

APORTACION AL ESTUDIO DE ESTRUCTURAS PRETENSADAS

Por CARLOS BENITO, Ingeniero de Caminos.

En este trabajo presenta el autor un estudio y fórmulas originales para el interesante problema de determinar experimentalmente la tensión a que está sometida una barra en hormigones pretensados, sin necesidad de haber efectuado mediciones antes de su puesta en tensión. La laboriosísima investigación desarrollada para comprobar la validez de estas leyes, así como el estudio mismo, son buena prueba de la improba labor que está desarrollando nuestro Laboratorio Central y de la valía y entusiasmo de las personas que en él trabajan.

El avance de la técnica de estructuras hace que el proyectista se vea, en ocasiones, coartado por las dificultades de llevar sus creaciones a la realidad con la aproximación necesaria; este defecto se ha presentado frecuentemente al tratar de introducir armaduras pretensadas en estructuras hiperestáticas delicadas.

Recientemente se ha solicitado del Laboratorio la comprobación directa o experimental de estas tensiones para una obra importante de este tipo, y ello nos ha hecho pensar en el problema, para darle una solución general y eficaz como la que a continuación se indica:

Estas armaduras están normalmente formadas por una o varias barras de sección circular o cuadrada,uniendo dos puntos de la estructura y ejerciendo sobre ellos la fuerza correspondiente a la tensión de trabajo propia de las barras.

Para mejor repartir las cargas en la estructura, el proyectista requiere, con frecuencia, que cuando la estructura esté todavía descargada o sin desarmar se obligue a la armadura a tomar una determinada tensión previa. Si esta tensión previa fuese más baja que la necesaria, se podrían producir movimientos y esfuerzos peligrosos en determinadas partes de la obra, y si fuese demasiado alta se llegaría, al actuar las sobrecargas, a tensiones de trabajo de la armadura superiores a las calculadas, y, en muchos casos, inaceptables.

Así se presenta en determinadas estructuras la necesidad de conocer la tensión previa de estas armaduras con suficiente aproximación.

Esta medida se venía realizando, generalmente, por medios poco aproximados, apreciando subjetivamente el grado de tensión por el tipo de oscilación o vibración más o menos rápido, producido al sacudir el elemento metálico.

La práctica ha demostrado lo poco conveniente que es el uso de elongómetros para el fin que antes apuntábamos; pues, son aparatos muy delicados y que deben permanecer fijos al elemento observado, por lo que, teniendo en cuenta la mucha duración del

ensayo, se verían expuestos a fáciles averías como consecuencia de cualquier golpe o movimiento brusco, imposible, prácticamente, de evitar en la obra.

Para paliar estas dificultades y llegar a medir con aproximación bastante la carga de trabajo en estas armaduras antes de su hormigonado, vamos a fundarnos en la alteración que experimenta el período propio de vibración de las cuerdas vibrantes con momento de inercia, como consecuencia de las diferentes tensiones a que se les someta.

El ensayo consiste en disponer un sistema de puesta en vibración de la barra, y montar un aparato que registre la vibración para poder conocer con exactitud su frecuencia.

Poner en vibración la barra es, en general, fácil; nosotros hemos usado con éxito, en los ensayos realizados a tensiones bajas y longitudes más bien pequeñas, el simple golpe de un martillo; pues para una tensión dada en la cuerda vibrante, la mayor o menor fuerza aplicada con el golpe hace variar la amplitud de la vibración, pero no la frecuencia fundamental, que es la que interesa para la medida.

Para tensiones altas o barras muy rígidas, logramos el mismo efecto tirando transversalmente con un dispositivo cualquiera del punto medio del tensor y soltando rápidamente. En todos los ensayos debe observarse si la vibración de la barra corresponde a media onda, o si se presentan armónicos, que falsearían los resultados. En caso de duda, pueden colocarse varios aparatos registradores a lo largo del tensor y comprobar que las oscilaciones están en fase.

Si la acción aplicada en el centro de la barra no produjese una oscilación de este tipo, como podría suceder, quizás, en barras de gran longitud y masa, podría, o aplicarse la acción simultáneamente en varios puntos, o deducir, por los diagramas obtenidos de los varios aparatos, el tipo de armónico que se produce.

El aparato registrador de la vibración también puede ser muy variado, dependiendo la elección de la aproximación que se juzgue necesaria; podrá usarse, para obtener una gran exactitud, un detector magnético.

co aplicado junto a la barra, para que su oscilación induzca una corriente de igual período que el de la vibración. La medida de la frecuencia de esta corriente está satisfactoriamente resuelta por la técnica, con precisión más que suficiente para el caso que nos ocupa.

En nuestros ensayos bastaron aparatos mucho más simples, a base de un mecanismo de relojería, y la aproximación obtenida fué completamente satisfactoria. Más adelante hacemos la descripción de los ensayos efectuados, incluyendo esquemas de estos sencillos aparatos.

Estando la barra empotrada en sus extremos, como es corriente en los pretensados de estructuras de hormigón, y completamente libre en los demás puntos, sin roces mecánicos ni huelgos, y actuando la tensión que le imponemos mediante un tensor de hústillo, al producirse la vibración (y no habiendo error en las lecturas), a cada tensión corresponderá una frecuencia fija e invariable; y, por el contrario, en una barra de longitud y sección conocida empotrada en sus extremos, a cada frecuencia en la vibración le corresponderá una tensión. Suponemos que el módulo Young permanece constante, hipótesis perfectamente admisible por tratarse de aceros, y que operamos lejos del límite elástico.

En el presente trabajo empezamos estudiando las leyes generales de la vibración transversal, para aplicarlas al caso concreto del tensor empotrado, llegando a una fórmula que resuelve el problema propuesto. Como consecuencia práctica, hemos calculado una curva, en la que, partiendo de las características de la barra tesada, como son la longitud, sección, momento de inercia, etc., quedan unidas de forma inmediata la tensión en la barra y la frecuencia de la vibración, bastando conocer una para que la otra quede determinada.

El método puede aplicarse a barras de sección constante; esta constancia no existe en cuanto se utilice un manguito roscado para producir la tensión, pues introducimos un peso supletorio, localizado en una sección de la barra. Numerosos ensayos hechos con manguitos de diferentes pesos, situados a la mitad y al cuarto de luz, nos han permitido valorar la influencia de la variación introducida en la frecuencia, llegando, como consecuencia de ellos, a una fórmula experimental, ampliamente comprobada, que da un factor de corrección en función del peso y de la situación del manguito dentro de la barra. Con ello puede aplicarse también el método a estos casos.

A continuación, y con el propósito de no hacer excesivamente largo este artículo, exponemos ligeramente el fundamento teórico, así como los resultados de los ensayos realizados, terminando con un resumen y ejemplos que aclaran la aplicación del método. Dejamos para fecha próxima la publicación de la teoría completa, con ejemplos de aplicación y todos los

resultados parciales de los ensayos. Esta publicación se prepara en los Anales del Instituto Técnico de la Construcción y Edificación.

Leyes generales de la vibración transversal.

El estudio teórico de las vibraciones transversales, teniendo en cuenta todos los factores geométricos y físicos que en ella intervienen, es, prácticamente, inatacable, por lo que las teorías se suelen desarrollar a base de simplificaciones, considerando las siguientes magnitudes:

L = longitud de la cuerda vibrante.

Ω = sección.

ρ = masa por unidad de volumen.

T = tracción total en la sección.

F = frecuencia.

n = orden de los armónicos de la vibración.

Partiendo de la ecuación diferencial:

$$\rho \Omega \frac{d^2y}{dt^2} = T \frac{d^2y}{dx^2},$$

se llega a la conocida fórmula:

$$F = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho \Omega}},$$

de aplicación sencilla, pero, a veces, no muy aproximada.

En esta fórmula se prescinde de la influencia que pueden producir los fenómenos de flexión, y que llegan a tener importancia en muchos de los casos que nos interesan ahora.

Usaremos, pues, la notación antes expuesta, añadiendo:

I = momento de inercia de la sección con relación a un eje de simetría horizontal.

E = módulo de elasticidad.

La forma de la sección de la barra no influye, a condición de que exista simetría con relación a dos ejes perpendiculares, y que el momento de inercia sea constante.

Las simplificaciones que aceptamos para poder llegar a una fórmula práctica, son las siguientes:

1.^a Admitimos, como se hace en la teoría de cuerdas vibrantes, que el tensor no aumenta de longitud durante la vibración, o, lo que es igual, que T permanece constante.

Esto es tanto más cierto cuanto que la vibración tenga menor amplitud, y dentro de las pequeñas amplitudes a que se trabaja en este método, la hipótesis resulta muy aproximada.

2.^a Para los fenómenos de flexión admitiremos la hipótesis de Coulomb, considerando únicamente las aceleraciones perpendiculares al eje de la cuerda, es decir, la traslación de las secciones en el sentido de la vibración, y no tendremos en cuenta las aceleraciones correspondientes a los cambios angulares de las secciones planas.

La teoría a desarrollar es conocida, pero la expondremos desde su principio para poder llegar al caso que nos interesa y ver cómo, en él, puede resolverse, con justificadas simplificaciones, llegando a obtener resultados de aplicación práctica y cómoda, a pesar de la relativa complicación teórica que en algunos momentos presenta.

Para llegar a la ecuación general, partimos de la condición de equilibrio de un elemento de longitud (fig. 1.^a) dL .

Las únicas fuerzas que actúan sobre el elemento

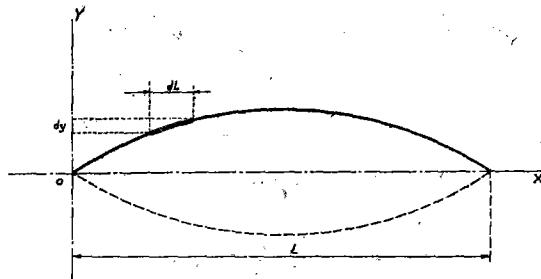


Figura 1.^a

infinitesimal son las de tracción, en sus secciones extremas, que deben equilibrar a la fuerza exterior de la vibración.

Las acciones internas están formadas por la componente transversal de la tracción longitudinal, que, como ya hemos dicho, la consideramos constante, más el incremento de esfuerzo cortante.

La componente transversal de la tracción en la cara izquierda es:

$$T \frac{dy}{dL}, \text{ y en la otra, } T \frac{dy}{dL} + T \frac{d^2y}{dL^2} dL.$$

La fuerza que actúa en el elemento será:

$$T \frac{d^2y}{dL^2} dL,$$

y dada la pequeña amplitud de la vibración, podemos suponer $dL = dx$, lo que equivale a decir que la componente vertical de la tracción es:

$$T \frac{d^2y}{dx^2} dx.$$

Al flexar la cuerda, el esfuerzo cortante en la sección izquierda será $\frac{dM}{dx}$, y en la derecha:

$$\frac{dM}{dx} + \frac{d^2M}{dx^2} dx,$$

siendo, por tanto, la diferencia el incremento de esfuerzo cortante:

Recordando que $M = -EI \frac{d^2y}{dx^2}$, tendremos:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -EI \frac{d^4y}{dx^4}.$$

Vamos ahora a calcular la fuerza exterior:

La aceleración, en el sentido de las y (única que tenemos en cuenta), es $\frac{d^2y}{dt^2}$, que corresponde a la masa del elemento, dL , lo que representa una fuerza exterior que valdrá:

$$\rho \Omega \frac{d^2y}{dt^2}.$$

La condición de equilibrio entre todas las fuerzas indicadas es la siguiente ecuación diferencial:

$$T \frac{d^2y}{dx^2} - EI \frac{d^4y}{dx^4} = \rho \Omega \frac{d^2y}{dt^2}, \quad [1]$$

establecida con las hipótesis aceptadas.

La expresión del movimiento vibratorio puede lograrse superponiendo funciones senoidales, siendo su integral general:

$$y = \Sigma a \sin (2\pi F t - \varphi), \quad [2]$$

en la cual, F es la frecuencia de la vibración y a una función desconocida de x ; incluimos el término φ para tener en cuenta una posible deformación inicial; es decir, en el momento $t = 0$.

Σ comprende todos los sumandos posibles que, con valores diferentes de F , satisfacen la ecuación.

Para determinar las magnitudes, que son desconocidas en dicha expresión, empezaremos por hallar las siguientes derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2a}{dx^2} \sin (2\pi F t - \varphi);$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^4a}{dx^4} \sin (2\pi F t - \varphi);$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a (2\pi F)^2 \sin (2\pi F t - \varphi);$$

que, llevadas a la condición de equilibrio, [1], y simplificando, nos permiten establecer la condición:

$$EI \frac{d^4a}{dx^4} - T \frac{d^2a}{dx^2} - \rho \Omega (2\pi F)^2 a = 0. \quad [3]$$

Integrando esta ecuación de condición, obtenemos la forma α .

Por tratarse de una ecuación diferencial lineal sin segundo miembro, su integral general es la suma de los productos de cuatro constantes arbitrarias por soluciones particulares, diferentes entre sí.

Las cuatro soluciones particulares pueden ser de la forma:

- 1.^a $\alpha = \operatorname{sen} Ax;$
- 2.^a $\alpha = \cos Ax;$
- 3.^a $\alpha = \operatorname{Sh} Bx;$
- 4.^a $\alpha = \operatorname{Ch} Bx;$

en donde A y B son unos parámetros que han de satisfacer la condición resultante de aplicar a estas soluciones la ecuación [3].

Para simplificar vamos a llamar:

$$EI = a; \quad T = b; \quad \rho \Omega (2\pi F)^2 = c. \quad [4]$$

Aplicando las dos primeras soluciones a la ecuación [3], se obtiene la condición de compatibilidad

$$aA^4 + bA^2 - c = 0, \quad [5]$$

y con las soluciones 3.^a y 4.^a, la condición es:

$$aB^4 - bB^2 - c = 0. \quad [5]$$

Por tanto, la forma de α será:

$$\alpha = K_1 \operatorname{sen} Ax + K_2 \cos Ax + K_3 \operatorname{Sh} Bx + K_4 \operatorname{Ch} Bx$$

con las condiciones [5].

Al parecer, tenemos desconocidas las constantes K_1 a K_4 (ambas inclusive), así como A y B , que dependen de a , b y c , las cuales, a su vez, son funciones de F ; es decir, A , B y F , unidas por las condiciones [5], que son sólo dos, al mismo tiempo que φ sigue con carácter arbitrario.

Aunque el problema es complejo, puede resolverse de la siguiente forma: Determinamos A , B y F , añadiendo, a las condiciones [5], las de sustentación del elemento vibrante; con lo que quedará conocida la frecuencia F , que es la medida que buscamos.

Las constantes K_1 a K_4 y el valor de φ , se calculan partiendo de las condiciones iniciales.

El caso que creemos se ajusta más corrientemente a la realidad, en las estructuras de hormigón, es el de la barra pretesa, con sus extremos empotrados en el hormigón y todos los demás puntos libres.

Partimos de la expresión general de y :

$$y = \Sigma [K_1 \operatorname{sen} Ax + K_2 \cos Ax + K_3 \operatorname{Sh} Bx + K_4 \operatorname{Ch} Bx] \operatorname{sen}(2\pi Ft - \varphi),$$

antes deducida, la cual ha de verificarse simultáneamente con las condiciones [5].

Las condiciones de empotramiento son, para

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad y = 0 \\ x = L & \quad y = 0 \\ x = 0 & \quad \frac{dy}{dx} = 0 \\ x = L & \quad \frac{dy}{dx} = 0 \end{aligned}$$

que, llevadas a la ecuación general, dan:

$$x = 0; \quad y = \Sigma (K_2 + K_4) \operatorname{sen}(2\pi Ft - \varphi) = 0; \quad [6]$$

$$K_2 = -K_4;$$

$$x = 0; \quad \frac{dy}{dx} = \Sigma (AK_1 + BK_3) \operatorname{sen}(2\pi Ft - \varphi) = 0; \quad [7]$$

$$AK_1 = -BK_3;$$

$$x = L; \quad y = \Sigma (K_1 \operatorname{sen} AL + K_2 \cos AL + K_3 \operatorname{Sh} BL + K_4 \operatorname{Ch} BL) \operatorname{sen}(2\pi Ft - \varphi) = 0;$$

de donde:

$$K_1 \operatorname{sen} AL + K_2 \cos AL + K_3 \operatorname{Sh} BL + K_4 \operatorname{Ch} BL = 0; \quad [8]$$

$$x = L; \quad \frac{dy}{dx} = \Sigma (AK_1 \cos AL - AK_2 \operatorname{sen} AL + BK_3 \operatorname{Ch} BL + BK_4 \operatorname{Sh} BL) \operatorname{sen}(2\pi Ft - \varphi) = 0,$$

o sea:

$$AK_1 \cos AL - AK_2 \operatorname{sen} AL + BK_3 \operatorname{Ch} BL + BK_4 \operatorname{Sh} BL = 0. \quad [9]$$

Sustituyendo las [6] y [7], en las [8] y [9], después de multiplicar la [8] por B , ordenando y dividiendo miembro a miembro, se tiene:

$$\frac{B \operatorname{sen} AL - A \operatorname{Sh} BL}{A \cos AL - A \operatorname{Ch} BL} = - \frac{B \cos AL - B \operatorname{Ch} BL}{A \operatorname{sen} AL + B \operatorname{Sh} BL},$$

y desarrollando:

$$2AB = (A^2 - B^2) \operatorname{sen} AL \operatorname{Sh} BL + 2AB \cos AL \operatorname{Ch} BL,$$

quedando, por último:

$$\frac{A^2 - B^2}{2AB} \operatorname{sen} AL \operatorname{Sh} BL + \cos AL \operatorname{Ch} BL = 1. \quad [10]$$

Esta ecuación presenta dos variables, A y B , y puede resolverse por tanteos, debiendo cumplir los valores de A y B las condiciones [5].

Puede seguirse otro camino, que es despejar A y B , con lo que:

$$A = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}} \quad \left. \right\} \quad [11]$$

$$y \quad B = \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}} \quad \left. \right\}$$

(en las que, fácilmente, se ve que hay que tener en cuenta los signos + de los radicales), llevar estos valores a la ecuación [10], en la que quedará, como única variable, la c , y resolverla por tanteos; pero el camino es muy penoso.

Solución aproximada de la ecuación general.

Al resolver por tanteos la ecuación general [10], deducida anteriormente; teniendo en cuenta las dos condiciones [5] para los valores corrientemente usados en la práctica de la construcción; es decir, tensiones entre 2 y 20 Kg./mm.²; longitudes de la barra entre 4 y 60 m., y secciones correspondientes a redondos de 12 a 40 mm. de diámetro, hemos llegado a valores de $B L$ tan elevados, que permiten simplificar la fórmula general.

A partir de $B L > 12,3$, se puede suponer, con sobrada aproximación, que:

$$\operatorname{Sh} B L = \operatorname{Ch} B L = \frac{e^{B L}}{2} > 10^5,$$

con lo cual, la ecuación [10] queda en la forma siguiente:

$$\frac{A^2 - B^2}{2 A B} \operatorname{sen} A L + \cos A L = \frac{1}{\operatorname{Sh} B L} < \frac{1}{10^5}.$$

Si suponemos el segundo miembro igual a cero, el error que cometemos en el cierre de la ecuación es menor que una unidad de cuarto orden decimal, y tendremos:

$$\frac{A^2 - B^2}{2 A B} \operatorname{sen} A L + \cos A L = 0;$$

de donde:

$$\operatorname{tg} A L = \frac{2 A B}{B^2 - A^2};$$

sustituyendo A y B por sus valores, deducidos de las ecuaciones de condición [5], nos queda:

$$\operatorname{tg} A L = \frac{2 \sqrt{a c}}{b}.$$

La aproximación es suficiente, pues se obtiene el valor de $\operatorname{tg} A L$ con cuatro cifras decimales exactas, lo que permite conocer $A L$ con error menor de un minuto.

Sustituyendo A por su valor [11], que es:

$$A = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 + 4 a c}}{2 a}},$$

resulta:

$$\operatorname{tg} A L = \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4 a c}{b^2}}}{\frac{2 a}{b L^2}}} = \sqrt{\frac{4 a c}{b^2}},$$

y si hacemos:

$$\frac{2 a}{b L^2} = N \quad \text{y} \quad \frac{4 a c}{b^2} = Q,$$

la ecuación anterior se reduce a:

$$\operatorname{tg} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + Q}}{N}} = \sqrt{Q}; \quad [12]$$

en la cual, conocido un valor de Q , se obtiene el de N de forma inmediata, aunque el recíproco no sea cierto; pues si partimos de N , tendríamos que resolver por tanteos una ecuación trascendente; esto se evita representando gráficamente dicha ecuación, o calculando unas tablas de valores. El agrupar los parámetros a , b y c , como lo hemos hecho, tiene su explicación en la interpretación física de las magnitudes que representan Q y N .

Sustituyendo a , b y c por sus valores [4], tendremos:

$$N = \frac{2 a}{b L^2} = \frac{2 E I}{\sigma \Omega L^2} = \frac{K'}{\sigma}; \quad [13]$$

$$Q = \frac{4 a c}{b^2} = \frac{4 E I}{\sigma^2 \Omega^2} \times 4 \pi^2 F^2 \rho \Omega = \frac{16 \pi^2 \rho E I}{\Omega} \left(\frac{F}{\sigma} \right)^2$$

y, por tanto,

$$M = \frac{\sqrt{Q}}{N} = 2 \pi L^2 \sqrt{\frac{\rho \Omega}{E I}} F = K' F. \quad [14]$$

En el planteamiento general del problema que nos hemos propuesto, intervienen, como características de la barra vibrante, su longitud L , la sección Ω , el momento de inercia I , la masa por unidad de volumen

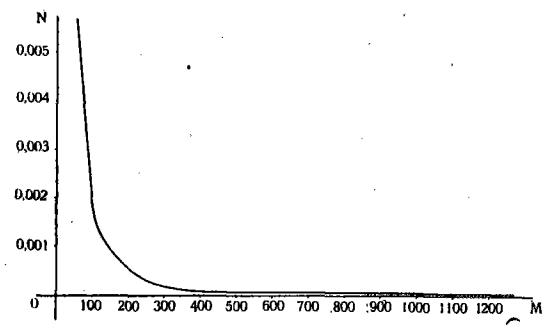


Figura 2.a

ρ y el módulo de elasticidad E ; pero todas estas magnitudes son conocidas en cada caso particular, quedando, como variables, σ y F , tensión y frecuencia de la barra, que vienen unidas por la ecuación [12].

Si en vez de representar la curva que une los valores de Q y N , cuando éstos cumplen dicha ecuación, lo hacemos tomando como abscisas M y como ordenadas N , tendremos el problema resuelto, pues son funciones de σ o F por separado.

Dicha curva es la representada en la fig. 2.^a.

Estudiando la fig. 2.^a se observa que la forma aproximadamente hiperbólica de la curva no es la más conveniente para nuestros fines, pues la escasa oblicuidad de gran parte de ella con los ejes disminuye la aproximación de los resultados; por esto hemos preferido representar otra que tenga por abscisas $\log M$, y por ordenadas, $\log N$, con lo cual la nueva curva es la de la fig. 3.^a.

Hemos calculado 33 puntos, que cumplen con la condición [12], partiendo de valores arbitrarios de Q , con los siguientes resultados:

| $\log M$ | $\log N$ | $\log M$ | $\log N$ |
|----------|----------|----------|----------|
| 3,0077 | 5,3011 | 1,5709 | 2,4291 |
| 2,8095 | 5,6968 | 1,5539 | 2,4917 |
| 2,7123 | 5,8978 | 1,5323 | 2,5593 |
| 2,6141 | 4,1053 | 1,5149 | 2,6288 |
| 2,3039 | 4,7177 | 1,4969 | 2,6906 |
| 2,1426 | 3,0569 | 1,4828 | 2,7558 |
| 2,0293 | 3,2983 | 1,4675 | 2,8253 |
| 1,9453 | 3,4828 | 1,4538 | 2,8982 |
| 1,8779 | 3,6338 | 1,4391 | 2,9767 |
| 1,8214 | 3,7628 | 1,4252 | 1,0330 |
| 1,7872 | 3,8614 | 1,4119 | 1,1600 |
| 1,7354 | 3,9717 | 1,3976 | 1,2749 |
| 1,7003 | 2,0611 | 1,3855 | 1,4148 |
| 1,6691 | 2,1434 | 1,3726 | 1,6058 |
| 1,6410 | 2,2202 | 1,3595 | 1,9211 |
| 1,6160 | 2,2924 | 1,3507 | 0,4070 |
| 1,5923 | 2,3621 | | |

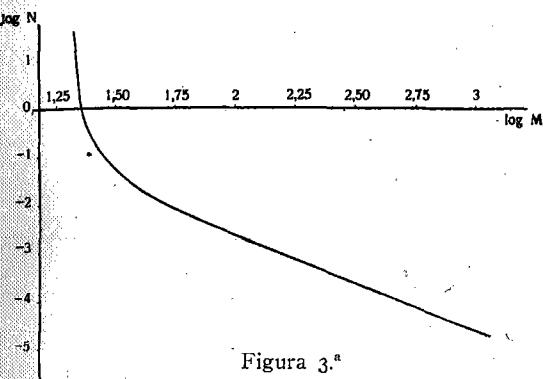


Figura 3.^a

Con estos puntos puede dibujarse la curva con aproximación suficiente, o, aprovechando los valores del cuadro, interpolar linealmente.

A continuación exponemos un resumen del método de cálculo, con un ejemplo de cada uno de los dos problemas que suelen presentarse.

Son datos de ambos problemas las siguientes características de la barra vibrante:

$$L = \text{longitud en cm.}$$

$$\Omega = \text{sección en cm.}^2$$

$$I = \text{momento de inercia en cm.}^4$$

$$E = \text{módulo de elasticidad en Kg./cm.}^2$$

$$\rho = \text{masa por unidad de volumen en } \frac{\text{Kg. (masa)}}{\text{cm.}^3}$$

Problema 1.^a. Se conoce la tensión σ de la barra en Kg./cm.^2 , y queremos calcular F en vibraciones por segundo.

Aplicando la fórmula [13]:

$$N = \frac{2EI}{\sigma \Omega L^2},$$

se conoce N , y, por tanto, $\log N$; entrando en la curva o en el cuadro con este valor se obtiene el de $\log M$, y hallando su antilogaritmo resulta M .

De la fórmula [14] se deduce que:

$$F = \frac{M}{2\pi L^2 \sqrt{\frac{\rho \Omega}{EI}}}.$$

En donde se conocen todas las magnitudes que entran en el segundo miembro, y, como resultado, la frecuencia F de la vibración.

Ejemplo. — Un redondo de acero, de 32 mm. de diámetro y 6,40 m. de luz, está empotrado por sus dos extremos, y queremos que trabaje a 335 Kg./cm.^2 . ¿Cuál será su frecuencia, cuando esta barra vibre por efectos de una causa exterior?

Siguiendo la marcha indicada, son datos:

$$L = 640 \text{ cm.}$$

$$\Omega = 8,04 \text{ cm.}^2$$

$$I = 5,1472 \text{ cm.}^4$$

$$E = 2100000 \text{ Kg./cm.}^2$$

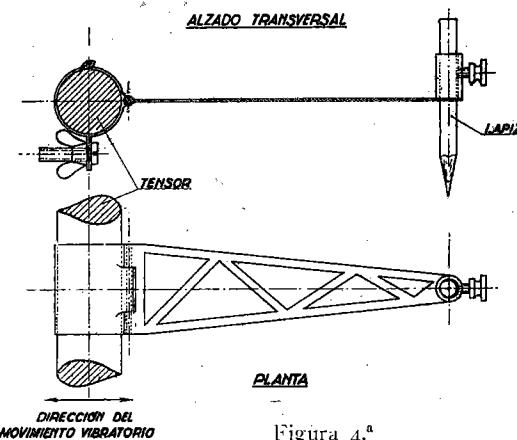
$$\rho = \frac{7,85}{981 \times 10^3} \frac{\text{Kg. (masa)}}{\text{cm.}^3} = 8 \times 10^{-6} \frac{\text{Kg. (masa)}}{\text{cm.}^3}$$

$$\sigma = 335 \text{ Kg./cm.}^2$$

$$N = \frac{2EI}{\sigma \Omega L^2} = 0,018755 \quad \log N = 2,2731.$$

Interpolando linealmente en el cuadro, se obtiene:

$$\log M = 1,6227, \quad y, \text{ por tanto, } M = 41,98,$$

Figura 4.^a

luego:

$$F = \frac{41,98}{2 \pi L^2 \sqrt{\frac{\rho \Omega}{EI}}} = \frac{41,98}{6,25} = 6,7 \text{ vibraciones/segundo.}$$

Problema 2.^a Haciendo vibrar una barra empotrada, se cuentan el número de vibraciones en un tiem-

Figura 5.^a

po determinado, y, por tanto, se conoce la frecuencia; ¿a qué tensión está la barra?

Aplicando la fórmula [14]:

$$M = 2 \pi L^2 F \sqrt{\frac{\rho \Omega}{EI}},$$

calculamos M , y, por tanto, es conocido $\log M$; entrando con este valor en el cuadro o en la curva, obtenemos $\log N$, y con la fórmula [13] el valor:

$$\sigma = \frac{2 EI}{N \Omega L^2},$$

de la tensión a que está sometida la barra.

Ejemplo. — Una barra de acero de sección circular y 12 mm. de diámetro está empotrada y tiene una longitud de 5,75 m.; al hacerla vibrar con un golpe de martillo da 176 vibraciones en 20 segundos. ¿A qué tracción está sometida?

Con la notación usada por nosotros, son datos del problema:

$$L = 575 \text{ cm.}$$

$$\Omega = 1,1310 \text{ cm.}^2$$

$$I = 0,1018 \text{ cm.}^4$$

$$E = 2100000 \text{ Kg./cm.}^2$$

$$\rho = \frac{7,85}{981 \times 10^3} = 8 \times 10^{-6} \text{ Kg./cm.}^3$$

$$F = \frac{176}{20} = 8,8 \text{ vibraciones/segundo.}$$

Con las fórmulas indicadas:

$$M = 118,4 \quad \text{y} \quad \log M = 2,073.$$

Figura 6.^a

Entrando con este valor en la curva representada en la figura 3.^a, se obtiene:

$$\log N = 3,201 \text{ y de aquí } N = 0,00159,$$

resultando:

$$\sigma = 720 \text{ Kg./cm.}^2,$$

que es la tensión buscada.

Cuando decimos que utilizamos la curva de la figura 3.^a nos referimos a una construida con escalas convenientes para poder obtener con aproximación tres cifras decimales por lo menos.

Sólo nos resta describir los ensayos que hemos

realizado, para comprobar la teoría, en el Laboratorio Central.

Las barras ensayadas fueron redondos de 12 y 32 mm. de diámetro del acero usado corrientemente en la construcción; sometidas a tracción en la máqui-

chapa horizontal, portadora de un lápiz vertical, como se indica en la figura 4.^a.

El lápiz dibuja la vibración sobre un disco de papel (fig. 5.^a) en el que van apuntados los datos del ensayo. Al girar el disco en un plano horizontal, queda

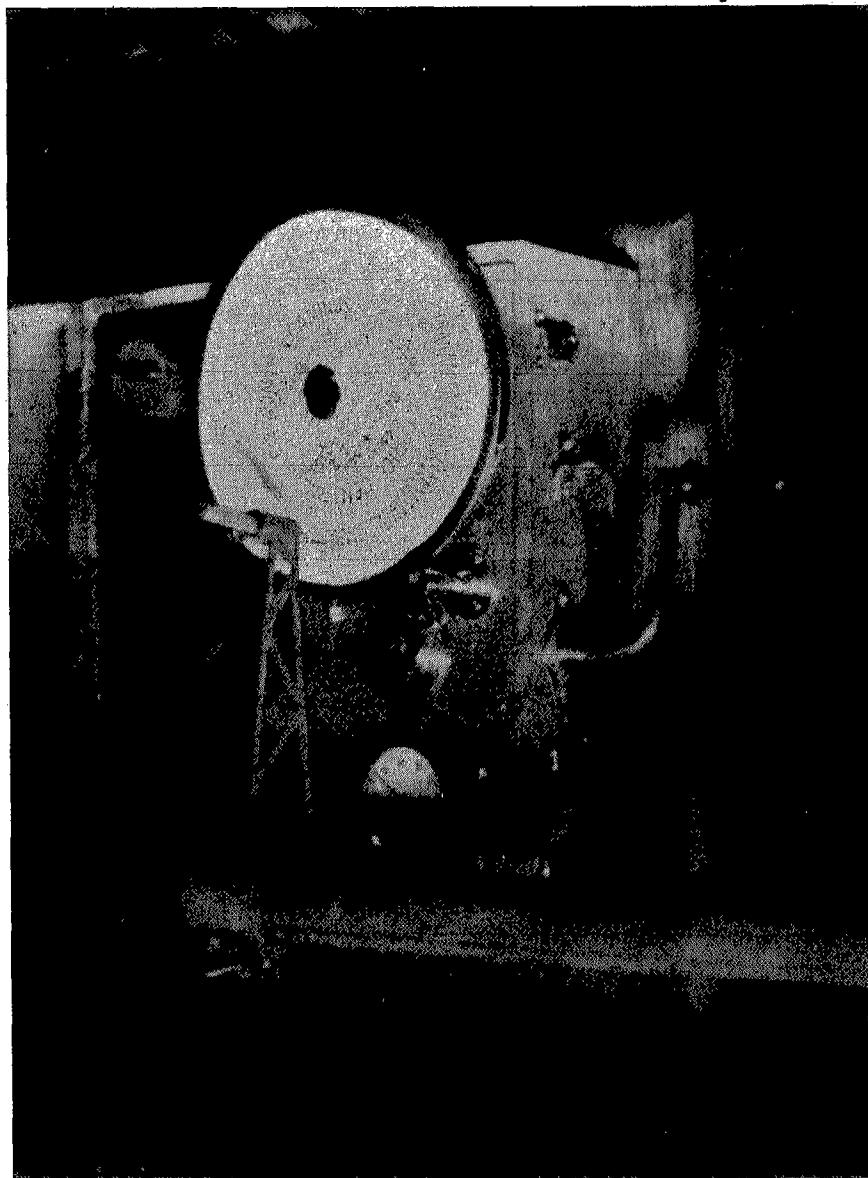


Figura 7.^a

na universal, se les hizo vibrar con un golpe de martillo o tirando transversalmente y a mano del punto medio de la luz de la barra y soltando rápidamente.

Para contar las vibraciones las registrábamos gráficamente con el siguiente dispositivo: A la barra se le sujetaba una abrazadera que va articulada a una

dibujada la vibración en forma análoga a la de la figura 6.^a.

El mecanismo usado para hacer girar el disco es de relojería, parecido al de un gramófono, y su velocidad angular está regulada para que dé una vuelta en veinticinco segundos.

El tiempo de duración del ensayo se mide con un cronómetro, dejando caer el lápiz y levantándole al pasar veinte segundos.

La fotografía de la figura 7.^a muestra el conjunto del dispositivo montado.

Los aparatos fueron fabricados por la Casa "Icon", de acuerdo con estas ideas, y aprovechamos la ocasión para darles las gracias por las facilidades que nos dieron para modificarlos según fué aconsejando la práctica de los ensayos.

Para comprobar la teoría se sometió un redondo de 32 mm. de diámetro y 6,40 m. de longitud, a 5 tensiones diferentes, y otro redondo de 12 mm. de diámetro y 5,75 m. de largo, a 2 tensiones, haciendo 10 ensayos para cada tracción.

Calculadas teóricamente las frecuencias por el método expuesto anteriormente, y tomando como resultado práctico, para cada tensión, la media aritmética de los 10 ensayos, las diferencias que se obtuvieron entre la teoría expuesta y la experimentación fueron menores del 3 por 100. Los resultados se reúnen en el cuadro siguiente:

| Diámetro de la barra en mm. | Tracciones en Kg./cm. ² | FRECUENCIAS | | Diferencias en % |
|-----------------------------|------------------------------------|-------------|----------|------------------|
| | | Teórica | Práctica | |
| 32 | 335 | 6,7 | 6,8 | 1,15 |
| 32 | 435 | 7,3 | 7,5 | 2,70 |
| 32 | 700 | 8,6 | 8,7 | 1,16 |
| 32 | 1 000 | 10 | 10,1 | 1,00 |
| 32 | 1 200 | 10,7 | 10,8 | 0,93 |
| 12 | 720 | 8,8 | 8,9 | 1,15 |
| 12 | 1 000 | 10,3 | 10,6 | 2,91 |

Aplicación del método a las barras vibrantes con manguito roscado.

En nuestros ensayos las barras se tesaban con una máquina del Laboratorio, pero en las obras, salvo en aquellos casos en que se sacan los extremos de las armaduras del hormigón para poder tirar de ellos, lo corriente es producir la tracción por otros métodos. Uno de ellos, bastante usado por sus buenos resultados, consiste en cortar la barra y unir estos extremos previamente roscados, con un manguito que la tesa al girar.

Este dispositivo introduce una modificación importante en una de las hipótesis del método, pues la barra deja de tener sección uniforme, ya que el manguito tensor es un aumento de peso que está localizado en una sección.

Para valorar la influencia de esta modificación hicimos 30 tipos de pruebas con un redondo de 32 milímetros y 6,40 m. de luz, variando de unas a otras la tracción, el peso del manguito y su situación respecto a la longitud de la barra, repitiendo cada ensayo 10 veces para obtener la media.

Los resultados teóricos, suponiendo la barra con una sección uniforme, se obtuvieron siguiendo el método general. En los ensayos prácticos hicimos dos grupos: uno, con manguitos de 3 pesos distintos, situados a 1/4 de la luz total, y el otro, con los mismos manguitos en la mitad de la luz. Los resultados obtenidos, con las diferencias en tanto por ciento entre teoría y práctica, son los siguientes:

Manguito tensor a 1/4 de la luz.

| σ en Kg./cm. ² | Frecuencia teórica | Peso del manguito 2,360 Kg. | | Peso del manguito 8,620 Kg. | | Peso del manguito 13,110 Kg. | |
|---------------------------|--------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|------------------------------|-----------------|
| | | Frecuencia práctica | Diferencia en % | Frecuencia práctica | Diferencia en % | Frecuencia práctica | Diferencia en % |
| 335 | 6,7 | 6,6 | 1,5 | 6 | 10,5 | 5,8 | 14,5 |
| 435 | 7,3 | 7 | 4,1 | 6,6 | 9,6 | 6,5 | 11,0 |
| 700 | 8,6 | 8,3 | 3,5 | 8,1 | 5,8 | 7,6 | 12,8 |
| 1 000 | 10 | 10 | 0 | 9 | 10 | 8,5 | 15 |
| 1 200 | 10,7 | 10,7 | 0 | 9,9 | 7,5 | 9 | 15,9 |

Manguito tensor a 1/2 de la luz.

| σ en Kg./cm. ² | Frecuencia teórica | Peso del manguito 2,360 Kg. | | Peso del manguito 8,620 Kg. | | Peso del manguito 13,110 Kg. | |
|---------------------------|--------------------|-----------------------------|-----------------|-----------------------------|-----------------|------------------------------|-----------------|
| | | Frecuencia práctica | Diferencia en % | Frecuencia práctica | Diferencia en % | Frecuencia práctica | Diferencia en % |
| 335 | 6,7 | 6,4 | 4,5 | 5,6 | 16,5 | 5 | 25,4 |
| 435 | 7,3 | 7 | 4,1 | 6,0 | 17,8 | 5,4 | 26 |
| 700 | 8,6 | 8,3 | 3,7 | 7,1 | 17,5 | 6,5 | 24,5 |
| 1 000 | 10 | 9,6 | 4 | 8,2 | 18 | 7,4 | 26 |
| 1 200 | 10,7 | 9,9 | 7,4 | 8,7 | 18,5 | 8,4 | 21,5 |

Del estudio de ambos cuadros se pueden sacar las siguientes conclusiones:

1.^a El manguito, cualquiera que sea su peso o situación, disminuye la frecuencia de la vibración, como se deduciría de la teoría.

2.^a Las diferencias entre la teoría y la experimentación aumentan al aumentar el peso del manguito.

3.^a La tensión a que trabaja la barra, sea baja o

alta, no influye sensiblemente en las diferencias que observamos.

4.^a Estas diferencias aumentan al situar el manguito en el centro de la longitud de la barra y disminuyen al acercarle a un extremo.

Tenemos, pues, que buscar un factor de corrección, c , que, multiplicado por la frecuencia teórica, la disminuya hasta lograr que, en cada caso, las diferencias entre los resultados teóricos y prácticos sean aceptables.

El factor c será función del lugar en que está colocado el manguito tensor y del peso de éste, pero teniendo en cuenta que la influencia del peso del

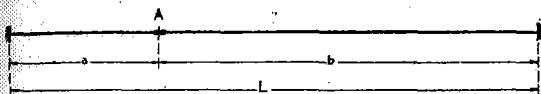


Figura 8.^a

manguito dependerá del de la barra en que está colocado, tomaremos, como causa de variación, el cociente entre el peso total del manguito, más la barra y el peso de ésta; a este cociente le llamaremos q , y siempre se cumplirá que $q \geq 1$.

Colocado el manguito en un punto, por ejemplo, el A de la figura 8.^a, su posición quedará fijada por la relación $S = \frac{a}{L}$, siendo $a < b$, y por tanto, $0 < S < \frac{1}{2}$. Vemos que $c = f(s, q)$.

Tanteando diversas formas de $f(s, q)$ que cumplan las conclusiones expuestas y que al mismo tiempo satisfagan los casos límites, hemos adoptado la fórmula:

$$c = q^{-2s};$$

en la cual el valor de c es menor que la unidad, y disminuye al aumentar q o s .

Los casos límites que pueden presentarse son dos:

1.^a Estando el manguito en un punto fijo, s constante, va disminuyendo de peso hasta desaparecer:

$$\lim_{q \rightarrow 1} c = 1^{-2s} = 1.$$

2.^a El manguito tiene un peso constante, q , y se traslada hacia un extremo, hasta llegar a perderse:

$$\lim_{s \rightarrow 0} c = q^0 = 1.$$

En ambos casos los resultados concuerdan con la realidad, pues al no existir el manguito, c debe ser igual a uno.

Aplicando la fórmula $c = q^{-2s}$ a los ensayos anteriores, en los que las diferencias entre la teoría y la práctica llegaban al 26 por 100, éstas se reducen y en ningún caso pasan del 4 por 100, límite que consideramos bien aceptable.

Para comprobar más aún la validez de la fórmula, se han hecho ensayos a diversas tensiones con un redondo de 12 mm. de diámetro y 5,75 m. de largo, al que se le han aplicado manguitos de 0,700 kilogramos y 1,530 Kg. de peso, situados a $1/4$ y a $1/2$ de la longitud de la barra, obteniéndose diferencias, entre los resultados teóricos y los prácticos, que han llegado a un 25,6 por 100 de la frecuencia, y que se han reducido, aun en el caso más desfavorable, al 3,66 por 100, con la aplicación de la fórmula que proponemos.

Terminamos estas líneas exponiendo un ejemplo de la aplicación de esta variante que, unido a los dos que incluimos anteriormente, permitirá resolver con claridad los casos que puedan presentarse:

Ejemplo. — Un redondo de acero de 32 mm. de diámetro y 6,40 de longitud, está empotrado por sus extremos y se le tesa con un manguito roscado de 8,620 Kg. de peso, situado a 1,60 m. de un extremo. Queremos que trabaje a 700 Kg./cm.². ¿Cuál será la frecuencia de una vibración producida exteriormente?

Suponiendo que la barra es de sección uniforme y no existe el manguito, se puede aplicar el método general, como vimos.

Son datos:

$$L = 640 \text{ cm.}^2$$

$$\Omega = 8,04 \text{ cm.}^2$$

$$I = 5,1472 \text{ cm.}^4$$

$$E = 2100000 \text{ Kg./cm.}^2$$

$$\rho = 8 \times 10^{-6} \frac{\text{Kg. (masa)}}{\text{cm.}^3}$$

$$\sigma = 700 \text{ Kg./cm.}^2$$

Por tanto:

$$N = \frac{2EI}{\sigma \Omega L^2} = 0,009378 \quad y \quad \log N = 3,9721.$$

Entrando en el cuadro de valores o en la curva de la figura 3.^a, con este valor de $\log N$ se obtiene:

$$\log M = 1,733;$$

de donde:

$$M = 54,08,$$

resultando:

$$F = \frac{M}{2 \pi L^2 \sqrt{\frac{\rho Q}{EI}}} = 8,6.$$

Teniendo en cuenta ahora la influencia del manguito roscado, calculamos el valor del factor c por la fórmula:

$$c = q^{-2} s$$

en la cual:

$$S = \frac{1,60}{6,40} = \frac{1}{4}.$$

El peso de la barra es de:

$$6,40 \times 0,804 \times 7,85 = 40,393 \text{ Kg.}$$

de donde:

$$q = \frac{40,393 + 8,620}{40,393} = 1,2134,$$

resultando:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1,2134}} = 0,908,$$

y la frecuencia teórica corregida será de:

$$8,6 \times 0,908 = 7,81 \frac{\text{vibraciones}}{\text{segundo}}$$

Reproducido este caso en el Laboratorio Central se obtuvo, en una frecuencia media de 10 ensayos, 8,1 vibraciones por segundo, siendo la diferencia entre este resultado y el teórico, de 3,7 por 100.

A título de curiosidad diremos que, después de afinados los aparatos, el número de ensayos realizados asciende a 450, habiéndose contado, para calcular las frecuencias, un total de 71 821 vibraciones.