

# EL GOLPE DE ARIETE SOLUCION GRAFICA GENERAL

Por EUGENIO VALLARINO, Ingeniero de Caminos.

*Después del estudio del fenómeno, hecho en el número anterior, el autor pasa a exponer los fundamentos del método gráfico y hace la aplicación al caso tipo de Allievi, del que presenta un detenido análisis.*

## II

### Método gráfico de Bergeron.

La dificultad práctica del método analítico estriba en el desconocimiento de la función  $F$  y la imposibilidad de hallarla, en la mayor parte de los casos, partiendo de los datos del problema. Por esta razón resulta muy conveniente eliminarla, lo que equivale a encontrar una relación entre  $v$  y  $h$ . Obsérvese, además, que como las condiciones en los límites ( $A$  y  $B$ ) suelen ser presiones o velocidades — presión en función del tiempo, en  $B$ ; velocidades en cada instante, en  $A$  —, estamos en la mejor situación para obtener los parámetros del problema.

Vamos a imaginar que, en un cierto instante, tenemos en una sección cualquiera,  $P$ , de la tubería (figura 3.<sup>a</sup>) la presión  $h_p$  y velocidad  $v_p$ , lo cual expresaremos más brevemente diciendo que el estado en  $P$  para ese instante es el  $(h_p, v_p)$ .

Supongamos un observador que parte de  $P$  en esas condiciones y marcha hacia  $B$  con velocidad uniforme  $a$ . En su recorrido  $PB$  encontrará distintos estados  $(h, v)$ , que vendrían determinados por las ecuaciones [4] y [5]. Pero como quiera que se mueve de la misma manera que el conjunto de ondas de transmisión que se integran en  $F$ , el valor de ésta resulta invariable para dicho observador e igual a la ordenada  $F_p$  en el momento inicial, siendo las ondas integradas en  $F$  las únicas que determinarán la variación de estado  $(h, v)$ . Por lo tanto, el estado encontrado por el observador en un instante cualquiera de su recorrido vendrá determinado por:

$$h - h_0 = F_p + f \tag{7}$$

$$v - v_0 = \frac{g}{a} (F_p - f) \tag{8}$$

y eliminando entre ambas la función  $f$ :

$$h - h_0 = \frac{a}{g} (v - v_0) + 2 F_p \tag{9}$$

Como las condiciones iniciales en el punto  $P$  son

conocidas,  $F_p$  se halla particularizando la ecuación [9] para el estado de partida en  $P$ :

$$h_p - h_0 = \frac{a}{g} (v_p - v_0) + 2 F_p; \tag{10}$$

obteniéndose de [9] y [10]:

$$h - h_p = \frac{a}{g} (v - v_p) \tag{11}$$

que nos manifiesta que los distintos estados que vamos encontrando en nuestra traslación en sentido  $AB$  con velocidad  $a$  pueden representarse por medio de una recta de coeficiente angular  $\frac{a}{g}$  en un sistema de coordenadas presión-velocidad.

De una manera enteramente análoga se obtiene que, al desplazarnos con la onda  $f$ , o sea en sentido  $BA$  con velocidad  $a$ , encontraríamos distintos estados, tales que:

$$h - h_p = - \frac{a}{g} (v - v_p) \tag{12}$$

que en el sistema de representación elegido representa otra recta igual y contrariamente inclinada que la anterior respecto a los ejes coordenados. Una y otra rectas pasan por el punto  $P$ , cuyo estado  $(h_p, v_p)$  en un instante dado, se supone conocido.

En general, resulta más cómodo operar con caudales que con velocidades. Como  $q = sv$ , las ecuaciones [A] y [B] darán lugar a rectas  $(qh)$  de coeficiente angular  $\pm \frac{a}{gs}$ .

Hemos obtenido, pues, dos series de rectas paralelas cuyos diferentes puntos representan todos los estados que vamos encontrando al trasladarnos con velocidad  $a$  a lo largo de la tubería en uno u otro sentido. Por medio de ellas podemos obtener el estado  $(hq)$  en cualquier instante, en una sección cual-



condiciones iniciales, pues como la onda  $\varphi = F$  de propagación nos va acompañando, es a nuestro paso que se modifica el estado de cada punto; ya que, por otra parte, la onda  $f$  no existe todavía por no haberse reflejado aún en  $B$  la onda  $F$ . Por lo tanto, el punto  $1 B$  se confundirá también con los  $0 A$  y  $0 B$ .

Siguiendo ahora el recorrido natural de la transmisión de la variación ocurrida en  $A$ , salimos de  $B$  en el tiempo  $1$  con la onda  $F$  reflejada, esto es, con la  $f$  en sentido  $B A$  y llegaremos a  $A$  en el tiempo  $2$ . Todos los estados encontrados en el recorrido estarán sobre la recta  $0 A-2 A$  de coeficiente angular  $-\frac{a}{g s}$  (\*), en particular el estado del punto  $A$  en el tiempo  $2$ . Pero en este instante  $2$  la ley del cierre nos dará  $S_2 = \psi(2)$  y, tratándose de una turbina, su curva característica  $(h, q)$  será una parábola de ecuación

$$q = K S_2 \sqrt{2gh}; (**)$$

luego el estado de la sección  $A$  en el tiempo  $2$  vendría representado en el diagrama  $(h, q)$  por un punto que será el punto de funcionamiento del conjunto tubería-turbina y habrá de estar en la intersección de las curvas características de una y otra; luego será el punto  $2 A$  común a la recta  $0 A-2 A$  y a la parábola definida por la ecuación [13], que en el gráfico se nota con  $S_2$ .

Sigamos el recorrido de la onda: al llegar al punto  $A$ , se refleja, invierte e interfiere con la  $\varphi$  que se sigue produciendo y marcha hacia  $B$ . Siguiéndola en su translación, recorreremos una serie de estados representados por la recta  $2 A-3 B$  de coeficiente angular  $\frac{a}{g s}$ , encontrando el punto  $3 B$  en la intersección de esta recta con la curva característica del depósito, que es la recta horizontal  $M N$ . De otra forma: en el punto  $B$  ha de existir siempre la presión  $h_0$  — a causa de la permanencia de nivel en el depósito —; luego el punto  $3 B$  será el de la recta  $2 A-3 B$  que tenga esa ordenada.

La onda se refleja en  $B$  y se dirige ahora hacia  $A$ , llegando a este punto en el tiempo  $4$  y, en este instante, como el obturador está completamente cerrado, la curva característica análoga a la [13] será

(\*) Este coeficiente (del orden de 100) es muy grande, y por esta causa deben elegirse las escalas convenientemente para que el gráfico resulte claro. En la figura 4.<sup>a</sup> deberá tenerse en cuenta, al juzgar los resultados, que las  $h$  están muy acortadas en proporción a las  $q$ .

(\*\*) Las parábolas correspondientes a los distintos tiempos se dibujan fácilmente en cuanto se conoce la ley del cierre. En la figura, y para mayor sencillez, se ha supuesto esta ley lineal, y entonces las parábolas son afines con eje de afinidad el  $h$  y dirección de afinidad la del eje  $q$ .

$q_4 = 0$ , es decir, el eje  $h$ . El punto  $4 A$  se obtendrá por intersección de la recta  $3 B-4 A$ , de coeficiente angular  $-\frac{a}{g s}$  con dicho eje.

Con la nueva reflexión de la onda en  $A$ , se llega a  $B$  en el instante  $5 B$ , que se obtiene de manera análoga al  $3 B$ . Obsérvese que en este instante resulta un caudal negativo; luego ocurre como si el cierre en  $A$  hubiera producido una contravelocidad de sentido  $A B$  que, primero ha disminuído el caudal inicial y después lo ha anulado e incluso invertido de signo. Como quiera que no hay aportación alguna, pues el obturador en  $A$  está completamente cerrado desde el instante  $4$ , el caudal negativo — por otra

parte pequeño, pues el coeficiente angular  $\frac{a}{g s}$  es siempre grande — se logrará a costa de la deformación de la tubería. Continuando en la misma forma, obtendríamos  $6 A, 7 B, 8 A$ , todos los  $A$  en el eje  $h$ , puesto que en ese punto, por estar cerrado el obturador, el caudal ha de ser nulo, y los  $B$  en la recta  $M N$  por ser en  $B$  el nivel constante. Como el punto  $8 A$  coincide con el  $4 A$ , en lo sucesivo se repetirán los puntos  $5 B, 6 A$ , etc., dando lugar a una oscilación periódica de período  $4 = 2\theta$ , es decir, el tiempo de cierre.

Observemos que, con los recorridos hechos anteriormente, sólo obtenemos estados para tiempos pares en  $B$  e impares en  $A$ . Para completar la serie de ellos, en vez de salir de  $A$ , lo haremos ahora desde  $B$  en el tiempo  $0$ . Los estados que nos vamos encontrando estarán sobre la misma recta, antes trazada,  $0 B-2 A$ , llegando a  $A$  en el tiempo  $1$  y estando el punto  $1 A$  representativo de dicho estado en la intersección de dicha recta con la parábola  $S_1$  correspondiente a la abertura  $S_1 = \psi(1)$  del obturador. De manera análoga a como lo hicimos anteriormente iremos obteniendo los puntos  $2 B, 3 A$  y  $4 B$ . A partir de éste se obtienen  $5 A, 6 B, 7 A$  y  $8 B$ , coincidiendo este último con  $4 B$  y dando origen a la repetición del fenómeno con período  $4 = 2\theta$ , como anteriormente encontramos (\*).

Con el gráfico  $(h, q)$ , está suficientemente definido el fenómeno. No obstante, queremos señalar que de dicho diagrama se pueden obtener, tanto la curva  $(h, t)$  que da la variación de la presión con el tiempo en una sección dada, como la  $(h, x)$  que define la distribución de presiones a lo largo de la tubería en el instante determinado, y ambas dan una idea muy clara de cómo se desarrollan las cosas.

(\*) Si el tiempo de cierre hubiese sido inconmensurable con  $\theta$ , como es lo más frecuente, la oscilación se amortiguaría. En otros ejemplos veremos casos de esta clase, pues en este primero solamente tratamos de dejar claros el fundamento y práctica del método.

Veamos, por ejemplo, las curvas  $(h, t)$  para los extremos  $B$  y  $A$  (fig. 6.<sup>a</sup>). Para  $B$  esta curva resulta ser una recta horizontal, puesto que la presión en ese extremo se mantiene constante. Para dibujar la curva correspondiente a  $A$  es preciso conocer otros puntos, además de los  $0A, 1A, 2A$ , etc., ya obtenidos.

parábola  $S_{1/4}$ . Lo mismo razonaríamos para los puntos  $\frac{1}{2}A, \frac{3}{4}A$ , etc. Partiendo ahora de estos puntos llegaríamos a  $B$  con una diferencia de 1 en el tiempo, y como sabemos que los estados que encontramos en esa translación están en una recta paralela a la  $2A-3B$ , será inmediato el encontrar los puntos  $1\frac{1}{4}B, 1\frac{1}{2}B, 1\frac{3}{4}B, \dots, 2\frac{3}{4}B$ . Y análogamente, arrancando de estos últimos puntos, llegaremos a los  $2\frac{1}{4}A, 2\frac{1}{2}A, 2\frac{3}{4}A, \dots$ , sin más que trazar las paralelas a  $0B-1A$  hasta cortar a las parábolas  $S_{2\frac{1}{4}}, S_{2\frac{1}{2}}, S_{2\frac{3}{4}}, \dots$ . Puede verse que desde  $0A$  a  $2A$  todos los puntos representativos de los estados en  $A$  se encuentran sobre la recta  $0A-2A$ , y a partir de este momento los puntos se hallan sobre rectas distintas. Es fácil explicarlo: hasta llegar el instante 2, en  $A$  existe únicamente la onda  $F$ , pues

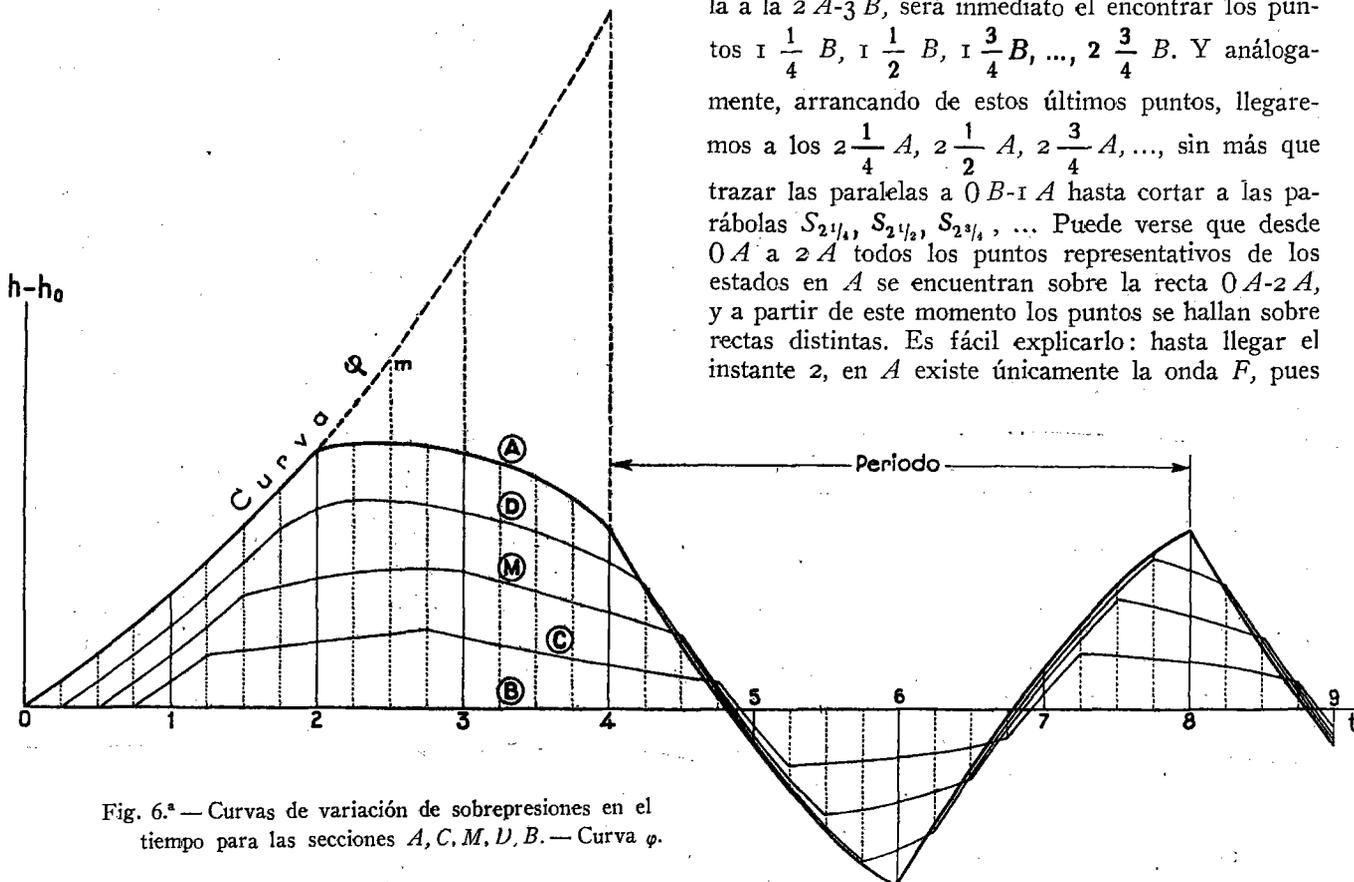


Fig. 6.<sup>a</sup> — Curvas de variación de sobrepresiones en el tiempo para las secciones  $A, C, M, D, B$ . — Curva  $\phi$ .

Refiriéndonos nuevamente a la figura 5.<sup>a</sup>, es fácil ver que los puntos  $\frac{1}{4}A, \frac{1}{2}A, \frac{3}{4}A$ , etc., que representan los estados de  $A$  en los tiempos  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ , etc., se encontrarán en las intersecciones de la recta  $0B-1A$  con las parábolas  $S_{1/4}, S_{1/2}, S_{3/4}$ , correspondientes a las respectivas aberturas del obturador en esos instantes. En efecto: partiendo de  $D$  en el instante inicial y con velocidad  $a$ , llegamos a  $A$  en el tiempo  $1/4$ , encontrándonos con que el punto de funcionamiento en  $A$  estará sobre la parábola  $S_{1/4}$ . Pero el punto  $0D$  coincidirá con el  $0B$  en el diagrama de la figura 5.<sup>a</sup>, puesto que inicialmente en  $D$  existe la presión  $h_0$  y pasa el caudal  $q_0$ ; luego los estados encontrados en la translación  $DA$  han de estar sobre la recta  $0D-1A$  ó  $0B-1A$  y el punto  $1/4A$  estará, por tanto, en la intersección de dicha recta con la

aún no ha tenido tiempo de llegar la onda  $f$ , que se inicia en  $B$  con el tiempo 1.

Lo mismo obtendríamos los demás puntos, que no se señalan en la figura 5.<sup>a</sup> en gracia a la claridad.

Llevadas ahora las ordenadas de los diversos puntos obtenidos sobre un diagrama  $(h, t)$ , tendremos (fig. 6.<sup>a</sup>) la representación de la variación de la presión en  $A$  en el tiempo. En este gráfico se ve con toda claridad el fenómeno oscilatorio y, sobre todo, se comprende mejor la fase última, en que el movimiento se transforma en periódico. Observando esta figura y la 4.<sup>a</sup>, podemos analizar físicamente la fase periódica de la siguiente manera: Al terminar el cierre en  $A$  tenemos una sobrepresión, la cual producirá una dilatación de la tubería en ese extremo y, merced a su elasticidad, la masa de agua encerrada entre  $A$  y  $B$  tiende a ir hacia este último, surgiendo el caudal negativo que se ve existe en  $4B$ . Esta tendencia continúa hasta que en  $A$  vuelve la tubería a sus pri-

mitivas dimensiones, pero el agua sigue trasladándose hacia *B*, a causa de su inercia, provocando en *A* una depresión que es máxima en el instante 6 y que tiende a frenar la marcha del agua hacia *B*. Este efecto se suma con el que produce en el mismo sentido de la enorme masa de agua del depósito *B*, que llega hasta provocar la reflexión completa del flujo, repitiéndose en sentido *B* → *A* el fenómeno expuesto.

Durante todo este proceso, aseméjase el conjunto depósito-tubería a gigantesco y desproporcionado corazón que, con rítmicos movimientos de sístole y diástole, da lugar a un verdadero *latido* en cualquier punto del sistema.

Resulta también interesante dibujar la curva  $\varphi$  u onda producida por el cierre y que, con sucesivas transmisiones, reflexiones e interferencias, origina el fenómeno estudiado. Para ello basta recordar (figura 4.<sup>a</sup>) que dicha curva se identifica con la  $(h, t)$  de sobrepresiones en *A* durante el tiempo de cierre, siempre que la tubería sea suficientemente larga. Luego haciendo abstracción de esta longitud y operando como si fuera indefinida, dibujaremos  $\varphi$  de la misma manera que nos ha servido para obtener la curva *A* de la figura 6.<sup>a</sup>. Obsérvese que hasta el instante 2 (punto 2 *A*, fig. 5.<sup>a</sup>) obtenemos la propia curva *A*. A partir de este momento, es fácil ver que los otros puntos de  $\varphi$  se encuentran en la misma recta *OA*-2*A*, y en sus intersecciones con las parábolas  $S_{2 \cdot 1/4}, \dots, S_4$ , obtenidas para distintos instantes del cierre. Como ejemplo, y para no complicar la figura ni ocupar excesivo espacio, se ha dibujado únicamente el  $2 \frac{1}{2} A'$  correspondiente al instante  $2 \frac{1}{2}$ , y que en la figura 6.<sup>a</sup> da el punto *m*. Lo mismo se obtendrían los otros puntos hasta el 4 *A'*, que estará en la intersección de la citada recta con el eje *h* y será el último punto de la curva  $\varphi$ . También podría dibujarse ésta partiendo de la curva *A* de la figura 6.<sup>a</sup> y teniendo en cuenta lo que dijimos en la explicación de la figura 4.<sup>a</sup> respecto a la manera de engendrarse la curva *A* y procediendo a la inversa para obtener la originaria  $\varphi$ .

En la misma figura se dibujan también las curvas  $(h, q)$  para las secciones intermedia *C*, *M* y *D*, que pueden obtenerse de dos maneras: o utilizando la curva  $\varphi$ , moviéndola con velocidad *a* y midiendo la ordenada comprendida entre *F* y su reflejada, *f* en la sección de que se trate, como ya se explicó, o bien saliendo de *A* y *B* en tiempos convenientes para que el encuentro se verifique para cada instante en la sección que interesa en cada instante.

Por ejemplo, tratemos de dibujar la curva  $(h, t)$  para la sección *D*. Para el instante 0 la ordenada es  $h_0$ . Para el instante  $1/4$ , y como la única onda que existe hasta ahora es la *F*, la sobrepresión en *D* será la que tiene *A* para  $t = 1/4$ . Lo mismo para los

tiempos siguientes, obteniendo siempre en *D* la sobrepresión que había en *A*  $1/4$  de tiempo antes. Esto, hasta que la onda *F* se refleja y llega la *f* al punto *D*, lo cual ocurre para el tiempo  $1 \frac{3}{4}$ . A partir de este instante, por ejemplo para el  $3 \frac{1}{4}$ , saldríamos de *A* en el instante 3 y de *B* en  $2 \frac{1}{2}$  y, por consiguiente, el punto  $3 \frac{1}{4} D$  se obtendrá de la intersección de las rectas de coeficiente angular  $\frac{a}{gs}$  y  $-\frac{a}{gs}$ , tomadas por  $3 A$  y  $2 \frac{1}{2} B$ , respectivamente.

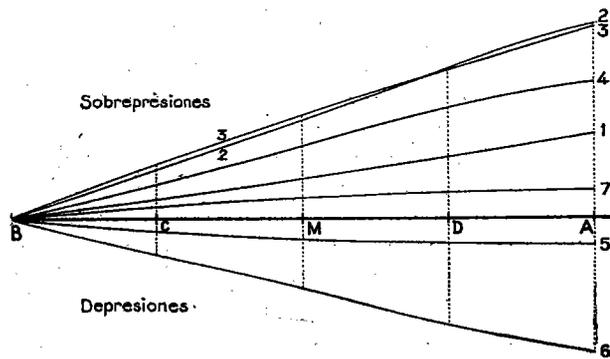


Fig. 7.ª — Curvas de distribución de sobrepresiones a lo largo de la tubería, en ocho instantes diferentes.

Como puede verse, basta hallar los distintos estados en *A* y *B* para tener fácilmente cuantos datos queramos en las restantes secciones.

Análogamente, podemos tomar las presiones en todos los puntos en un instante dado y dibujar la curva  $(h, x)$  de distribución de las mismas a lo largo de la tubería en ese instante o "instantánea" del fenómeno. En la figura 7.<sup>a</sup> se dibujan dichas curvas para los instantes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Estas curvas pueden obtenerse partiendo de las  $(h, t)$  o direc-

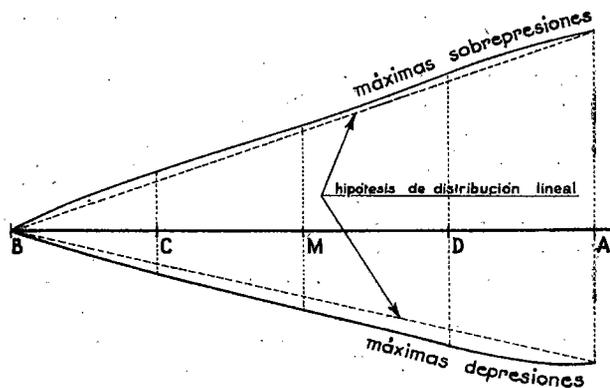


Fig. 8.ª — Máxima sobrepresión y depresión a que está sometida cada sección de la tubería.

tamente del diagrama  $(h, q)$ , de manera análoga a las  $(h, t)$ . Pueden trazarse también por medio de las ondas  $F$  y  $f$ , una vez dibujada la  $\varphi$  como se dijo.

Por último, en la figura 8.<sup>a</sup> se dibujan las curvas de *máximo maximorum* de sobrepresiones y depresiones a lo largo de la conducción. De haber aplicado el método de Allievi, para hallar la máxima sobrepresión o depresión en una sección intermedia de  $AB$  la habríamos calculado para  $A$  y supuesto luego una *distribución lineal* a lo largo de  $AB$ , lo que, como puede verse en la figura, da *presiones menores que las reales*, aunque en este caso particular (ley de cierre lineal y tubería única) no resulta excesiva la diferencia. Esto comprueba nuestra afirmación del principio de este estudio de que dicha hipótesis es simplista y en algunos casos inexacta.

En resumen: por medio del gráfico  $(h, q)$ , tan sencillo de comprender y dibujar, no solamente se sigue el fenómeno físico paso a paso, sino que se llega a determinar — si interesa — la forma de la onda  $\varphi$  y, por consiguiente, de sus ondas reflejadas, pudiendo dibujar el gráfico de la variación de presión con el tiempo de una sección cualquiera, así como la *instantánea* de las ondas de presiones y de la resultante de su interferencia.

#### Otros tipos de cierre. - Apertura.

Cuando la ley del cierre  $S = \psi(t)$  no sea lineal, la única variante en la figura 5.<sup>a</sup>, será que las parábolas [13] no determinarán segmentos iguales en las paralelas al eje de caudales. Pero en cada caso para cada valor de  $t$  obtendremos uno de  $S$ , y sustituyendo en [11] resultará definida la parábola correspondiente. (Puede verse [B]).

La *maniobra parcial* de cierre no presenta dificultad alguna después del estudio que acabamos de hacer.

Por ejemplo, se trata de pasar del caudal  $q_0$  al  $\frac{1}{4}q_0$ . La operación de cierre terminará entonces en el instante 3, y la figura 5.<sup>a</sup> permanecerá invariable a la derecha de la parábola  $s_3$ . Esta curva es ahora la de funcionamiento del obturador en su posición definitiva, cumpliendo el mismo papel que antes tenía el eje  $O h$ . Por lo tanto, el punto  $4B$  permanecerá invariable, pero el  $5A$  se encontrará en la intersección de la recta  $4B-5A$  con la parábola  $s_3$ . El  $6B$  resultaría trazando por el punto así obtenido una parábola a  $5A-6B$  hasta su intersección con  $MN$ , y así sucesivamente. Es decir, los puntos  $5A$ ,  $6A$ ,  $7A$ ,  $8A$ , etc., se encontrarán ahora en  $s_3$ , mientras que los  $4B$ ,  $6B$ , etc., seguirán sobre  $MN$ ; pero, excepto el  $4B$ , todos en distinta posición que en la figura 5.<sup>a</sup>.

La *apertura* se trata de manera enteramente aná-

loga. Tanto de ésta como de maniobras parciales, el lector encontrará suficientes detalles en los casos más complejos que resolveremos en el artículo próximo.

#### Problema general: esquema de la marcha operatoria.

Cuando se obtuvo la propiedad fundamental, cuya expresión analítica son las ecuaciones [11] y [12], esbozamos su utilización en el método gráfico, y para mejor comprensión de éste, invirtiendo el orden lógico y ateniéndonos únicamente al didáctico, pasamos en seguida a analizar el caso más sencillo que se presenta en la práctica. La misma línea de razonamiento que nos hemos trazado exige una mirada hacia atrás que, ordenando y resumiendo el procedimiento seguido, nos dé las ideas lógicas esenciales para poder aplicar el método gráfico a cualquier caso que se nos pueda presentar, y más concretamente a los ejemplos que constituirán el próximo artículo.

El problema general puede enunciarse de la siguiente forma:

Una conducción o sistema de ellas de *características conocidas* (diámetros, espesores, materiales, etcétera) enlaza dos o más partes o elementos de un conjunto hidráulico (una bomba y un depósito, dos bombas, un embalse o cámara de carga y una turbina, etc.), cuyo régimen de funcionamiento se conoce (embalse de nivel constante, curva caudal-presión de una bomba o turbina, etc.). Por una causa cualquiera — provocada a voluntad o no, pero conocida — varían las condiciones de régimen en uno o más puntos. Después de una serie de estados y fenómenos intermedios, la circulación del agua llega a ser la determinada por las nuevas condiciones.

Con estos datos, se desea conocer la serie de fenómenos intermedios a que ha dado lugar el tránsito del primitivo al nuevo régimen.

Para resolver este problema por el método gráfico seguiremos sucesivamente los siguientes pasos:

a) En cada parte de la conducción hallaremos la velocidad  $a$  de transmisión de la onda (fórmula [3]).

b) Se hallan los tiempos  $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta'}{2}, \dots$ , que invierte ésta en transmitirse de uno a otro extremo en cada una de las tuberías del sistema.

c) Se elige un período de tiempo  $\theta_1$  que sea divisor común de  $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta'}{2}, \dots$ , y se divide cada tubería en trozos tales que la onda los recorra en dicho tiempo  $\theta_1$ . Obtenido el m. c. d. de  $\frac{\theta}{2}, \frac{\theta'}{2}, \dots$ , la definitiva elección de  $\theta_1$  entre sus divisores depende del

grado de aproximación que se desee y de la claridad del dibujo.

d) Se dibujan las curvas  $h-q$  (o  $h-v$ , según los casos) de cada uno de los extremos de las tuberías para los tiempos  $\theta_1, 2\theta_1, 3\theta_1, \dots$ , etc. (\*), hasta el instante que interese o hasta que el gráfico señale que se ha llegado al límite de aproximación.

e) Se trazan en el gráfico las direcciones de pendientes  $\frac{a}{g s}$  y  $-\frac{a}{g s}$  para cada trozo. Las escalas se elegirán de manera que estas rectas no se corten con excesiva oblicuidad, ni entre sí ni con las curvas de la fase  $d$ .

f) Los puntos representativos de los estados  $(h, q)$  en distintos tiempos se obtienen de dos maneras: para los extremos de las tuberías, por intersección de la curva de funcionamiento (fase  $d$ ) con una recta de inclinación conocida (fase  $e$ ); para las secciones intermedias, por intersección de dos rectas opuestamente inclinadas.

g) Para la determinación de estas rectas *basta un punto*. Como conocemos las condiciones iniciales en cada sección y no varían hasta que llega a ella la

(\*) En algunos casos, la curva  $h-q$  es única para todos los tiempos.

onda provocada por el extremo, empezaremos por utilizar los puntos representativos de los estados iniciales, trazando por ellos las correspondientes rectas hasta cortar a las curvas de funcionamiento de los extremos. Así obtenemos en éstos los estados  $(h, q)$  para instantes  $\theta_1, 2\theta_1, 3\theta_1$ , etc. Partiendo ahora de estos puntos conocidos, podemos trazar nuevas rectas, y así seguimos hasta obtener el resultado o precisión deseados.

\* \* \*

Y, nuevamente, el razonamiento abstracto no puede dar más de sí. Las fases  $f$  y  $g$ , a fuerza de ser generales, se pierden en la imprecisión. Hemos de acudir de nuevo al ejemplo para que el mecanismo del método quede completamente comprendido, y ello será objeto del próximo artículo.

#### Bibliografía.

[A] a [H]: Véase el artículo anterior.

[I]: BERGERON: "Étude des variations de régime dans les conduites d'eau. Solution graphique générale". *Révue Générale de l'Hydraulique*, 1935, págs. 12 y siguientes.