Año LXXXIX. - Núm. 2719 • Revista de Obras Públicas • 1 de novbre. de 1941

UNA POSIBLE EXPLICACIÓN DEL FENÓMENO DE LAS MAREAS

• TEORÍA ONDULATORIOCENTRÍFUGA •

POR RAMÓN IRIBARREN CAVANILLES, INGENIERO DE CAMINOS

La explicación actual del fenómeno de las mareas, basada en las teorías de Newton y Laplace resulta incompleta por no concordar con las observaciones hechas. El autor expone una nueva teoría que tendrá sin duda resonancia en el mundo científico, y cuyas primicias nos complace poder ofrecer a los lectores de nuestra Revista. Se expone ésta en el presente trabajo, que dividimos en tres artículos, en los que podrá apreciarse su concordancia con las observaciones directas de la realidad en los mares y océanos del mundo. El primer artículo inicia la exposición de la nueva teoría, después de presentar una reseña de las anteriores, que fueron abandonadas por no adaptarse a la realidad, como dejamos dicho.

I

Desde la más remota antigüedad, preocupa al hombre el conocimiento del maravilloso y espectacular fenómeno de las mareas.

Ya en las más lejanas edades, se tuvo noción de la preponderante intervención de la Luna en este fenómeno. Basta, en efecto, observar al mar y a la Luna para darse cuenta inmediata de la íntima relación que existe entre las fases de ésta y los movimientos de aquél.

Las mareas vivas corresponden sensiblemente con las lunas nuevas o llenas, y las muertas, con los cuartos menguantes o crecientes. Además, en la mayoría de las costas y en cada punto de ellas, la pleamar sigue al paso de la Luna, con un cierto retraso no demasiado variable.

No es necesario indicar que, hasta aquí, empleamos la sencilla terminología que corresponde a las remotas épocas, en las que se pudieron ya observar estas relaciones entre la Luna y las mareas.

Desde que se tuvo conocimiento de que las fases de la Luna no eran otra cosa que las posiciones relativas de la Luna y el Sol con respecto a la Tierra, la más sencilla lógica indicó ya que las acciones combinadas de los dos primeros eran las causas determinantes de las mareas en la Tierra.

Como consecuencia de ello, hace ya siglos que se tuvo noción de las causas del complicado fenómeno que nos ocupa; pero hasta la fecha, y a pesar del vehemente empeño de los ilustres y hasta geniales investigadores que intensamente se han ocupado de la cuestión, no se tiene seguridad de conocer satisfactoriamente la forma en que se originan y propagan los movimientos del mar, debidos a las indudables acciones de la Luna y el Sol.

Sin más pretensión que la de refrescar la memoria del lector, indudable conocedor de estos temas, vamos a pasar breve revista histórica de las diversas teorías que un progresivo y mejor conocimiento del fenómeno ha ido obligando a desechar.

El primero que realmente abordó el tema fué nada menos que Newton, quien trató de explicar el fenómeno como simple e inmediata aplicación de su genial teoría de la gravitación universal.

Como consecuencia de la acción del astro perturbador, ya sea la Luna o el Sol, pues los demás están demasiado lejos o son demasiado pequeños para ejercer acción alguna sensible, las superficies equipotenciales, esféricas o esferoidales de la Tierra, se transforman en elipsoides de revolución, cuyo eje mayor se dirige teóricamente hacia el citado astro perturbador; pero que, según Newton, debido a la inercia y a los rozamientos, se retrasa unas tres horas y media.

Esta concepción, denominada teoría estática de las mareas, por suponer un elipsoide virtualmente parado, dentro del cual gira la Tierra, y no tener para nada en cuenta las leyes dinámicas de la propagación de los movimientos de los líquidos, explicaba en cierto modo la marcha del fenómeno en nuestras costas, donde el establecimiento de puerto se aproxima a las tres horas y media.

Explicaba también las mareas vivas de sicigia o muertas de cuadratura, por sumarse en aquélla y restarse en ésta las deformaciones elipsoidales debidas a la Luna y al Sol, cuyas acciones en la relación respectiva aproximada de 2,35 a 1 está también de acuerdo sensiblemente con la observación de las mareas vivas y muertas.

No cabe duda, por lo tan brevemente expuesto, que en la teoría estática hay mucho de cierto; pero, como a continuación, breve y resumidamente expondremos, hay también en ella discrepancias tales con la realidad que obligaron a abandonarla.

En primer lugar, la máxima altura de la marea, suma de las deformaciones elipsoidales debidas al Sol y a la Luna, un día de sicigia, resulta ser, mediante un sencillo cálculo del que hacemos gracia al lector,

del orden de los 75 cm., siendo así que la mayoría de las mareas observadas son mucho mayores, llegando en algunos parajes a 14 m. y hasta 17 m. de amplitud.

Según dicha teoría, y moviéndose el Sol y la Luna, en sus carreras aparentes, en la zona tropical, a ella corresponderían las máximas mareas, que disminuirían a medida que subimos en latitudes boreales o australes, y en la realidad sucede todo lo contrario.

Respecto a los establecimientos de puerto, que en nuestras costas se aproximan a las tres horas y media antes citadas, los hay, en los demás mares y océanos, para todos los gustos.

Basta con lo brevemente expuesto para comprender que la teoría estática, en la que puede haber, repetimos, algo de cierto, no es capaz, por sí sola, de explicar el fenómeno, por lo que fué abandonada, dando paso a las teorías denominadas dinámicas, por tener en cuenta las leyes de las propagaciones dinámicas de los movimientos de los líquidos.

Fueron verdaderamente admirables los desarrollos matemáticos efectuados por Laplace para tratar de desentrañar el complejo fenómeno.

Comenzó, como Newton, haciendo la brutal simplificación de suponer que los mares cubrían toda la superficie de la Tierra, y aunque, para tratar de aproximarse, en cierto modo nada más, a la realidad, llegó a suponer canales a lo largo de los paralelos, de profundidades constantes en cada uno de ellos, aunque distintas de unos a otros, no llegó a resultado satisfactorio alguno.

Solamente indicaremos, para hacer resaltar a donde pueden llevar las teorías puras en temas de esta complejidad, aun desarrolladas por genios como los citados, que así como según la teoría estática la pleamar ecuatorial debe coincidir con la posición del astro perturbador o con su opuesta, en la teoría dinámica resulta que a estas posiciones corresponden, precisamente, las bajamares.

También debemos hacer notar la brutal e irreal simplificación que supone la no existencia de continentes, que, principalmente el americano, cierran casi de Norte a Sur los supuestos canales en los que se admite la libre propagación de la marea.

Hatt, que muy razonada e inteligentemente ha estudiado el fenómeno de las mareas, refiriéndose a los admirables desarrollos matemáticos de Laplace, textualmente dice: "El porqué de las cosas queda oculto bajo un cúmulo de complicadas e insolubles ecuaciones diferenciales".

Probablemente, comprendiéndolo así el propio Laplace y debido además a la enorme dificultad de introducir las condiciones límites impuestas por la variable profundidad de los mares y compleja configuración de sus bordes, abandonó los métodos analíticos, dando origen a los estudios prácticos, comúnmente denominados sintéticos, teniendo la genial intuición de establecer sus dos principios: el de la periodicidad de causas y efectos y el de la simple superposición de los pequeños movimientos, que debidamente desarrollados, llegando en algunos casos al análisis armónico, resuelven, como consecuencia de la observación del fenómeno en el lugar que nos interesa y durante un cierto tiempo, el problema práctico de predecir las horas y alturas de mareas en el futuro, llegando incluso a dibujar las curvas totales de mareas futuras, como lo hace, con sólo dar vueltas a su manivela, el maravilloso aparato predictor de mareas de Lord Kelvin.

El problema práctico está, pues, resuelto; pero seguimos sin saber cómo se producen y se propagan los movimientos de mares y océanos, provocados por las indudables acciones de la Luna y el Sol. Los mares y océanos siguen guardando aún celosamente su impenetrable secreto, que vamos a tratar de rasgar.

Whewell, tratando de nuevo de desentrañarlo, estableció su síntesis, según la cual la cuna u origen de las mareas estaba en los grandes océanos australes, únicos en los que, según él, por su tamaño y casi ausencia de continentes, podía producirse, dando origen en ellos a ondas forzadas, que siguen a los astros perturbadores y que, a su vez, originan ondas libres, que, ya independizadas de la acción del astro, se propagan, de Sur a Norte, según las leyes de la hidráulica, en los tres grandes canales constituídos por el Atlántico, el Pacífico y el Indico, pasando de ellos a sus mares contiguos.

Fundamentaba su teoría, principalmente, en la propagación de la marea en las costas africanas y americanas del Atlántico Sur, en cuyas ambas costas la propagación se verifica de Sur a Norte y con una celeridad, de onda libre, que se aproxima a la de la fórmula de Lagrange, $C = \sqrt{gH}$, siendo H la profundidad del mar.

Dibujó, uniendo los puntos de la misma hora de marca, hora referida al meridiano O, de Greenwich, las líneas cotidales de igual hora de marca o, si se prefiere, líneas de situación de la cresta de la onda de marea correspondiente a su hora, tanto en el Atlántico Sur como en otros mares en los que disponía de datos.

También se apoyaba en que la edad de la marea correspondiente a nuestras costas es de unas treinta y seis horas, tiempo que, según él, correspondía con el necesario para la propagación, desde la cuna de la marea, situada en los océanos australes y en la que la edad sería nula, hasta nuestros mares.

Posteriormente se ha comprobado que el único océano en el que los cotidales avanzan en la misma dirección en ambas costas es el Atlántico Sur, pues tanto en el Atlántico Norte como en el Pacífico Norte e Indico, avanzan en direcciones contrarias en ambas costas limítrofes. Si en una suben de Sur a Norte, en la de enfrente bajan de Norte a Sur, por lo que no es posible unir sus puntos de igual hora, en ambas costas, mediante cotidales que no se crucen, como correspondería a una onda progresiva libre análoga a la supuesta en el Atlántico Sur.

Todo esto, unido a que no se ha encontrado ningún punto de edad nula en los océanos australes, cuna

de la marea, ha obligado a que la seductora teoría de Whewell haya seguido la suerte de las de sus ilustres antecesores, teniendo que ser abandonada.

Así llegamos a la última teoría hoy admitida, aunque muchos, entre los que modestamente nos encontramos, duden de ella, y que pudiéramos denominar teoría anfidrómica o de Harris.

Indudablemente, tiene su origen inicial esta teoría en el famoso punto anfidrómico o punto de marea nula, alrededor del cual, aparentemente, giran las cotidales, cual aspas de un molino, punto anfidrómico predicho ya por Whewell y situado en el mar del Norte entre las costas SE. de Inglaterra, en las que la onda de marea baja de Norte a Sur y las de los Países Bajos, de enfrente, en las que la onda sube de Sur a Norte.

Al tratar de unir, mediante cotidales que vayan de costa a costa, los puntos de igual hora de marea, se ofrece inmediatamente la idea de las cotidales giratorias alrededor de un punto, que forzosamente ha de ser de marea nula, y que se denomina anfidrómico.

Comprobada, en cierto modo, la existencia del punto de marea nula, de referencia, primero mediante la sonda, aunque posteriormente otras observaciones efectuadas con mareógrafo sumergido Fave parecen indicar la existencia de mareas de 0,60 m., se ha generalizado la existencia de los puntos anfidrómicos a todos aquellos mares u océanos en cuyas costas las mareas avanzan en direcciones contrarias.

Puede justificarse la existencia de los puntos anfidrómicos mediante el cruce de dos ondas estacionarias de "Clapotis" o chapoteo, similares a las denominadas "Seiches" de los grandes lagos suizos, de direcciones más o menos normales y distintas fases. Harris, mediante amplias series de ensayos verificados en los magníficos laboratorios espléndidamente dotados de que dispone, ha comprobado la posibilidad de ondas estacionarias en recipientes de las formas más variadas e irregulares, aún en el caso de que les falten parte de sus bordes, como sucede en muchas de las zonas de mares u océanos en que divide a la superficie líquida del globo.

Llega a establecerse así, como consecuencia de la generalización de esta teoría, la carta de cotidales anfidrómicas que reproducimos más adelante, y aunque, repetimos, todo es posible, basta observarlas con algún detenimiento para darse cuenta de los discontinuos movimientos de las cotidales giratorias, si no es que, en algunos casos, pasan, en breves instantes, de un punto anfidrómico a otro distante de él varios miles de kilómetros.

También es mucha casualidad que sin tener en cuenta acciones que, como la de la fuerza centrífuga compuesta, varían de sentido de un hemisferio al otro, todos los sistemas anfidrómicos del hemisferio Norte giran en sentido inverso, y en el directo, todos los del Sur.

Por todo ello y por haberse encontrado contradicciones en el continente Antártico, contradicciones que no hemos podido concretar por no habernos sido posible en las difíciles circunstancias actuales proporcionarnos la documentación necesaria, dudamos, con Darvin, de la realidad de esta moderna teoría o estimamos, con Joly, "que puede constituir un serio avance hacia una teoría definitiva, que está aún por crear".

Modesta, pero entusiastamente, vamos a tratar de aportar nuestro grano de arena, por si fuera de alguna utilidad para la creación de esa, tan trabajosamente buscada, teoría definitiva.

Para ello vamos a extrapolar a la gran onda de marea los conocimientos que hemos adquirido con la paciente observación y perseverante estudio del oleaje, por lo que recomendamos al lector interesado la lectura de los folletos *Una fórmula para el cálculo de los diques de escollera* y *Cálculo de diques verticales*, y muy especialmente el artículo denominado "Obras de abrigo de los puertos", publicado en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de 1.º de enero último.

Las notaciones que vamos a emplear son las mismas de este artículo.

Estimamos que las leyes que rigen la propagación de la gran onda de marea son las mismas que regulan el avance y propagación del oleaje, expuestas en el repetido artículo, con la única gran diferencia de que sobre aquélla, debido a sus grandes dimensiones y a las de los océanos en que se propaga, ejerce acción preponderante la fuerza centrífuga compuesta, o aceleración de Coriolis, a la que no son sensibles, prácticamente, los relativamente muy pequeños oleajes. En éstos, aun cuando se propaguen en mares u océanos que permitiesen su gran anchura, en el sentido de las crestas de las olas, como es lógico y se comprueba por la observación efectuada principalmente mediante fotografías aéreas y como fácilmente se comprende, debido a la relativamente pequeña longitud de onda, aun en los mayores temporales, las ondas o, si se prefiere sus crestas, no son continuas desde el uno al otro confín del mar, sino que quedan divididas en tramos irregulares, relativamente poco anchos, por lo que los efectos de la fuerza centrífuga compuesta son insignificantes para esos reducidos tramos de ondas.

La enorme longitud, que a continuación determinaremos, de la onda de marea produce su continuidad, por ancho que sea el océano en que se propague, lo que permite, a su vez, los importantes efectos de dicha fuerza centrífuga compuesta.

Comencemos por determinar, aplicando las normas deducidas para las olas en el citado artículo de la REVISTA, las características correspondientes a la enorme onda supuesta de marea, con la finalidad primordial de comprobar si sus resultados se aproximan a la realidad.

Para simplificar y concretar debidamente las cosas, en todo lo que sigue nos referiremos a un día en el que el principal astro perturbador, o sea la Luna, gira, en su movimiento aparente, alrededor de la Tierra en su período medio aproximado de veinticuatro horas cincuenta minutos, o sea en veinticuatro horas lunares medias y que el Sol sigue a la Luna en este movimiento aparente ecuatorial o, si se prefiere, sale del meridiano origen, para el cual tomamos el de Greenwich, con veinticinco minutos de retraso, y lle-

ga, después de la revolución completa casi en fase con la Luna, con veinticinco minutos de adelanto respecto a aquélla, con lo que sus efectos atractivos sobre los océanos no diferirán mucho del movimiento supuesto síncrono con la Luna y siempre en fase con ésta.

Se trata, pues, de un día, puramente hipotético, de sicigia equinoccional.

No es necesario insistir en que tanto en esto como en los cálculos que han de seguir, que los hemos efectuado con la regla de cálculo, estimamos, de acuerdo con Ribera, que "de nada sirve aproximar los cálculos hasta las milésimas si las hipótesis que se fundamentan no lo están en las décimas".

El semiperíodo así obtenido del movimiento originado por el paso de la Luna y de la antiluna, vale:

$$T = \frac{24\text{ h. }50\text{ m.}}{4} = 22{,}350\text{ s.}$$

Dadas las enormes dimensiones del cuadrilátero de avance, cuya longitud y anchura son del orden de la longitud $2L$ de la onda de marea, que vamos a determinar, podemos admitir, sin grave error, que su profundidad media es $H = 4\,000$ m., que concuerda, con suficiente aproximación, con los valores medios de la mayoría de los diversos mares y océanos.

La celeridad de propagación de la onda sabemos que es:

$$C = \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L}{K}},$$

en la que

$$K = \cot h \frac{\pi H}{L};$$

luego

$$C = \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot L \cdot \operatorname{tg} h \frac{\pi H}{L}}$$

que por ser, como ahora veremos, H muy pequeño en relación a L, podemos sustituir $\operatorname{tg} h \frac{\pi H}{L}$ por $\frac{\pi H}{L}$ con lo que obtenemos $C = \sqrt{gH}$, o sea la fórmula de Lagrange, lo que nos indica que a la onda de marea, que por cuya periodicidad y demás circunstancias de su producción y propagación tiene las características de una onda de oscilación, le es aplicable la fórmula correspondiente a las ondas de traslación, cuya altura, $2h$, es, como en nuestro caso, pequeña con relación a la profundidad, H, del líquido en que se propaga.

Es, en efecto, la onda de marea una onda de oscilación, límite con las de traslación, pues la característica que estimamos mejor puede diferenciar a aquéllas de éstas, o sea que, en las primeras, las velocidades disminuyen a medida que profundizamos, mientras que en las segundas son prácticamente constantes de la superficie hasta el fondo; en este caso de la onda de oscilación de marea, tenemos que el semirrecorrido de la molécula del fondo vale:

$$r_f = \frac{h}{sh \frac{\pi H}{L}},$$

en la que, por las razones antes expuestas, podemos sustituir

$$sh \frac{\pi H}{L} \text{ por } \operatorname{tg} h \frac{\pi H}{L},$$

con lo que

$$r_f = \frac{h}{\operatorname{tg} h \frac{\pi H}{L}} = hK,$$

o sea igual a r_s semieje horizontal de la elipse orbitaria superficial.

Debido a esto, la máxima velocidad orbitaria superficial $\frac{\pi r_s}{T}$ resulta igual a la del fondo $\frac{\pi r_f}{T}$, y en los demás instantes, las velocidades serán también prácticamente iguales, de la superficie al fondo, debido, además, a la pequeña altura, $2h$, de la elipse orbitaria superficial, en relación a su longitud, $2hK$.

Se trata, pues, de una onda de oscilación, cuyas características se confunden con las de traslación, debido a la pequeñez de la profundidad, H, en que se propaga, en relación con su semilongitud, L, de onda, y no por tratarse de atracciones astrales que, según algunos, deben de afectar, solamente por el mero hecho de ser astrales, a las mayores profundidades de los océanos.

Este supuesto no es cierto, pues si la Luna girase, en su movimiento aparente alrededor de la Tierra, o, mejor dicho, si ésta girase más rápidamente, la acción astral de la Luna no produciría más que una onda corta y, en consecuencia, prácticamente superficial en los océanos, cuyos fondos permanecerían tranquilos a su paso.

La celeridad de propagación de la onda supuesta de marea será, en consecuencia,

$$C = \sqrt{gH} = \sqrt{9{,}81 \times 4.000} = 198\text{ m./s.} = 714\text{ km./h.}$$

La hipotética semilongitud L_0, que en mar muy profundo, cuya profundidad, también hipotética, fuese igual o mayor que la semilongitud, L_0, de la onda, la podemos determinar mediante la expresión

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{g} \cdot L_0};$$

de donde

$$L_0 = \frac{g}{\pi} \cdot T^2 = \frac{9{,}81}{3{,}14} \cdot 22350^2 = 15{,}6 \times 10^8\text{ m.},$$

o sea nada menos que aproximadamente igual a 40 veces la vuelta a la Tierra.

Pasando de las hipótesis a las realidades, determinemos la semilongitud real de la onda $L = CT = 198 \times 22\,350 = 44{,}3 \times 10^5$ m. $= 4\,430$ km. $\simeq 4\,500$ km., que corresponde muy aceptablemente, dentro de la aproximación en que podemos movernos, con la mitad de la distancia observada entre las cotidales, cuya diferencia es de doce horas lunares, principalmente en las zonas no muy alejadas de las costas de apoyo.

Hay que hacer resaltar ahora, en confirmación de lo anteriormente expuesto, la insignificante pequeñez

de las profundidades abismales del orden de $H = 4$ kilómetros en relación con la semilongitud de la onda de marea, $L = 4430$ km., por lo que, aun en los océanos más profundos, ésta se propaga en profundidades no ya reducidas, sino reducidísimas.

Determinamos así, aproximadamente, el valor de:

$$K = \cot h \frac{\pi H}{L} = \frac{L_0}{L} = \frac{15{,}6 \times 10^8}{44{,}3 \times 10^5} = 352,$$

lo que nos comprueba que, como habíamos indicado ya, el semieje vertical de la elipse orbitaria superficial es muy pequeño en relación con el horizontal, por lo que el movimiento puede considerarse como horizontal para ciertos efectos.

Visto todo esto, que confirma nuestra creencia de que la onda de marea es una onda análoga, aunque de proporciones enormemente mayores a la de oleaje, pasemos a ocuparnos de la interesantísima acción de la fuerza centrífuga compuesta, cuya aceleración, como es sabido, vale $j_c = 2\,\omega\,v\,\operatorname{sen}\lambda$, en la que $\omega = 0{,}000073$ radianes por segundo es la velocidad angular de la rotación de la Tierra; v es la velocidad del móvil de la superficie terrestre, y λ es la latitud del punto considerado.

Esta aceleración se dirige hacia la derecha del movimiento, en el hemisferio Norte, y hacia la izquierda del mismo, en el Sur.

Supongamos que las aguas del océano están agitadas por el paso de la onda cuyas características aproximadas acabamos de determinar y que serán aplicables, como vamos a ver y salvo alguna excepción que más adelante estudiaremos, incluso a las zonas costeras, cuyas plataformas continentales no suelen exceder generalmente, pues luego ya nos ocuparemos de algunos casos particulares, de los 100 km. de anchura y cuya profundidad en su borde exterior suele ser del orden de los 200 metros.

A partir de este borde y en una anchura que tampoco suele rebasar generalmente los 100 km., las profundidades caen rápidamente de los 200 metros hasta las grandes profundidades abismales del orden de los 4 km. antes indicados.

¿Qué pueden suponer estos 200 km. totales de plataforma continental y su borde inclinado, en relación con los 4 500 km. que hemos determinado para la semilongitud de la onda de marea?

Es indudable que la profundidad media del semicuadrilátero de avance costero será también del orden de los 4 km. fijados para el océano, pues los 200 km. de profundidades reducidas poco o nada suponen en relación con los 4 300 km. de anchura de dicho semicuadrilátero correspondiente a la onda oceánica, aunque ésta llegue a tocar y se propague a lo largo de la costa.

Como consecuencia, la longitud y celeridad de la onda serán aproximadamente las mismas, salvo alguna excepción que luego estudiaremos, en la costa que en alta mar.

Visto esto, sabemos que, según la teoría trocoidal, aplicable en general con suficiente aproximación para los movimientos ondulatorios del mar y muy especialmente para esta onda de marea tan lejana de su rotura, el movimiento vertical o, si se prefiere, la proyección sobre un plano vertical, orientado según el avance de la onda, del movimiento de la molécula líquida agitada por el paso de la onda de marea, es una elipse cuyo semieje vertical va disminuyendo desde h, o semialtura de la onda en la superficie, a cero en el fondo, en el que la órbita es una recta.

Al paso de la cresta de la onda, la máxima velocidad molecular, dirigida en el sentido del avance de la onda, vale:

$$v = \frac{\pi h K}{T},$$

luego la aceleración de Coriolis será:

$$j_c = 2\,\omega\,\frac{\pi h K}{T}\operatorname{sen}\lambda$$

y estará dirigida hacia la derecha del movimiento molecular, en el hemisferio Norte, y hacia la izquierda, en el Sur.

Para continuar este estudio, vamos a suponer dos casos límites. En el primero, el mar u océano en el que la onda se propaga longitudinalmente es de poca anchura, en relación a la semilongitud de onda, que, como indicamos al tratar de los planos de oleaje y aquí nos confirmamos en ello, es el tipo de comparación, especie de unidad de escala en planta, de todas las características de la onda, excepto de su altura.

Obsérvese, en efecto, que cuando una onda encuentra un obstáculo aislado, sea éste un escollo o dique aislado de pequeñas dimensiones, en relación con su semilongitud, simplemente se abre y lo contornea, rehaciéndose inmediatamente después de él, sin sufrir modificación ni reflexión sensible. Solamente comienza a sufrir modificaciones sensibles de forma en planta y a hacerse patente la reflexión, cuando la anchura del obstáculo es comparable con la semilongitud de la onda.

Análogamente, si en una costa o dique, en el que se refleja la onda casi normalmente, existe una brecha de pequeñas dimensiones en relación con la citada semilongitud, la reflexión se efectúa como si tal brecha no existiese, y solamente empieza a interrumpirse cuando, aumentando la brecha, llega a tener dimensiones comparables con la repetida semilongitud.

Ya vimos, en los planos de oleaje, que, incluso en profundidad, solamente empieza a deformarse la onda y sus órbitas moleculares cuando las profundidades son menores que dicha semilongitud.

Todo esto, que la detenida observación comprueba y que precisaremos más cuando dispongamos de modelos reducidos, indica que las dimensiones de un mar u océano serán grandes o chicas para la propagación de una onda, no en absoluto, sino en relación con la dimensión, en planta, de la misma, y así como hemos visto que incluso las profundidades abismales de los océanos son, no ya pequeñas, sino pequeñísimas para la propagación de la onda de marea, no cuesta mucho trabajo comprender que las dimensiones

de los mayores océanos terrestres, que solamente pueden albergar como máximo una o dos ondas de marea, son también pequeños para la propagación de ésta.

Comencemos, pues, por estudiar el caso de la onda, propagándose en un mar u océano pequeño para ella, principalmente en el sentido de su anchura, o sea el normal a la dirección de su propagación.

Es, en cierto modo, el caso extremo de la onda propagándose longitudinalmente en un canal cuya reducida anchura impone a las moléculas líquidas movimientos sensiblemente paralelos a sus márgenes.

Terminada esta disquisición, continuemos con el estudio de la acción de la fuerza centrífuga compuesta en este primer caso límite. Luego estudiaremos el opuesto, o sea el de la propagación de un océano indefinido.

La componente horizontal de la velocidad orbitaria molecular es la v de la expresión de la aceleración compuesta, que adquiere su valor máximo al paso de la cresta de la ola y en su superficie, correspondiente, además, al instante y situación que nos definen la semialtura, h, de la onda, que es el instante que realmente nos interesa.

En otros instantes, o sea para otro punto más bajo de la onda, que lógicamente corresponde a una situación también más baja de la molécula considerada, o para mayores profundidades, también sería fácil determinar la acción de la fuerza centrífuga compuesta, pues conocemos la componente horizontal de su velocidad orbitaria, pero no nos interesa hacerlo y alargaría inútilmente este estudio.

Solamente debemos de hacer resaltar que al paso de la onda las moléculas líquidas actúan, por decirlo así, por relevos, transmitiéndose de cada una de ellas a la siguiente su velocidad y dirección de movimiento.

Si, en su consecuencia, seguimos idealmente a la

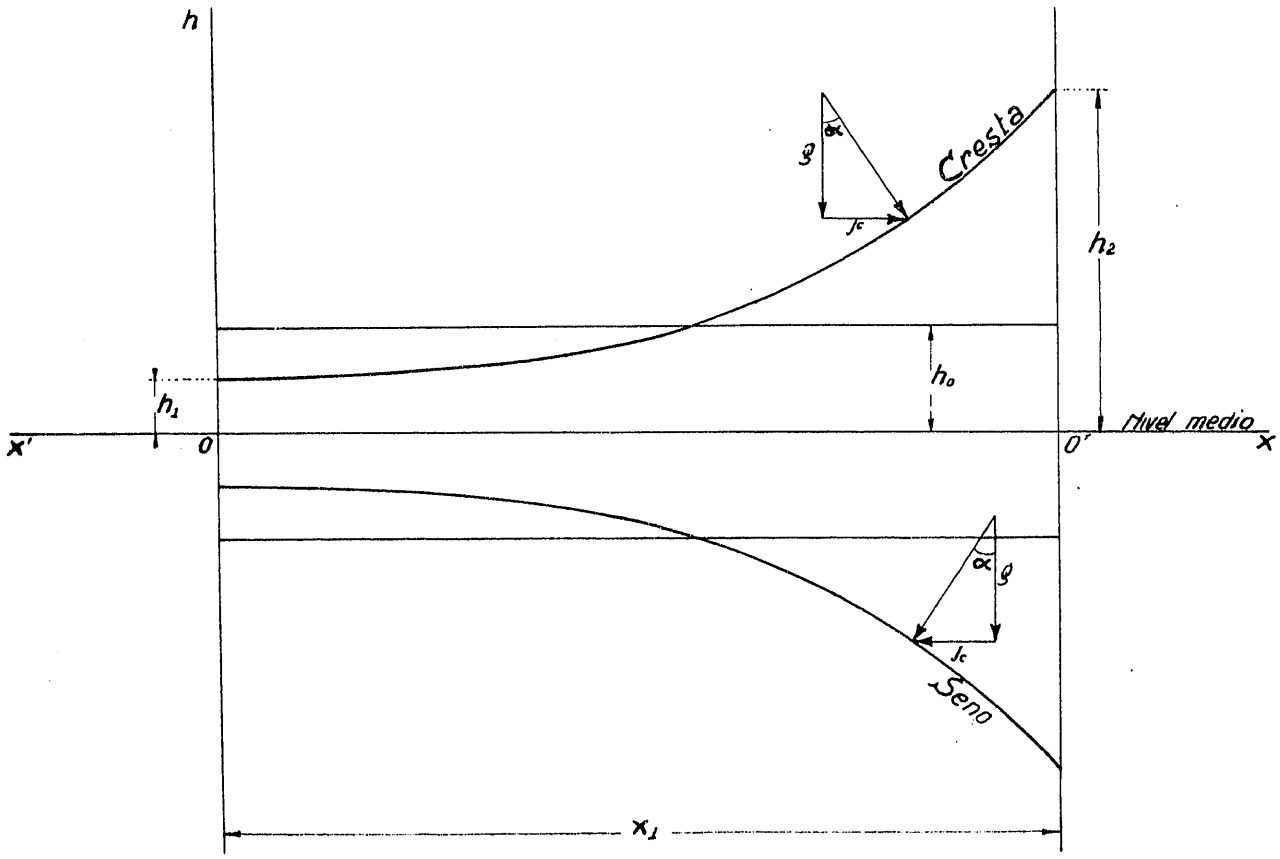


Fig. 1. — Curvas exponenciales de cresta y seno.

cresta en su avance, según la dirección de la propagación de la onda, encontraremos constantemente a nuestro paso moléculas animadas de la velocidad horizontal,

$$v = \frac{\pi h K}{T},$$

antes indicada.

Podemos ahora determinar la acción de la fuerza centrífuga compuesta sobre cada una de ellas y que se transmitirá, sucesivamente, de unas a otras al paso de la cresta de la onda.

Análogamente sucederá, pero en sentido contrario al avance de la onda, al paso del seno de la misma, y también podríamos determinar las situaciones intermedias que corresponden a una fase cualquiera del movimiento orbitario, pero no es necesario hacerlo para el fin que nos proponemos.

Volviendo al paso de la cresta, tenemos que la aceleración compuesta vale:

$$j_c = 2\,\omega\,\frac{\pi\,h\,K}{T}\,\operatorname{sen}\lambda,$$

y como hemos supuesto que la proyección horizontal del movimiento orbitario, impuesta por las condiciones límites del estrecho canal, es una recta dirigida según el sentido de propagación de la onda, no existe aceleración transversal alguna, originada por el movimiento molecular, que pueda compensar a la aceleración centrífuga compuesta.

En estas condiciones, es indudable que esta fuerza centrífuga compuesta, no compensada horizontalmente, ha de originar la desviación de la vertical, indicada en la figura 1, cuya parte superior al eje de ordenadas representa un corte vertical de la onda, según la cresta de la misma, en la que las ordenadas, h, representan las semialturas de la onda correspondientes a cada abscisa, x.

Si la anchura del canal o mar fuese grande, en realidad, aunque pequeña en relación a la gran semilongitud de la onda, el eje de abscisas representaría la superficie curva de la Tierra, rectificada para simplificar, tanto esta primera como otras varias figuras del presente estudio.

Para obtener la desviación de la vertical, o sea la pendiente, i, en un punto cualquiera, tenemos:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = i = \operatorname{tg}\alpha = \frac{j_c}{g} = 2\,\omega\,\frac{\pi\,h\,K}{g\,T}\,\operatorname{sen}\lambda =$$

$$= \frac{2\,\omega\,\pi\,K\,\operatorname{sen}\lambda}{g\,T}\,h = A\,.\,h;$$

si suponemos a λ constante, o igual a su valor medio, y hacemos

$$\frac{2\,\omega\,\pi\,K\,\operatorname{sen}\lambda}{g\,T} = A.$$

La integral general de la ecuación diferencial

$$\frac{d\,h}{d\,x} - A\,h = 0 \quad \text{es} \quad h = B\,e^{A\,x},$$

en la que podemos determinar la constante B con la condición de que para $x = 0$, sea $h = h_1$, de donde deducimos $B = h_1$, o sea la ecuación de la cresta $h = h_1\,e^{A\,x}$.

Obsérvese que, en relación a la continuidad, la forma de la cresta de la onda puede ser la exponencial determinada u otra curva cualquiera, pues dicha condición de continuidad puede cumplirse en cualquier rebanada longitudinal de la onda de anchura, dx, sea cualquiera su altura, h, correspondiente.

Al paso del seno de la onda, la velocidad molecular y, como consecuencia, la fuerza centrífuga compuesta se invierten de sentido, lo que da por resultado la curva simétrica a la anterior con respecto al eje de abscisas, representada en la parte inferior de la figura 1, y de igual manera podríamos determinar la forma exponencial de la superficie líquida, correspondiente a cualquier fase del movimiento, y que oscilará desde la recta horizontal en el nivel medio hasta cada una de las exponenciales determinadas para el seno y la cresta de la onda.

Podemos también determinar la altura, h_0, de la onda, de cresta horizontal, de igual longitud, $2\,L$, y cuya energía fuese equivalente a la de la onda exponencial que acabamos de deducir, pues la energía de la citada rebanada de anchura, dx, comprendida en la longitud, $2\,L$, de la onda vale:

$$d\,E = \rho\,g\,L\,h^2\,d\,x,$$

cuya integral, entre h_1 y h_2, distantes la anchura x_1 (figura 1), es:

$$E = \rho\,g\,L\int_0^{x_1} h^2\,d\,x = \rho\,g\,L\int_0^{x_1} h_1^2\,e^{2\,A\,x}\,d\,x =$$

$$= \rho\,g\,L\,h_1^2\,\frac{e^{2\,A\,x_1} - 1}{2\,A},$$

que, igualada a la energía de la onda de altura constante, h_0, nos da:

$$E = \rho\,g\,L\,h_0^2\,x_1 = \rho\,g\,L\,h_1^2\,\frac{e^{2\,A\,x_1} - 1}{2\,A},$$

o sea:

$$h_0^2\,x_1 = h_1^2\,\frac{e^{2\,A\,x_1} - 1}{2\,A};$$

de donde la altura buscada $h_0 = h_1\,\sqrt{\dfrac{e^{2\,A\,x_1} - 1}{2\,A\,x_1}}$,

que pudiéramos denominar altura eficaz de la onda.

Aunque con esto nos basta para las necesidades prácticas, dentro del grado de aproximación en que nos movemos, y muy especialmente para aquellos casos en que la cresta de la onda no se separa mucho de la dirección de los paralelos, podemos estudiar el caso límite opuesto, o sea aquel en que la cresta tiene la dirección del meridiano.

En este caso, si la abscisa, x, la medimos según dicha línea de cresta a partir del Ecuador y siendo R el radio de la Tierra, la latitud vendría expresada por

$$\lambda = \frac{x}{R},$$

con lo que tenemos:

$$\frac{d\,h}{d\,x} = \frac{2\,\omega\,\pi\,K}{g\,T}\,h\,\operatorname{sen}\frac{x}{R} = A'\,h\,\operatorname{sen}\frac{x}{R}$$

haciendo

$$A' = \frac{2\,\omega\,\pi\,K}{g\,T}.$$

La integral general es:

$$h = B\,e^{-A'\,R\cos\frac{x}{R}},$$

que para $x = 0$ nos da:

$$h = h_1 = B\,.\,e^{-A'\,R},$$

de donde la constante será:

$$B = h_1\,e^{A'\,R};$$

luego la ecuación de la cresta de la onda sería:

$$h = h_1\,e^{A'\,R\,(1\,-\,\cos\,x/R)},$$

que, en los casos corrientes, no difiere mucho de la obtenida anteriormente, máxime si los tramos en que dividimos la cresta, suponiendo λ constante en cada uno de ellos, no son demasiado grandes y que, por su sencillez y suficiente grado de aproximación, adoptamos para la mayoría de los casos prácticos.