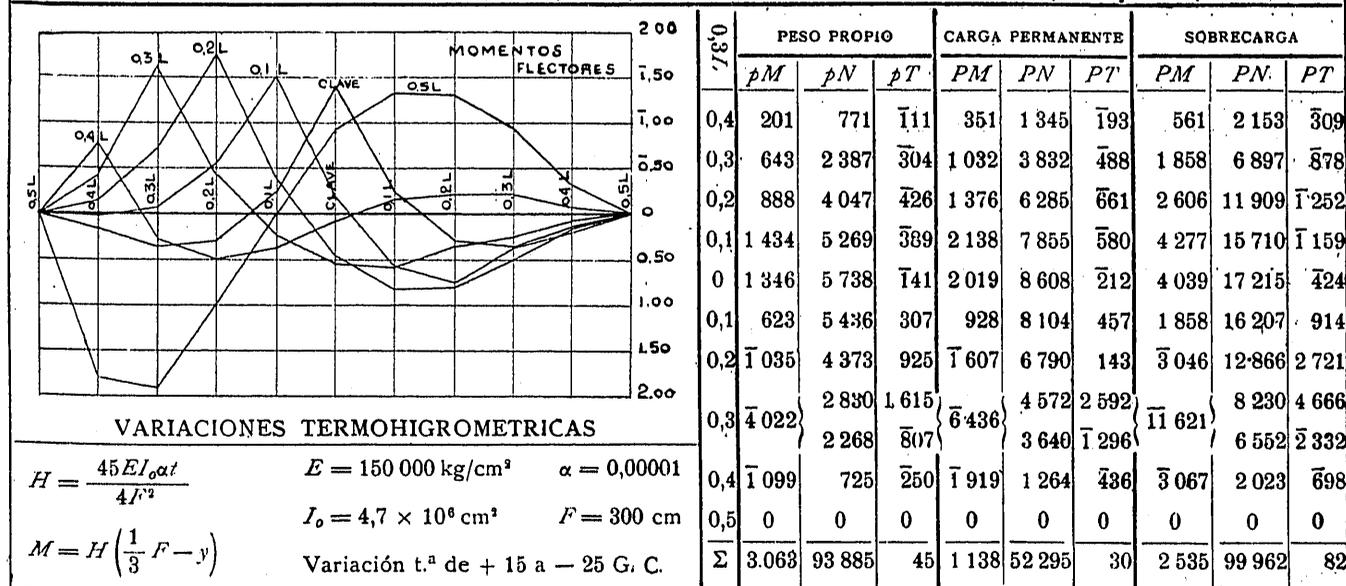


LÍNEAS DE INFLUENCIA EXTREMO DERECHO												
	0,5L	0,4L	0,3L	0,2L	0,1L	0	0,1L	0,2L	0,3L	0,4L	0,5L	
	$M = M_0 + T_0 \frac{L}{2} - N_0 F$					$M = M_0 + T_0 \frac{L}{2} - N_0 F + \left(\frac{L}{2} - X \right)$						
M	M_0	0	0,024	0,048	0,024	0,096	0,336	0,096	0,024	0,048	0,024	0
	$T_0 \frac{L}{2}$	0	0,084	0,312	0,648	1,056	1,500	1,056	0,648	0,312	0,084	0
	$- N_0 F$	0	0,162	0,512	0,882	1,152	1,250	1,152	0,882	0,512	0,162	0
	$\frac{L}{2} - X$	0	3,000	2,400	1,800	1,200	0,600	0
	0	0,054	0,152	0,210	0,192	0,086	0,096	0,294	0,424	0,378	0	
N	$N = N_0 \cos \alpha + T_0 \sin \alpha$					$N = N_0 \cos \alpha + T_0 \sin \alpha - \sin \alpha$						
	$N_0 \cos \alpha$	0	0,251	0,795	1,370	1,790	1,940	1,790	1,370	0,795	0,251	0
	$T_0 \sin \alpha$.	0,010	0,038	0,080	0,130	0,185	0,130	0,080	0,038	0,010	0
	$-\sin \alpha$	0,370	0,370	0,370	0,370	0,370	0
	.	0,261	0,833	1,450	1,920	2,125	2,030	1,660	1,127	0,611	0	
T	$T = T_0 \cos \alpha + N_0 \sin \alpha$					$T = T_0 \cos \alpha + N_0 \sin \alpha - \cos \alpha$						
	$T_0 \cos \alpha$	0	0,025	0,097	0,200	0,327	0,464	0,327	0,200	0,097	0,025	0
	$N_0 \sin \alpha$	0	0,100	0,316	0,546	0,715	0,775	0,715	0,546	0,316	0,100	0
	$-\cos \alpha$	0,929	0,929	0,929	0,929	0,929	0
	0	0,075	0,219	0,346	0,388	0,310	0,113	0,183	0,516	0,804	0	

CARGA PERMANENTE			SOBRECARGA				VARIACIONES TERMOHIGROMETRICAS			
$p = p_1 + p_2 = 1500 \text{ kg}$	Clave	Arranques	Hipótesis A		Hipótesis B		$N = \frac{E \alpha t \Omega_0 b}{aK}$	$M_0 = \frac{1}{3} Nf$	$M_E = -2M_0$	
			Clave	Arranques	Clave	Arranques				
$N = pL \frac{1 + 96b}{96K}$	10 100	10 100	N	2 180	2 100	4 040	4 040			
$M_0 = -p \frac{L^2}{24} + \frac{aL}{3} N_0$	-230		M_0	-190		-92				
$M_E = -2M_0$		460	M_E		430	184				
RESUMEN			CLAVE				ARRANQUES			
			Hipótesis A		Hipótesis B		Hipótesis A		Hipótesis B	
			M	N	M	N	M	N	M	
Carga permanente			-230	10 100	-230	10 100	460	10 100	460	10 100
Sobrecarga			-190	2 180	-92	4 040	430	2 100	184	4 040
Variaciones térmicas			-1 120	-5 580	840	4 180	2 230	-5 580	-1 674	4 180
TOTAL			-1 540	6 700	518	18 320	3 120	6 620	-1 030	18 320



	SECCIÓN 0,5L			SECCIÓN 0,4L			SECCIÓN 0,3L			SECCIÓN 0,2L			SECCIÓN 0,1L			SECCIÓN CLAVE		
	M	N	T	M	N	T	M	N	T	M	N	-T	M	N	T	M	N	T
0,5L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,4L	0,336	0,288	0,085	0,093	0,294	0,064	0,078	0,299	0,043	0,177	0,300	0,019	0,201	0,301	0,004	0,153	0,300	0,028
0,3L	0,960	0,929	0,259	0,234	0,945	0,194	0,258	0,958	0,122	0,522	0,963	0,049	0,381	0,964	0,027	0,360	0,960	0,104
0,2L	1,316	1,610	0,412	0,279	1,636	0,297	0,362	1,654	0,174	0,807	1,662	0,048	0,753	1,657	0,083	0,303	1,650	0,216
0,1L	1,340	2,132	0,476	0,162	2,162	0,323	0,594	2,182	0,161	0,834	2,186	0,006	0,588	2,178	0,179	0,240	2,160	0,352
0	0,936	2,448	0,404	0,093	2,380	0,237	0,561	2,391	0,059	0,468	2,389	0,123	0,186	2,370	0,312	1,404	2,340	0,500
0,1L	0,000	2,243	0,200	0,390	2,257	0,041	0,258	2,251	0,127	0,390	2,232	0,297	1,554	2,202	0,473	0,240	2,160	0,352
0,2L	1,001	1,821	0,116	0,495	1,809	0,243	0,423	1,787	0,378	1,785	1,752	0,513	0,543	1,623	0,347	0,303	1,650	0,216
0,3L	1,920	1,222	0,475	0,270	1,186	0,560	1,614	0,911	0,648	0,726	0,931	0,255	0,066	0,948	0,181	0,360	0,960	0,104
0,4L	1,812	0,639	0,791	0,765	0,581	0,834	0,426	0,281	0,097	0,159	0,292	0,075	0,033	0,297	0,052	0,153	0,300	0,028
0,5L	0	0,371	0,928	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



RESUMEN	SECCIÓN 0,5L		SECCIÓN 0,4L		SECCIÓN 0,3L		SECCIÓN 0,2L		SECCIÓN 0,1L		SECCIÓN CLAVE	
	M	N	M	N	M	N	M	N	M	N	M	N
Peso propio...	255	99085	1955	96250	3060	93885	1950	91580	2300	90255	1390	91360
Carga permanente...	1180	50380	1730	51180	1140	52295	1270	46160	1040	46630	220	46700
Sobrecarga...	1120	98660	2820	99680	2535	99960	820	102900	2930	90995	1820	89950
Variación t. ^a ...	4405	2040	1220	1260	110	1285	1150	1305	1940	1320	2200	1320
TOTAL ...	4210	246085	7725	248370	6845	248425	5190	241945	8210	229200	4630	229330

Lo primero que se ha determinado es el valor de K , entrando en el ábaco con los de a y b :

$$a = \frac{0,60}{6,00} = 0,10 \text{ (rebajamiento)}$$

$$b = \frac{r^2}{L^2} = 0,000093 \text{ (radio de giro unitario)}$$

Teniendo en cuenta las tres clases de esfuerzos que actúan en la estructura, he deducido los pares flectores y compresiones longitudinales en clave y arranques, para la carga permanente uniformemente distribuida según la horizontal, sobrecarga horizontal uniforme móvil y variaciones termohigrométricas.

Las correspondientes a la primera, mediante las fórmulas indicadas en función de K . Para las correspondientes a la segunda he considerado dos hipótesis de actuación: la que produce máximo par flector —sobrecarga extendida en la zona de momentos de un mismo signo (A)— y la que produce máxima compresión longitudinal —sobrecarga extendida a todo el arco (B)—.

En las variaciones termohigrométricas he considerado un intervalo de $+15$ a -20° C. alrededor de la temperatura de construcción, incluyendo en el descenso la retracción de fraguado.

Finalmente, he combinado los efectos actuantes para obtener, en cada una de las hipótesis consideradas, los máximos más desfavorables, que después han servido para proyectar la armadura.

Ejemplo 2.º Arco de puente-acueducto

He utilizado el procedimiento de las líneas de influencia únicamente para dar al caso mayor generalidad, pues, como se trata de sobrecargas fijas en posición, hubiera sido más práctico determinar directamente las curvas de repartición de los elementos de cálculo a todo lo largo del arco.

En el primer cuadro de la adjunta lámina figuran las características del arco, deducidas de la ecuación de la directriz:

$$y = 3 \left(1 - \frac{4 \times x^2}{900} \right)$$

y la ley de variación de inercias:

$$I \cos \alpha = I_0$$

Para determinar los espesores se ha tenido en cuenta el momento de inercia de la armadura (es del tipo rígida, pues se trata de un barranco de gran altura), con un coeficiente $m = 10$, partiendo de 60 cm en clave.

Mediante las tablas II a VII se han obtenido dos líneas de influencia en las secciones al décimo de la luz, debiendo advertirse que son poligonales, pues se trata de fuerzas transmitidas por los montantes, y que para las N y las T existen dos valores en la abscisa correspondiente a la sección.

Las líneas de influencia han servido para deducir los elementos de cálculo correspondientes al peso propio —por multiplicación de áreas, pues se trata de esfuerzo continuo—, carga permanente y sobrecarga —por suma de ordenadas, pues son fuerzas aisladas transmitidas por los montantes—. Aparece en lámina la deducción de estos elementos para la sección 0,3L.

La variación de temperatura tenida en cuenta es: $+15$ a -25° C., incluyendo en el descenso la retracción de fraguado, habiéndose calculado los esfuerzos derivados, mediante las fórmulas corrientes y con los valores de los coeficientes que se indican.

En el cuadro final aparece resumido el resultado de los cálculos para las diferentes secciones, obteniéndose los máximos por suma de los debidos a peso propio y carga permanente, de actuación constante, con los de máxima sobrecarga, acueducto pleno, y los de variación de temperatura correspondientes a la máxima elevación o descenso, según los casos.

Carlos FERNANDEZ CASADO
Ingeniero de C., C. y P.

BIBLIOGRAFIA

Además del libro de *Magnell*, ya citado, se estudia este tipo de un modo completo con cuadros y tablas de aplicación práctica en:

- Grabner & Wise*.—«Influence Lines for Arches With Tables». *Boletín* núm. 9 de la Universidad de Minnesota. Julio 1933.
Aprile & Incorvaja.—«Sul calcolo rapido degli archi incastrati». *Ingegnere*. Septiembre 1933.

Puente de 538 metros de longitud sobre el río Guadiana, en Lobón (Badajoz)

El mes de julio último fué abierto al tráfico público un nuevo puente, de cuyo proyecto soy autor, así como tuve la dirección técnica de los respectivos trabajos. Dicho puente es, en lo que a su considerable longitud se refiere, de los mayores de nuestra nación y, desde luego, el de mayor longitud de los cons-

truídos en los tiempos actuales en España. Por lo cual, y aunque sólo sea por esta particularidad, damos a conocer esta obra a los lectores de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS mediante el presente artículo.

Ya expusimos en el número del 1.º de abril de 1933 de esta REVISTA, en el que describíamos otro