FLEXIÓN Y COMPRESIÓN SIMPLE Y COMPUESTA EN SECCIONES RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO CON ARMADURA ASIMÉTRICA

POR J. MARTÍN PALANCA, ALUMNO DE LA ESCUELA DE CAMINOS

El procedimiento que propongo es especialmente aplicable cuando se trate de piezas rectangulares con armadura asimétrica, cuyo canto ha sido ya determinado por cualquier consideración. También pueden ser abordados otros casos, con ligeras variaciones en las fórmulas, deducidas siguiendo el mismo criterio general, y con las mismas tablas, pero pierde entonces la principal ventaja de su sencillez.

En una sección de hormigón armado con armadura asimétrica, los casos posibles a estudiar son: *a)*, flexión con armadura de tracción; *b)*, flexión con armadura de compresión; *c)*, compresión con armadura en la cara de menores compresiones; *d)*, compresión con armadura en la cara de compresiones máximas. Los casos *b)* y *c)* no se usan por desperdiciar demasiado la capacidad resistente del hierro sin beneficiar las condiciones de trabajo del hormigón. Nuestro estudio se limitará, pues, a los casos *a)* y *d)*.

Una sección de hormigón armado solicitada por una fuerza normal a ella o un momento de eje contenido en ella, trabaja siempre a flexión, compresión o tracción.

I) Fuerza dirigida hacia la parte de pieza que no se suprime:

a) Si la línea de acción de la fuerza corta al plano de la sección a distancia infinita, trabajará *siempre a flexión* (simple).

b) Si la línea de acción de la fuerza corta al plano de la sección a distancia finita en un punto exterior a ella, trabajará *siempre a flexión* (compuesta).

c) Si la línea de acción de la fuerza corta al plano de la sección en el interior del núcleo central de la sección homogénea, o sea en el tercio interior, trabajará *siempre a compresión.*

d) Si la línea de acción corta al plano de la sección en uno de los tercios exteriores, trabajará *a flexión* si no hay armadura, o con armadura del lado opuesto a la fuerza. Si armamos del lado de la fuerza, trabajará *a flexión* hasta una cierta cuantía metálica, y *a compresión*, con cuantías más fuertes. Para fines constructivos es, en general, más conveniente la primera solución. Pero, en algún caso (impermeabilidad, etcétera), puede resultar preferible la segunda.

II) Fuerza dirigida hacia la parte de pieza que se suprime:

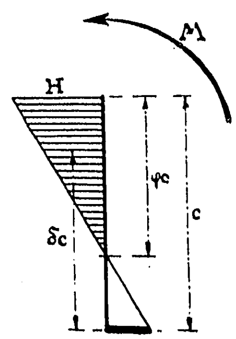
e) Si la línea de acción corta a distancia infinita, trabajará *a flexión* (simple).

f) Si la línea de acción corta a distancia finita, pero exterior a la sección, trabajará *siempre a flexión* (compuesta).

g) Si la línea de acción corta en el interior de la sección, trabajará *siempre a tracción.*

Salvo este último caso, en que la armadura asimétrica no permite resolver el problema, los demás pueden ser estudiados siguiendo un criterio uniforme. Se basa en tomar momentos de la fuerza y tensiones *desde la armadura* y proyectar fuerza y tensiones sobre la normal a la sección.

A) Flexión simple. — Tomando momentos:



$$M = \varphi c \cdot a \cdot \frac{H}{2} \cdot \delta c \qquad \varphi \delta = \frac{2M}{a c^2 H} \qquad \boxed{f(\varphi) = \frac{2M}{a c^2 H}}$$

$$\delta = 1 - \frac{\varphi}{3} = 0,5 + \sqrt{0,250 - \frac{1}{3} f(\varphi)}$$

Dados M, a, c, H se pueden conocer φ y δ.

Proyectando:

$$-\omega A + \varphi c \cdot a \cdot \frac{H}{2} = 0$$

y sustituyendo

$$\varphi c \cdot a \cdot \frac{H}{2}$$

por su valor obtenido de la primera ecuación $\frac{M}{\delta c}$

queda: $\boxed{\omega = \frac{M}{A \delta c}}$

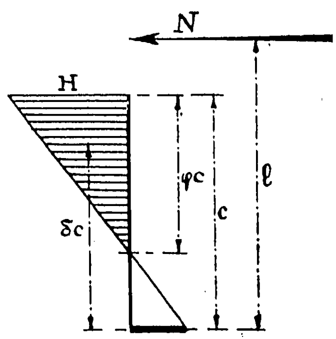
A, lo calculamos porque la semejanza de los triángulos de la figura nos da:

$$\frac{A : E_A}{H : E_H} = \frac{A}{rH} = \frac{1-\varphi}{\varphi} \qquad \boxed{A = rH \frac{1-\varphi}{\varphi}}$$

Si H es la carga de trabajo del hormigón:

$$\boxed{A = 648 \frac{1-\varphi}{\varphi}}$$

B) Flexión compuesta con fuerza en el sentido de la parte que no se suprime:



$$l N = \varphi c \cdot a \cdot \frac{H}{2} \cdot \delta c \qquad \boxed{f(\varphi) = \frac{2 l N}{a c^2 H}}$$

$$\delta = 0,5 + \sqrt{0,250 - \frac{1}{3} f(\varphi)}$$

$$-\omega A + \frac{l N}{\delta c} = N \qquad \boxed{\omega = \frac{N}{A}\left[\frac{l}{\delta c} - 1\right]}$$

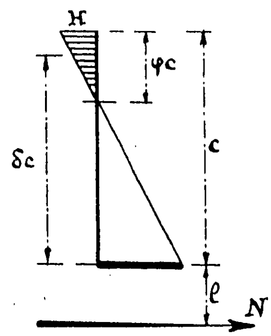
$$\boxed{A = rH \frac{1-\varphi}{\varphi}}$$

También aquí si H es la carga práctica:

$$\boxed{A = 648 \frac{1-\varphi}{\varphi}}$$

C) Flexión compuesta con fuerza en el sentido de la parte que se suprime. — El momento, y la comparación de los triángulos semejantes nos lleva al mismo resultado que en el caso anterior. Pero al proyectar la fuerza:

$$-\omega A + \frac{l N}{\delta c} = -N \qquad \boxed{\omega = \frac{N}{A}\left[\frac{l}{\delta c} + 1\right]}$$



Para la construcción de la tabla I que abarque los tres casos, tomaremos una primera columna $f(\varphi)$, limitándonos a aquellos valores que den $0 < \varphi < 1$. En la segunda estarán las correspondientes δ. En la tercera, $\frac{1-\varphi}{\varphi}$ que permitirá el cálculo de A en el caso general. En la cuarta, $648 \frac{1-\varphi}{\varphi}$ que utilizaremos cuando sea posible que el hormigón trabaje a su carga práctica.

D) Compresión:

$$l\,N = c \cdot a \cdot \frac{H + H\dfrac{\varphi}{\varphi - 1}}{2} \cdot \delta\, c \qquad \frac{2\,l\,N}{a\,c^2 H} = \frac{1 - 2\varphi}{1 - \varphi} \cdot \delta$$

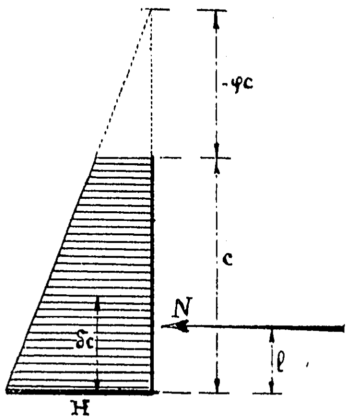
$$\boxed{f(\varphi) = \frac{2\,l\,N}{a\,c^2 H}}$$

$$\delta = \frac{1}{3}\,\frac{1 - 3\varphi}{1 - 2\varphi} = \frac{2\,f(\varphi)}{1 + 3\,f(\varphi)}$$

$$\omega A + \frac{l\,N}{\delta\, c} = N \qquad \boxed{\omega = \frac{N}{A}\left[1 - \frac{l}{\delta\, c}\right]} \qquad \boxed{A = r\,H}$$

y si H es la de trabajo: $\boxed{A = 648}$

La tabla II sólo necesita dos columnas: una, para $f(\varphi)$, y la segunda, para las δ, porque A no depende de φ.



E) Cuantía mínima para que una sección solicitada por fuerzas cuya línea de acción corta en uno de los tercios exteriores, con armadura del lado de la fuerza, trabaje a compresión. — Utilizando las fórmulas de compresión, y obligando a que $\varphi = 0$; $\delta = \frac{1}{3}$, resulta:

$$\omega = \frac{N}{r\,H}\left[1 - \frac{3\,l}{c}\right] \qquad \frac{2\,l\,N}{a\,c^2 H} = \frac{1}{3}$$

y si eliminamos H y establecemos la notación:

$$\frac{l}{c} = \gamma \qquad q = \frac{\omega}{a\,c}$$

queda $\boxed{q = \dfrac{1 - 3\gamma}{6\,r\,\gamma}}$ $\boxed{H = \dfrac{6\,\gamma\,N}{a\,c}}$

dando valores a r y γ entre los límites:

$$20 > r > 8 \qquad \frac{1}{3} > \gamma > 0$$

se llega a construir la tabla III, que nos permite hallar q.

F) **Manejo de las tablas.**

Tabla II. — En el caso de *compresión* estudiado, se halla $f(\varphi)$ y $\gamma = \frac{l}{c}$. Si $f(\varphi)$ está más alto que γ, se disminuye H hasta que quede enfrente o algo más bajo, si no queremos que trabaje sin armadura. Si $f(\varphi)$ está más bajo que γ, frente a $f(\varphi)$ está la solución.

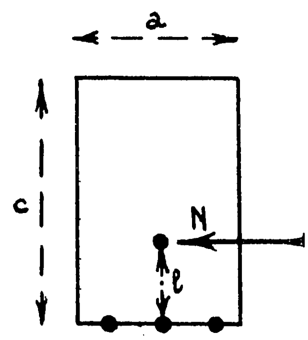
Tabla II.

$f(\varphi)$	δ
0,333	0,333
0,350	0,342
0,375	0,353
0,400	0,364
0,425	0,374
0,450	0,383
0,475	0,392
0,500	0,400
0,525	0,408
0,550	0,415
0,575	0,422
0,600	0,428
0,625	0,435
0,650	0,441
0,675	0,446
0,700	0,452
0,725	0,457
0,750	0,462
0,775	0,466
0,800	0,470
0,825	0,475
0,850	0,479
0,875	0,483
0,900	0,486
0,925	0,490
0,950	0,493
0,975	0,497
1,000	0,500

Disminuye H.

Más hierro.

Compresión.



$$f(\varphi) = \frac{2\,l\,N}{a\,c^2 H}$$

$$A = r\,H$$
$$A = 648$$

$$\omega = \frac{N}{A}\left[1 - \frac{l}{\delta\, c}\right]$$

Tabla III. — Dados γ y r, se halla la cuantía mínima que debemos poner para que se produzca el trabajo a compresión. Después, se comprueba la H, y, si fuese excesiva, se entrará en la tabla II con la $f(\varphi)$ obtenida para la H de trabajo, llegando naturalmente a una ω mayor que la de antes.

Tabla III.

Mínimas cuantías de compresión.					
γ	$r = 8$	10	12	15	20
0,075					0,086
0,100			0,097	0,078	0,058
0,125		0,083	0,070	0,056	0,042
0,150	0,076	0,061	0,051	0,041	0,031
0,175	0,056	0,045	0,038	0,030	0,023
0,200	0,042	0,033	0,027	0,022	0,017
0,225	0,030	0,024	0,020	0,016	0,012
0,250	0,021	0,016	0,014	0,011	0,008
0,275	0,013	0,011	0,008	0,007	0,005
0,300	0,007	0,006	0,005	0,004	0,003
0,325	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001
0,333	0	0	0	0	0

$$\gamma = \frac{l}{c} \qquad q = \frac{\omega}{a\,c} \qquad H = \frac{6\,\gamma\,N}{a\,c}$$

Tabla I. — En los casos de flexión estudiados, la manera de proceder es:

En **flexión simple,** se busca $f\,(\varphi)$ tomando para H la carga de trabajo. Enfrente se hallarán δ y A, y con ello se calculará ω. Si frente a $f\,(\varphi)$ no hubiera A en la cuarta columna, se rebajará H hasta que $r\,H\,\frac{1-\varphi}{\varphi}$ sea igual o menor que la carga admisible en el acero, siendo $\frac{1-\varphi}{\varphi}$ el valor de la tercera columna frente a la nueva $f\,(\varphi)$.

En **flexión compuesta con fuerza de compresión** se hallará $f\,(\varphi)$ y $\gamma = \frac{l}{c}$, que se busca en la columna de las δ. Si $f\,(\varphi)$ está más alto que γ, se disminuirá H hasta colocarlo enfrente, o un poco más bajo si no queremos que la sección trabaje sin hierro. Si $f\,(\varphi)$ está más bajo que γ, frente a $f\,(\varphi)$ está la solución de mínima armadura.

En **flexión compuesta con fuerza de tracción** se busca $f\,(\varphi)$, y en esa horizontal tendremos la solución, a menos que la A resultante sea excesiva, y entonces se rebajará H.

Tabla I.

Disminuye H.

Más hierro.

$f\,(\varphi)$	δ	$\frac{1-\varphi}{\varphi}$	$648\,\frac{1-\varphi}{\varphi}$
0,025	0,992	40,70	
0,050	0,983	18,60	
0,075	0,974	11,80	
0,100	0,965	8,62	
0,125	0,956	6,60	
0,150	0,947	5,30	
0,175	0,937	4,30	
0,200	0,928	3,63	
0,225	0,918	3,07	
0,250	0,908	2,62	
0,275	0,897	2,26	
0,300	0,887	1,95	
0,325	0,876	1,70	1 100
0,350	0,865	1,47	952
0,375	0,853	1,27	824
0,400	0,841	1,10	713
0,425	0,829	0,95	616
0,450	0,816	0,81	525
0,475	0,803	0,69	447
0,500	0,789	0,58	376
0,525	0,774	0,47	305
0,550	0,758	0,38	246
0,575	0,741	0,29	188
0,600	0,723	0,21	136
0,625	0,704	0,13	84
0,650	0,682	0,05	32
0,666	0,666	0	0

FLEXIÓN

Flexión simple.

$$f\,(\varphi) = \frac{2\,M}{a\,c^2\,H}$$

$$A = r\,H\,\frac{1-\varphi}{\varphi}$$

Si N es la carga práctica:

$$A = 648\,\frac{1-\varphi}{\varphi}$$

$$\omega = \frac{M}{A\,\delta\,c}$$

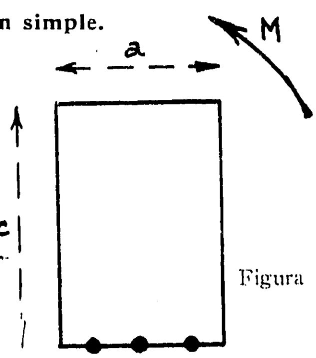
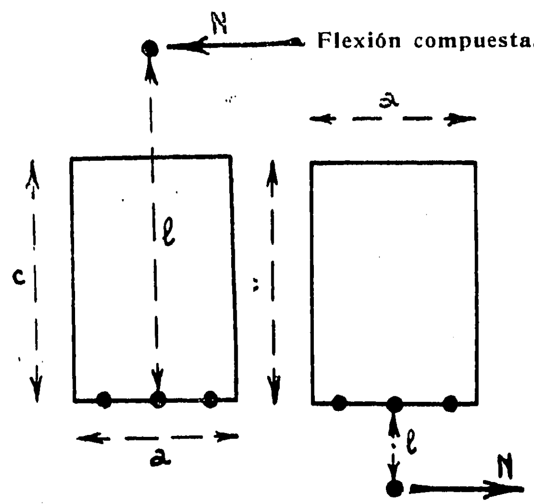


Figura 5.ª

Flexión compuesta.



$$f\,(\varphi) = \frac{2\,l\,N}{a\,c^2\,H}$$

$$A = r\,H\,\frac{1-\varphi}{\varphi}$$

Si N es la carga practica:

$$A = 648\,\frac{1-\varphi}{\varphi}$$

Con fuerza de compresión:

$$\omega = \frac{N}{A}\left[\frac{l}{\delta\,c} - 1\right]$$

Con fuerza de tracción:

$$\omega = \frac{N}{A}\left[\frac{l}{\delta\,c} + 1\right]$$