

JUNTA DE INVESTIGACIONES TÉCNICAS DEL MINISTERIO DE OBRAS PÚBLICAS

# ESTUDIOS SOBRE PENETRACIÓN DE LA LÁMINA VERTIENTE EN UNA MASA LÍQUIDA

Por ENRIQUE BECERRIL y MARIANO F. BOLLO, Ingenieros de Caminos.

*Continuamos el interesante trabajo, cuya primera parte se publicó en el número de 1.º de junio último, que constituye un extracto del informe presentado por los autores a la Junta de Investigaciones Técnicas. En esta segunda y última parte, se da cuenta de los resultados analíticos del experimento.*

## SEGUNDA PARTE

### IV

#### Interpretación física de los resultados del estudio experimental.

En el fondo de la cuestión considerada, se debate, como habrá podido verse por lo expuesto en la primera parte, el concepto de la distancia de mezcla, y se comprende que hasta la fecha ninguna hipótesis haya podido tener una confirmación suficiente en el orden analítico, ya que, dada la complejidad del fenómeno, es absolutamente necesario introducir una serie de simplificaciones para abordar su cálculo, como puede comprobarse examinando cualquiera de los trabajos de los investigadores antes citados.

Por estas razones, hemos procurado buscar la interpretación del fenómeno desde un punto de vista totalmente opuesto. En vez de deducir analíticamente las leyes de variación de la velocidad media en cada sección, partiendo de hipótesis más o menos verosímiles, para luego tratar de comprobar por la experimentación las fórmulas así obtenidas, estimamos preferible comenzar por determinar experimentalmente los perfiles de velocidad, para deducir luego por interpolación una ley analítica que pueda expresarlos con suficiente aproximación; y una vez establecida esta ley, estudiar todas las consecuencias que de ella pueden deducirse, como, por ejemplo, la forma del contorno, la ley de incorporación de caudales, la de disipación de la energía, etc.

Ciertamente, los resultados así obtenidos presenta-

rán un carácter empírico, introducido desde el momento en que sustituimos los puntos del perfil de velocidades experimentalmente hallados por una curva interpolatriz cuya expresión analítica no se deduce directamente por el cálculo.

Pero esto no es más ni menos riguroso que el método empleado por Tollmien y Schlichting, que basan sus desarrollos analíticos en postulados que sólo se cumplen con cierta aproximación, por lo cual es evidente que también en estos desarrollos se introducen principios de carácter empírico.

Preferible, en general, será un método basado en buscar las leyes que rigen el fenómeno, partiendo de resultados confirmados por la experiencia, a otro fundado en teorías simplificadas y no deducidas rigurosamente de los principios de la Física de los Flúidos.

Para el estudio del problema con toda generalidad, es indispensable también prescindir de la tercera de las condiciones restrictivas de Tollmien ( $b_0 = 0$ ), impuesta con objeto de poder admitir la afinidad de los perfiles de velocidad en toda la extensión del plano.

En efecto, se comprende fácilmente que en el momento de salir por la tobera el chorro presenta una distribución de velocidades prácticamente irrotacional y uniforme. El tránsito de esta distribución a la campaniforme no puede efectuarse bruscamente, sino que tiene lugar de un modo gradual, al mismo tiempo que van incorporándose paulatinamente los caudales laterales arrastrados por el chorro penetrante. (Véase el esquema adjunto, fig. 1.ª).

El proceso del fenómeno en esta zona es asimilable en todo al desarrollo de una capa límite, tal como ha sido estudiado por Prandtl y también por Toll-

mien, y la experiencia confirma plenamente estos extremos.

Cuando la tobera es tan pequeña que su anchura resulta despreciable, estamos en el caso estudiado por Tollmien; la zona de transición es tan corta que, desde el primer momento, se pueden considerar las leyes de distribución de velocidades medias como campaniformes y afines.

ra la anchura de la lámina es tan pequeña que no es posible determinar un gran número de puntos del perfil de velocidades, y por consiguiente, éste se obtiene con aproximación menor. No obstante, la existencia de la primera zona se pone de manifiesto al determinar las velocidades máximas, especialmente en la sección inmediata a la tobera, pues se advierte que resultan menores de las que el cálculo indica suponiendo

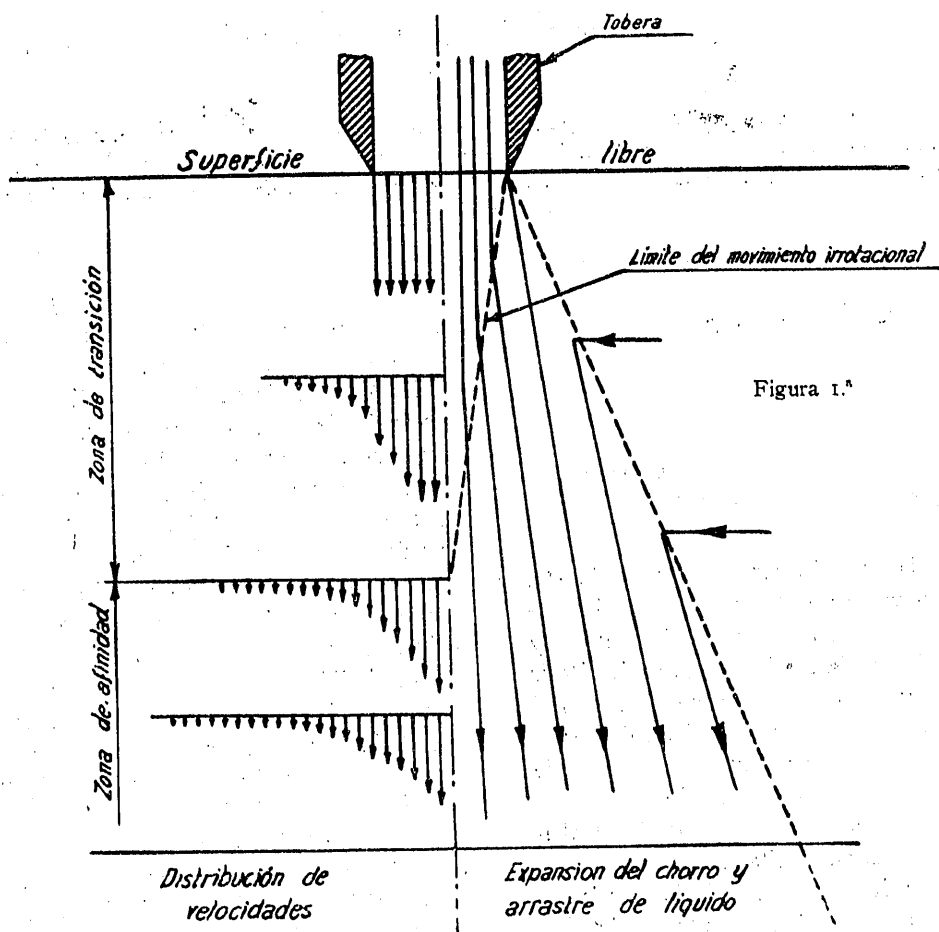


Fig. 1.ª — Esquema de la distribución de velocidades, expansión de la lámina penetrante e incorporación lateral de caudales.

Por el contrario, si la tobera tiene una anchura apreciable, es necesario distinguir dos zonas.

a) De transición, desde el régimen sensiblemente irrotacional hasta la distribución campaniforme de las velocidades medias.

b) Zona de distribución afín de las velocidades medias, cuya representación resulta asimilable a una exponencial simétrica.

Para la anchura de tobera utilizada en nuestros ensayos, la segunda zona prepondera con mucho sobre la primera. Además, en las inmediaciones de la tobe-

una distribución afín y campaniforme, cosa perfectamente lógica, como se advierte con la sola observación del esquema antes indicado.

Por todo ello, nuestro estudio ha versado principalmente sobre la segunda zona, sin perjuicio de recurrir luego a un artificio que nos permite tener en cuenta la existencia de la zona de transición, utilizando las mismas fórmulas para representar el fenómeno en toda la extensión.

Planteado así el problema, la investigación experimental había de tener los siguientes objetivos:

### 1.º Distribución de velocidades en las secciones horizontales.

Como es lógico, el registro del fenómeno acusa una pulsación de velocidades muy intensa, a causa de la turbulencia.

Para proceder sistemáticamente y simplificar en lo posible el estudio del problema, se efectuaron numerosas medidas en el seno de la masa líquida en movimiento, anotando en cada una de ellas los valores medios temporales de la velocidad, así como los valores extremos, si bien estos últimos sólo tienen un carácter de relativa aproximación, ya que la amplitud de la componente pulsatoria de la velocidad es muy variable, y por otra parte, la inercia y los rozamientos en el interior de los tubos de medida, restan exactitud a los resultados. Por tal motivo, las medidas se hicieron observando sencillamente la variación de la velocidad durante un período de 25 a 30 oscilaciones, y determinando aproximadamente la amplitud media de las mismas.

De momento prescindiremos de la componente pulsatoria de la velocidad, limitándonos a considerar las medias temporales de la misma.

El resultado de las medidas ha servido para dibujar los diagramas de velocidades adjuntos.

En dichos diagramas se aprecia la distribución campaniforme de las velocidades dentro de cada sección horizontal.

Faltaba solamente determinar la expresión analítica de una curva interpolatriz que se ajustase con la mayor exactitud posible al conjunto de los puntos obtenidos, para poder deducir de la misma las restantes características buscadas.

Después de algunos tanteos, y guiados por la misma forma tan regular que presentan las distintas campanas, nos decidimos a adoptar como curva interpolatriz la función normal de Gauss:

$$v = \frac{A}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad [1]$$

la cual, por su sencillez, se presta perfectamente a los ulteriores desarrollos del cálculo analítico; por otra parte, el examen de los gráficos de velocidades, así como el del diagrama unitario, que también se acompaña, demuestra que la adaptación de la curva a los

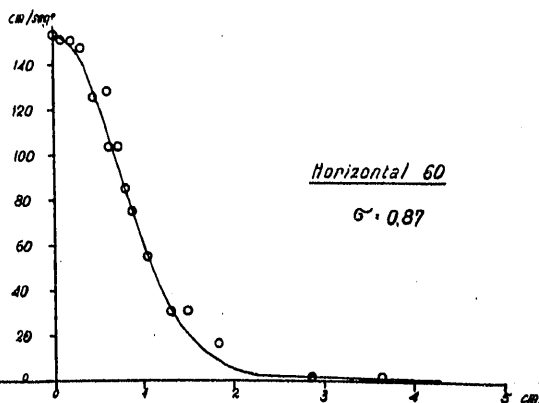
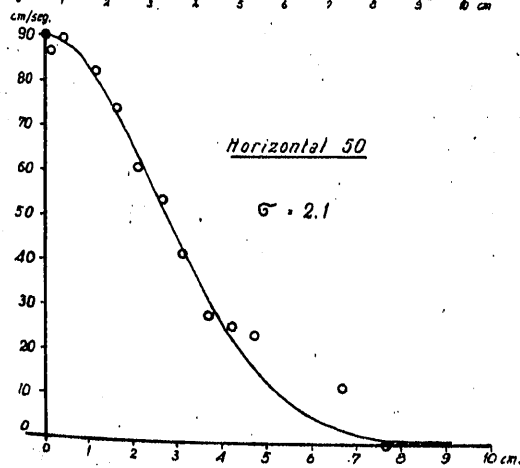
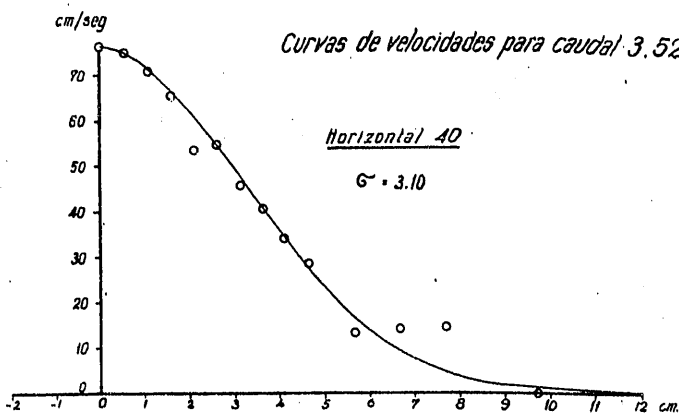
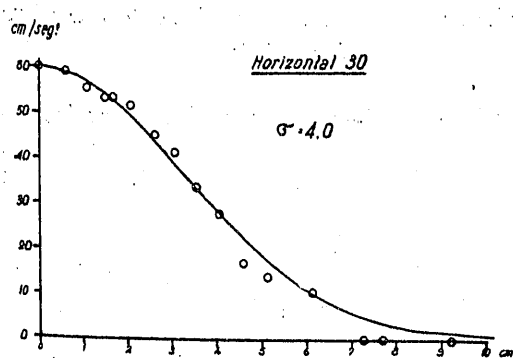


Fig. 2.ª — Diagramas de velocidades en cada sección horizontal, para un caudal de 3,52 l./seg.

puntos representativos del perfil de velocidades es excelente, siendo las discrepancias que pueden observarse inferiores a los errores experimentales.

La velocidad máxima,  $V$ , se identifica fácilmente con el coeficiente de la exponencial, es decir:

$$V = \frac{A}{\sigma \sqrt{2\pi}} \quad [2]$$

con lo cual la expresión [1] se convierte en:

$$v = V \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad [3]$$

quedando con ello de manifiesto que la distribución de velocidades en una horizontal cualquiera queda determinada por dos parámetros: el uno, es la velocidad máxima,  $V$ , y el otro, el coeficiente de forma  $\sigma$ , el mismo que en estadística recibe el nombre de "desviación típica" (standard) de una distribución.

Determinados estos dos parámetros para cada horizontal, se deducen inmediatamente todas las restantes características de la distribución de velocidades, como indicaremos brevemente a continuación:

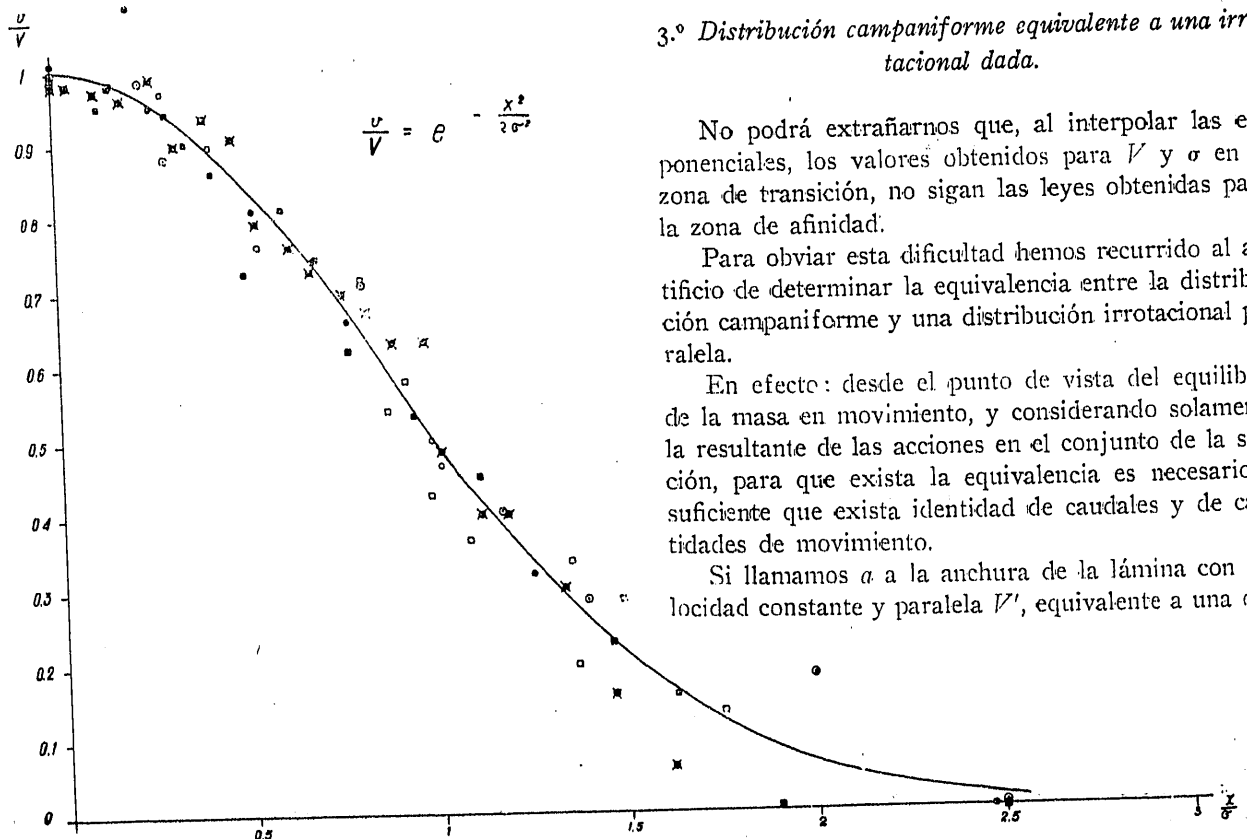


Fig. 3.<sup>a</sup>—Diagrama unitario de la distribución de velocidades en una sección horizontal cualquiera de la zona de afinidad.

## 2.º Presiones.—Cantidades de movimiento.

La exploración realizada ha probado que la distribución de presiones es hidrostática en toda la zona a que se refieren los dos ensayos, es decir, la no perturbada por la influencia del fondo; por el contrario, allí donde ésta alcanza, desviando las líneas de corriente, introduce con ello una sobrepresión de origen dinámico, cosa, por otra parte, perfectamente lógica.

Prescindiendo, pues, de esta zona perturbada, es aplicable el principio de conservación de la cantidad de movimiento. Se deduce de aquí que, al pasar de una a otra sección, el momento

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} v \, dq = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \, dx = V^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \cdot dx = V^2 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\pi} \quad [4]$$

ha de permanecer constante.

Esto nos facilita un medio de comprobar los resultados obtenidos hasta ahora; y como puede advertirse observando el diagrama de variación de la cantidad de movimiento, la comprobación da un resultado sumamente satisfactorio (fig. 7.<sup>a</sup>).

## 3.º Distribución campaniforme equivalente a una irrotacional dada.

No podrá extrañarnos que, al interpolar las exponenciales, los valores obtenidos para  $V$  y  $\sigma$  en la zona de transición, no sigan las leyes obtenidas para la zona de afinidad.

Para obviar esta dificultad hemos recurrido al artificio de determinar la equivalencia entre la distribución campaniforme y una distribución irrotacional paralela.

En efecto: desde el punto de vista del equilibrio de la masa en movimiento, y considerando solamente la resultante de las acciones en el conjunto de la sección, para que exista la equivalencia es necesario y suficiente que exista identidad de caudales y de cantidades de movimiento.

Si llamamos  $a$  a la anchura de la lámina con velocidad constante y paralela  $V'$ , equivalente a una dis-

tribución campaniforme de características  $V$  y  $\sigma$ , la igualación de caudales y cantidades de movimiento conduce a las dos ecuaciones:

$$a V' = V \sigma \sqrt{2\pi}; \quad [5]$$

$$a \bar{V}'^2 = V^2 \sigma \sqrt{\pi}; \quad [6]$$

de donde se deduce inmediatamente:

$$a = 2 \sqrt{\pi} \cdot \sigma; \quad [7]$$

$$V' = \frac{1}{\sqrt{2}} V. \quad [8]$$

Es decir, el equilibrio del movimiento considerado en conjunto subsistiría, existiendo afinidad en todo el campo, si el caudal que penetra por la tobera con distribución irrotacional, lo hiciera según una distribución campaniforme con velocidad máxima:

$$V = \sqrt{2} V'. \quad [9]$$

Esto permite extrapolar las leyes obtenidas en la zona de afinidad hasta la sección de la tobera, sin más que tomar, en vez de la velocidad constante de salida,  $V'$ , una velocidad máxima,  $V = \sqrt{2} V'$ .

En cuanto al parámetro  $\sigma$ , necesario para caracterizar la forma de la distribución, se obtiene inmediatamente por medio de la fórmula [7], de la que resulta inmediatamente:

$$\sigma = a/2 \sqrt{\pi}. \quad [10]$$

Para el resto de la zona de transición, es posible también hallar un coeficiente de equivalencia para pasar de la distribución real de velocidades a la distribución irrotacional teóricamente equivalente. Pero como la distribución presenta un carácter intermedio, ya que en la parte central el movimiento sigue siendo paralelo, mientras que en los extremos es ya campaniforme, no es posible calcular este coeficiente en forma sencilla, si bien su valor estará comprendido entre  $\sqrt{2}$ , que es el correspondiente a la tobera, y 1 para la zona de afinidad.

La fórmula [7] presenta también un interés marcado, pues nos permite definir la anchura de la lámina irrotacional equivalente a la distribución de velocidades en una sección cualquiera, y que resulta ser proporcional a  $\sigma$ . De esta manera podemos evitar la imprecisión que en la determinación de la anchura produce el hecho de que las velocidades no se anulan en ningún punto, sino que disminuyen asintóticamente.

#### 4.º Variación vertical de las velocidades.

Conocido el valor de  $\sigma$  en cada sección, basta hallar la ley de variación de la velocidad máxima al pasar de una a otra para tener completamente caracterizada la distribución de velocidades en dicha sección.

La obtención de la ley de variación vertical — es decir, la variación según la dirección del chorro — de las velocidades máximas, presenta, por lo tanto, el mayor interés.

Ahora bien: una vez establecida la equivalencia entre una distribución campaniforme y otra irrotacional, que nos permite considerar la sección de la tobera como virtualmente situada en la zona no perturbada, si logramos establecer esta ley de variación para un caso particular caracterizado por la anchura de la tobera y el caudal unitario — o lo que es lo mismo, por la anchura de la tobera y la velocidad inicial —, la aplicación del principio de semejanza nos permitiría deducir inmediatamente las ecuaciones correspondientes a otras condiciones iniciales cualesquiera, ya que la variación de la velocidad inicial se traduciría en un simple cambio de escala, mientras que la alteración de la anchura de la tobera se traduciría, una vez admitido el principio de equivalencia antes establecido, por un cambio del origen de ordenadas.

Se deduce de aquí la conveniencia de dar forma adimensional a la ecuación que relacione las velocidades máximas en cada sección con las profundidades correspondientes, contadas a partir de la superficie libre. No sólo conseguiremos de este modo la máxima generalidad, sino que comprobaremos indirectamente la validez de la equivalencia antes establecida entre la distribución irrotacional y la campaniforme, en el caso de que una misma curva unitaria sirva para interpolar los afijos de las velocidades máximas obtenidas experimentalmente con dos caudales iniciales distintos.

Para simplificar este estudio conviene representar las velocidades por sus alturas equivalentes, es decir, considerar en cada punto no la velocidad,  $v$ , sino la altura,  $h = \frac{v^2}{2g}$ . De este modo, la escala de longitudes,  $\lambda$ , basta para definir la semejanza del fenómeno.

Los diagramas de alturas correspondientes a la velocidad en cada una de las secciones, son también curvas normales de Gauss, puesto que siendo:

$$v = V e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

es también:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{V^2}{2g} \cdot e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} = H e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}} \quad [11]$$

variando únicamente los parámetros  $V$  y  $\sigma$ , que se convierten, respectivamente, en  $H$  y  $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ .

Representando ahora el diagrama de variación de alturas,  $H$ , correspondientes a las velocidades máximas en cada sección, en función de las profundidades,  $Z$ , medidas a partir de la tobera, comprobamos que, dentro de la aproximación que permiten los errores experimentales, puede interpolarse por medio de una hipérbola cuya ecuación es de la forma:

$$H = \frac{K_1^2}{z + z_0}; \quad [12]$$

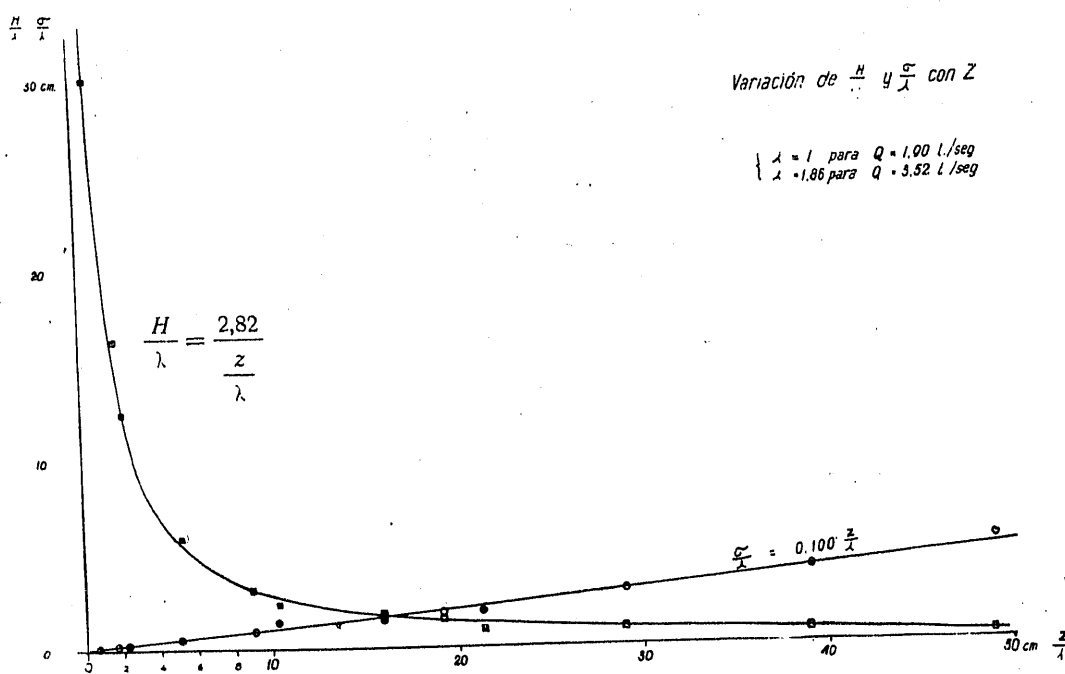


Fig. 4.<sup>a</sup> — Variación de la altura correspondiente a la velocidad máxima y del parámetro  $\sigma$  en cada sección, utilizando la escala de semejanza.

teniendo, por lo tanto, como asíntotas, el eje  $Z$  y una perpendicular a él situada a la distancia  $z_0$  por encima de la sección de la tobera.

Evidentemente, el coeficiente  $K_1$  es homogéneo con una longitud.

El principio de conservación de la cantidad de movimiento (ecuación [4]) nos permite deducir inmediatamente la ley de variación de  $\sigma$ , que resulta ser lineal, de la forma:

$$\sigma = K_2 (z + z_0); \quad [13]$$

en donde el coeficiente  $K_2$  es evidentemente adimensional.

Resulta interesante la interpretación física de estos coeficientes.

El parámetro  $\sigma$  representa la dimensión transversal de la campana de distribución de velocidades; es decir, que en cierto modo puede decirse que mide la anchura de la vena líquida en la sección considerada, bien entendido que no existe una superficie definida de separación entre la lámina penetrante y el líquido en reposo, sino solamente una disminución asintótica de las velocidades.

La ecuación [13] indica entonces claramente que la expansión de la lámina se verifica en forma diédrica; pero no a partir del extremo de la tobera, sino a

partir de una sección virtual anterior, situada a la distancia  $z_0$  de aquélla. Como vemos, este resultado coincide plenamente con el obtenido por Tollmien para el caso de flúidos gaseosos; la única diferencia estriba en la variación del origen de ordenadas, representada por la aparición del parámetro  $z_0$ ; cosa perfectamente previsible, como ya indicamos, desde el momento en que prescindimos de la tercera restricción de Tollmien, y consideramos la tobera con una anchura finita,  $a$ , ganando, por tanto, la solución en generalidad.

Si cambiamos el origen de ordenadas, poniendo



entre ellas, y las [18] y [19], con lo cual obtenemos:

$$\frac{H}{H_0} = \frac{1}{\frac{Z}{Z_0}}; \quad [20]$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{Z}{Z_0}; \quad [21]$$

que ya son aplicables, cualesquiera que sean las con-

medidas para tener resuelto el problema. Como en nuestro caso hemos efectuado dos series de medidas, partiendo de caudales distintos, tenemos una comprobación del desarrollo teórico. En efecto, una y otras nos conducen, sensiblemente, al valor:

$$K_2 = 0,100.$$

Con ello quedan perfectamente determinados los

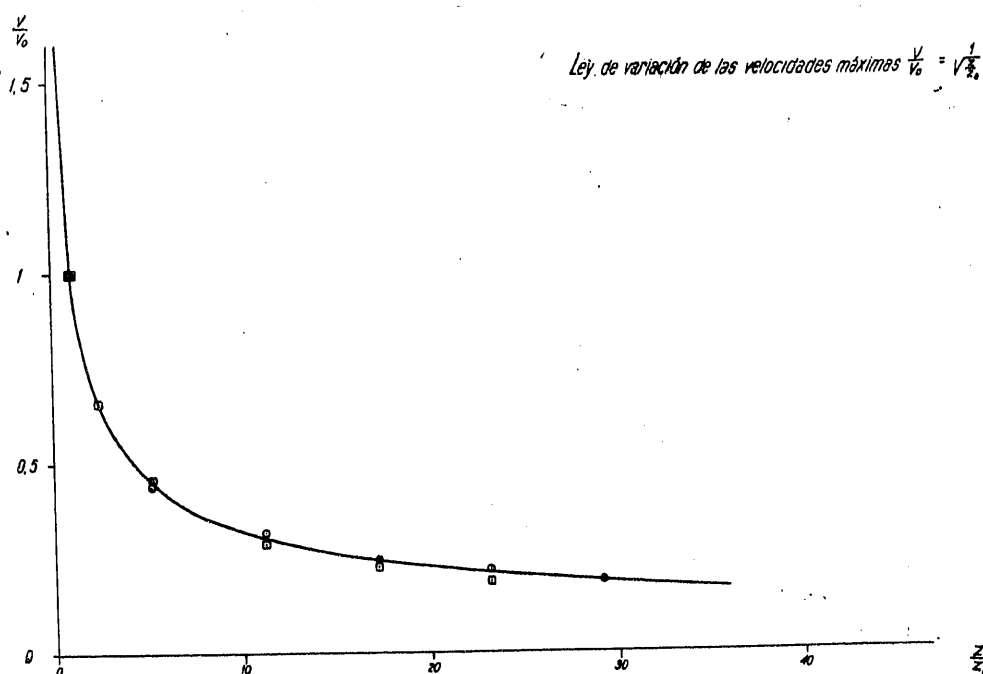


Fig. 6.a — Diagrama adimensional de la variación de velocidades máximas en cada sección horizontal.

diciones iniciales, es decir, la anchura  $a_0$  de la tobera y la velocidad de inyección  $V'_0$  (fig. 5.a).

De [20] se deduce inmediatamente la ley de variación de las velocidades:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Z_0}}}; \quad [22]$$

que es, por lo tanto, una hipérbola de segundo grado.

Los parámetros  $Z_0$ ,  $V_0$ ,  $\sigma_0$  y  $H_0$ , se pueden determinar en función de  $a_0$  y  $V'_0$  por medio de las fórmulas [9], [10] y [15], y de la relación  $H_0 = \frac{V_0^2}{2g}$ .

En todas estas fórmulas interviene una sola indeterminada,  $K_2$ , lo cual indica que basta una serie de

valores iniciales  $V_0$ ,  $H_0$ ,  $\sigma_0$  y  $Z_0$ , en función de  $a_0$  y  $V'_0$ :

$$V_0 = \sqrt{2} V'_0; \quad [23]$$

$$H_0 = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{\bar{V}_0^2}{g}; \quad [24]$$

$$\sigma_0 = \frac{a_0}{2\sqrt{\pi}} \sim 0,282 a_0; \quad [25]$$

$$Z_0 = \frac{1}{0,100} \cdot \sigma_0 = 2,82 a_0. \quad [26]$$

Estas ecuaciones, dada la afinidad del campo, sir-

ven para definirlo en cualquier sección; es particularmente interesante el resultado:

$$\sigma_0 = 0,100 Z_0; \quad [26']$$

$$\alpha_0 = 0,353 Z_0. \quad [26'']$$

En los gráficos adjuntos (figs. 4.<sup>a</sup>, 5.<sup>a</sup> y 6.<sup>a</sup>) se representan estas curvas, y puede observarse la exac-

### 5.º Variación del caudal al pasar de una a otra sección.

El caudal por unidad de anchura se halla fácilmente por medio de la integral:

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} v \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} V_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2Z_0^2\sigma^2}} \, dx = V_0 \sigma \sqrt{2\pi}. \quad [28]$$

Variación de la cantidad de movimiento  $\frac{M}{M_0} = 1$ .

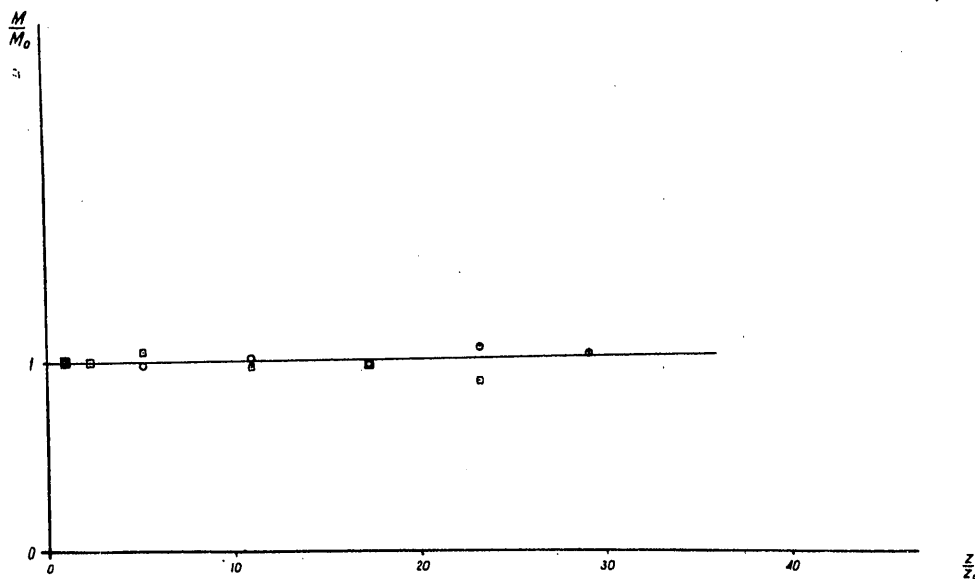


Fig. 7.º — Diagrama adimensional de las cantidades de movimiento en cada sección.  $M_0$  es la cantidad de movimiento a la salida de la tobera.

titud con que sirven para interpolar los puntos obtenidos por la experimentación (figs. 6.<sup>a</sup> y 7.<sup>a</sup>).

Combinando las ecuaciones [21], [22] y [13], tenemos la expresión de la velocidad en un punto cualquiera del plano, referido a sus coordenadas  $(x, Z)$ , medida la  $x$  a partir del eje de la lámina penetrante, y la  $Z$ , no desde la superficie, sino desde un punto situado a la distancia  $Z_0 = 2,82 a$ , por encima de ella:

$$v = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{Z}{Z_0}}} \cdot e^{-\frac{Z_0^2 x^2}{2Z^2 \sigma^2}} \quad [27]$$

definiéndose los valores de  $V_0$ ,  $Z_0$  y  $\sigma_0$  en función de  $a$  y de  $V'$  por medio de las ecuaciones [23], [24], [25] y [26].

Teniendo en cuenta las ecuaciones [21] y [22], puede escribirse:

$$q = \frac{V_0}{\sqrt{\frac{Z}{Z_0}}} \cdot \sigma_0 \cdot \frac{Z}{Z_0} \cdot \sqrt{2\pi} = V_0 \sigma_0 \sqrt{2\pi \frac{Z}{Z_0}},$$

o bien, en forma adimensional, y puesto que  $q_0 = V_0 \sigma_0 \sqrt{2\pi}$ :

$$\frac{q}{q_0} = \sqrt{\frac{Z}{Z_0}}. \quad [29]$$

El caudal crece con la raíz cuadrada de la profundidad. Este resultado es lógico, ya que existe una incorporación de caudales arrastrados en cada punto por la lámina penetrante.

En la figura 8.<sup>a</sup> puede verse que también la función [29] interpola de manera satisfactoria los puntos obtenidos por la experimentación.

### 6.º Disipación de la energía.

La fricción de las moléculas líquidas da lugar a disipación de energía que, como siempre, es producida por medio de la viscosidad, actuando la turbulencia como mecanismo intermedio determinante de fuertes gradientes instantáneos.

equivalente a una irrotacional dada, pues, por ejemplo, en la sección de entrada la energía vale efectivamente:

$$E'_0 = \frac{1}{2} \bar{V}^2 \cdot a. \quad [32]$$

Mientras que en la distribución en campana equivalente valdría:

$$E_0 = \frac{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_0 \cdot V^3}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \cdot \frac{a \cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}} \bar{V}^3 = \frac{a \bar{V}^3}{\sqrt{3}}, \quad [33]$$

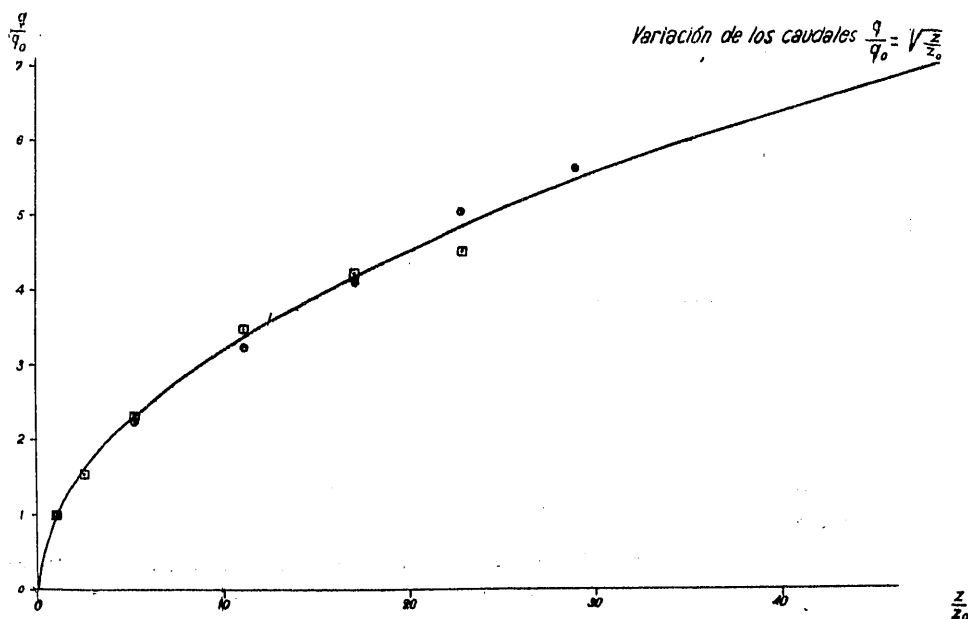


Fig. 8.º — Diagrama adimensional de la incorporación de caudales;  $q_0$  es el caudal unitario a la salida de la tobera.

La energía cinética de un chorro con distribución campaniforme vale:

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V^3 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} V^3 e^{-\frac{3x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{V^3}{2} \cdot \frac{\sigma \sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}} \quad [30]$$

Por tanto, siendo constante el producto  $V^2 \sigma$ , proporcional a la cantidad de movimiento, se tendrá:

$$E = K V^3; \quad [31]$$

resultado interesante y válido en la zona de distribución campaniforme de las velocidades; pero en la zona de transición, la energía no ha podido tenerse en cuenta al establecer la que hemos llamado distribución

o bien:

$$E_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} E'_0 = 1,156 E. \quad [34]$$

Es decir, que, puesto que las condiciones de continuidad y equilibrio dinámico han de subsistir inextinguiblemente, la disipación de energía, en la zona transitoria se realizará más lentamente que en una lámina equivalente con distribución en campana; queda, con esto, valorada cuantitativamente la acción protectora de las líneas de corriente exteriores sobre la energía de las centrales hasta el momento en que éstas, a su vez, son afectadas por el proceso de mezcla.

De todas formas, la ecuación [30], unida a las [21] y [22], permite deducir la ley de variación de la

energía cinética en función de la profundidad, obteniéndose:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{Z_0}}} \quad [35]$$

con las salvedades de que no es válida en la zona de transición, y de que  $E_0$  no es la energía cinética que posee la lámina al salir por la tobera, sino la que poseería con la distribución campaniforme equivalente, que es  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  veces mayor.

También se ha representado esta curva (fig. 9.<sup>a</sup>) y la aproximación conseguida es muy satisfactoria.

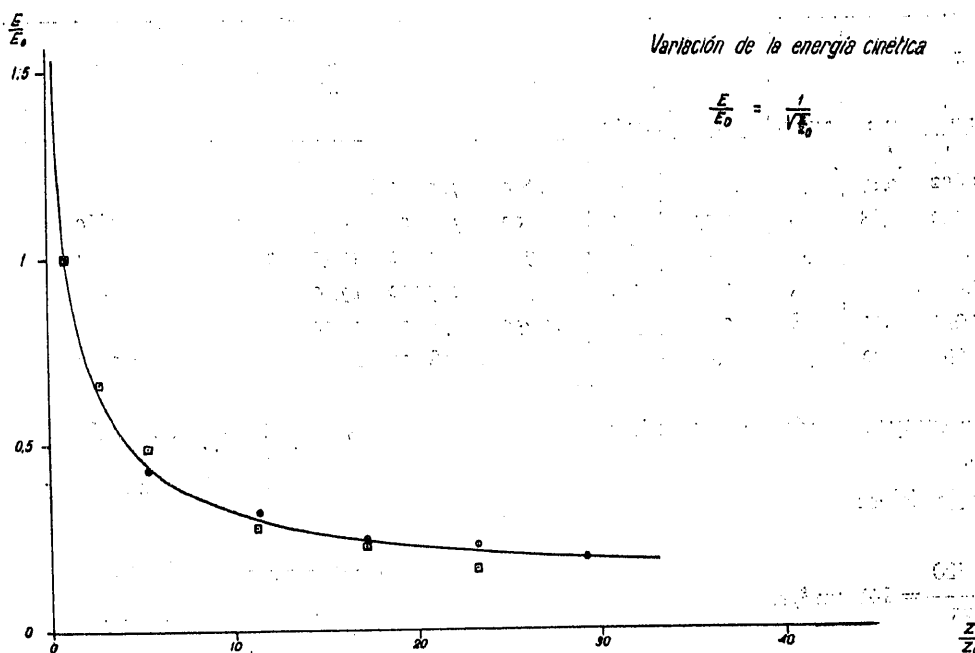


Fig. 9.<sup>a</sup> — Diagrama adimensional de la disipación de la energía cinética.

### 7.º Forma de la lámina.

De lo expuesto se deduce que resulta impreciso hablar de la anchura de la lámina. Pero ya hemos visto que el coeficiente  $\sigma$  varía proporcionalmente a la profundidad; y partiendo de la fórmula [7], que da la anchura de la lámina irrotacional equivalente, podríamos decir que esta lámina aumenta de anchura linealmente con la profundidad:

$$a = 2\sqrt{\pi} \cdot \sigma = 3,544 \sigma = 3,73 Z;$$

o bien:

$$\frac{a}{2} = 0,186 Z; \quad [36]$$

recordando que las ordenadas  $Z$  se miden desde un punto situado detrás de la tobera a distancia

$$Z_0 = 2,82 a_0.$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la curva de Gauss, se puede afirmar que el diedro definido por la relación [36] contiene en su interior el 93,6 por 100 del caudal en cada sección. Y si se deseara definir la anchura de la lámina como la de la sección que contiene otro porcentaje mayor del caudal, no habría más que buscar en las tablas de la función de Gauss el múltiplo correspondiente del coeficiente. En todo caso hallaríamos una variación lineal de la anchura

en función de la profundidad, modificándose solamente el coeficiente angular; así, con

$$x = \pm 2,575 \sigma = \pm 0,27 Z;$$

el diedro comprende el 99 por 100 del caudal de cada sección.

### 8.º Cuadro resumen.

A continuación indicamos los valores que se deducen de la aplicación de las fórmulas deducidas para cada una de las series de ensayos efectuados.

Para la deducción de estos valores se ha partido

de las condiciones iniciales — velocidad y anchura de la lámina a la salida de la tobera — y de los valores de  $\sigma$  y  $V$  que se deducen para cada horizontal de las medidas directas y de la interpolación de la curva de Gauss.

Primer ensayo: Caudal  $Q = 1,90$  l./s.;  $a_0 = 0,6$  centímetros.

Valores iniciales:

$$q_0 = \frac{1900 \text{ cm.}^3}{25 \text{ cm.}} = 76 \text{ cm.}^2/\text{s.}$$

$$V'_0 = \frac{76}{0,6} = 127 \text{ cm./s.}$$

$$V_0 = \sqrt{2} V'_0 = 179 \text{ cm./s.}$$

$$\sigma_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} = 0,17 \text{ cm.}$$

$$H_0 = \frac{179^2}{1960} = 16,4 \text{ cm.}$$

$$Z_0 = 2,82 \times 0,6 = 1,692 \text{ cm.}$$

$$E_0 = V_0^3 \cdot \sigma \cdot \sqrt{\frac{\pi}{6}} = 705\,000 \text{ cm.}^3/\text{s.}^3/\text{cm.}$$

$$M_0 = q_0 V'_0 = 9\,650 \text{ cm.}^2/\text{s.}^2/\text{cm.}$$

ENSAYO NÚM. 1. — VALORES EN CADA HORIZONTAL.

$Z$ — cm.	$Z$ — cm.	$\sigma$ — cm.	$V$ — cm./s.	$H = \frac{V^2}{2g}$ — cm.	$q$ — cm. <sup>2</sup> /s.	$M$	$E$	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	$\frac{V}{V_0}$	$\frac{H}{H_0}$	$\frac{q}{q_0}$	$\frac{M}{M_0}$	$\frac{E}{E_0}$
0	1,692	0,17	179	16,40	76	9 650	705 000	I	I	I	I	I	I	I
7,4	9,092	0,88	78	3,05	172	9 500	302 000	5,35	5,17	0,436	0,1860	2,26	0,985	0,429
17,4	19,092	1,76	56	1,53	245	9 700	222 000	11,30	10,40	0,313	0,0934	3,22	1,005	0,314
27,4	29,092	2,90	43	0,93	311	9 500	167 000	17,20	17,00	0,240	0,0567	4,09	0,985	0,237
37,4	39,092	4,00	38	0,73	380	10 250	158 000	23,20	23,50	0,212	0,0445	5,00	1,060	0,222
47,4	49,092	5,30	32	0,52	425	9 800	128 000	27,62	31,00	0,179	0,0317	5,65	1,015	0,182

Segundo ensayo: Caudal  $Q = 3,52$  l./s.;  $a_0 = 0,6$  centímetros.

Valores iniciales:

$$q_0 = \frac{3\,520}{25} = 141 \text{ cm.}^3/\text{s.}$$

$$V'_0 = \frac{141}{0,6} = 235 \text{ cm./s.}$$

$$V_0 = \sqrt{2} \cdot V'_0 = 332 \text{ cm./s.}$$

$$\sigma = \frac{a_0}{2\sqrt{\pi}} = 0,17 \text{ cm.}$$

$$H_0 = \frac{332^2}{1960} = 56,20 \text{ cm.}$$

$$Z_0 = 2,82 \cdot 0,6 = 1\,692 \text{ cm.}$$

$$E_0 = 332^3 \times 0,17 \times \sqrt{\frac{\pi}{6}} = 4\,480\,000 \text{ cm.}^3/\text{s.}^3/\text{cm.}$$

$$M_0 = 141 \times 235 = 33\,000 \text{ cm.}^2/\text{s.}^2/\text{cm.}$$

ENSAYO NÚM. 2. — VALORES EN CADA HORIZONTAL.

$Z$ — cm.	$Z$ — cm.	$\sigma$ — cm.	$V$ — cm.	$H = \frac{V^2}{2g}$ — cm.	$q$ — cm. <sup>2</sup> /s.	$M$	$E$	$\frac{Z}{Z_0}$	$\frac{\sigma}{\sigma_0}$	$\frac{V}{V_0}$	$\frac{H}{H_0}$	$\frac{q}{q_0}$	$\frac{M}{M_0}$	$\frac{E}{E_0}$
0	1,692	0,17	332	55,80	141	330 000	4 480 000	I	I	I	I	I	I	I
2,4	4,092	0,40	217	23,80	217	330 000	2 920 000	2,42	2,35	0,654	0,425	1,54	I	0,650
7,4	19,092	0,87	150	11,80	326	345 000	2 120 000	5,35	5,12	0,450	0,212	2,31	1,05	0,490
17,4	19,092	2,10	93	4,40	486	320 000	1 220 000	11,30	12,20	0,280	0,079	3,45	0,97	0,275
27,4	29,092	1,10	76	2,93	590	326 000	1 010 000	17,02	18,00	0,230	0,052	4,16	0,99	0,228
37,4	39,092	4,00	63	2,10	631	280 000	720 000	23,02	23,60	0,190	0,038	4,98	0,85	0,160

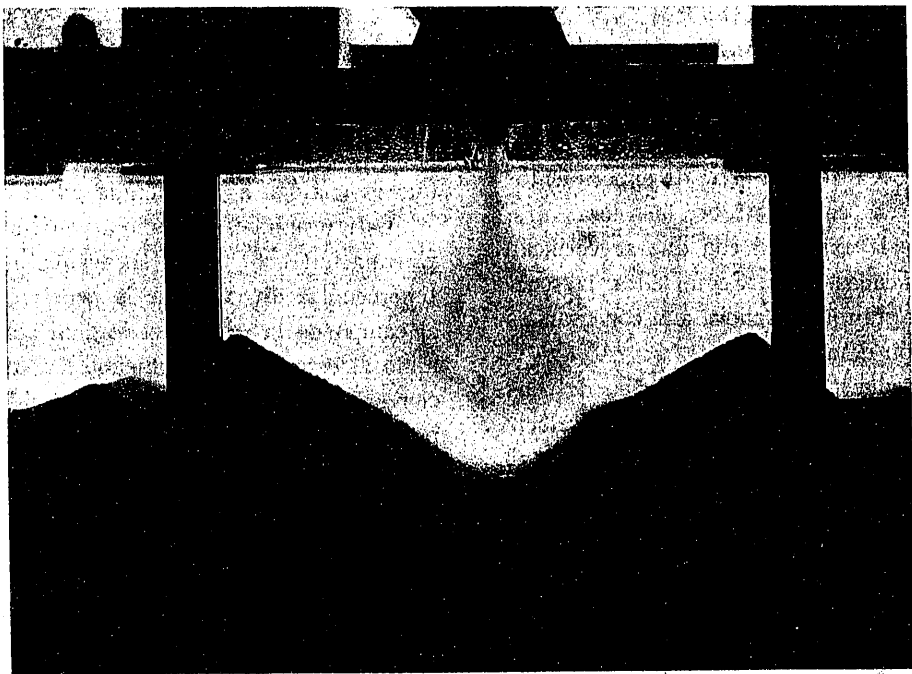


Figura 10.

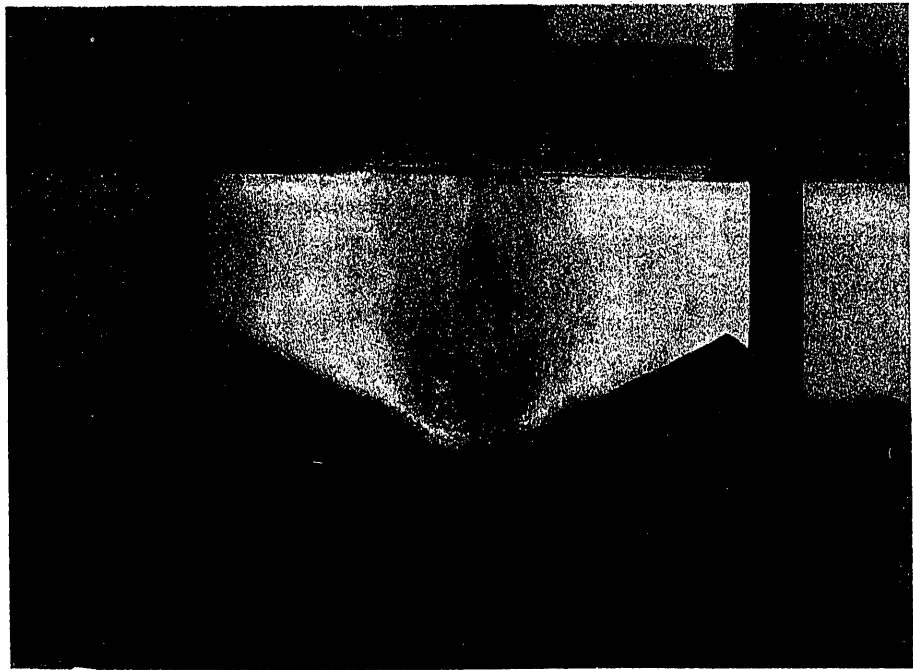


Figura 11.

## V

## Experimentación con fondo socavable.

Para completar los estudios teóricos y analizar el efecto real producido al pie de un vertedero con solera socavable, se realizó otra serie de experimentos con una capa de arena colocada sobre la solera.

Resulta notable la exactitud con que se verifican las previsiones indicadas antes. Según ellas, la socavación aparece con gran importancia, aun con grandes espesores de colchón de agua.

Entonces se produce, al variar la forma de contorno, una modificación de la distribución de velocidades, sobre todo cerca del fondo, que da lugar al cese de la socavación cuando la forma adquiere un perfil fijo que denominaremos "estable".

El proceso de arrastre que le dió origen, puede reconocerse en su perfil (figs. 10 y 11), en que se observan la socavación producida en las zonas de profundidad máxima y el relleno formado por los arrastres que tienen el talud natural de la arena bajo el agua.

Por otra parte se observa la forma redondeada de la expansión de la lámina por efecto de la influencia del contorno por ella misma determinado.

Esta forma coincide con la observada por Schoklitsch en ensayos de socavación al pie de vertederos. Puede comprobarse que incluso llega a ser del mismo orden, puesto que Schoklitsch da para valor de esta socavación la fórmula:

$$T_T = 4,75 \cdot \frac{H^{0,2} \cdot q^{0,57}}{q^{0,32}};$$

donde  $H$  es la altura total de caída;  $d$ , el diámetro de los granos, y  $q$ , el caudal por  $m^2/s$ , con la disposición de la figura 11, tomada del autor citado.

En las fotografías pueden verse los perfiles de la socavación obtenidos en el mismo tanque empleado para la experimentación anterior, con 25 cm. de arena sobre el fondo fijo de palastro.

Aplicando la fórmula de Schoklitsch, se obtiene:

$$T_T = \frac{4,75}{2^{0,32}} \cdot \frac{1,58}{2,51} \cdot \frac{2,15}{50,4} = 0,102;$$

$$T_T = 10,2 \text{ cm.};$$

que es análoga a la obtenida en la experimentación.

Es interesante hacer notar que, salvo en la experimentación con fondo socavable, no influye en el fenómeno la dirección de la penetración con relación al campo de la gravedad, lo cual abre un nuevo camino al estudio de fenómenos tan importantes como el resalto hidráulico, que está influido en gran parte por la penetración de la lámina vertiente, bajo el rodillo anulador de la energía.

## Bibliografía.

- TOLLMIEH, W.: "Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge z. f. angew." *Math. u. Mech.* 6. 468. 1926.
- FAGE, A. and JOHANSEN, F. C.: "The Structure of Vortex Sheets." *Philos. Mag.* Vol. 5. 417. 1928.
- VON ZIMM: "Über die Strömungsvorgänge im freien Luftstrahl." *Forsch. arb. aus der Gebiete der Ingenieurwesen.* Heft 234. 1921.
- Versuchsanstalt zu Göttingen: *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt.* II. Lieferung. Seite 61 zu 75. 1923.
- FÖRTHMANN: Dissertation Göttingen. 1930.
- TRÜPEL, PH.: *Ueber die Einwirkung eines Luftstrahles auf die umgebende Luft. z. s. f. d. gesamte Turbinenwesen.* 12, 59 zu. 66. 1915.
- SCHLICHTING, H.: *Ueber das ebene Windschattenproblem.* Dis. Göttingen. 1930.
- GOLDSTEIN, S.: "Concerning some solutions of the boundary layer equation in hydrodynamics." *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* Vol. 26. P. 1. 1930.
- SWAIN, L. M.: "On the turbulent wake behind a body of revolution." *Proc. of the Royal Soc.* Vol. 125. 647. 1229.