SOBRE LA EQUIVALENCIA HIDRAULICA DEL RESALTO Y LA ONDA SOLITARIA

Por MARIANO DE LA HOZ, Ingeniero de Caminos.

Demuestra el autor que los fenómenos resalto *y* onda solitaria *son, hidráulicamente, equivalentes, siendo idénticas las fórmulas que se emplean para los dos, y sugiere que se aproveche esta equivalencia para usar indistintamente la experimentación acumulada en ambos fenómenos.*

I. Generalidades sobre la onda solitaria.

En Hidrodinámica suelen clasificarse las ondas en progresivas y estacionarias; las primeras pueden ser periódicas (olas) y no periódicas; las segundas resultan de la superposición de ondas periódicas.

Merece especial atención la onda progresiva no periódica, llamada *onda solitaria,* cuya longitud es grande comparada con la profundidad del líquido sobre el que se propaga. Esto permite considerar como iguales los desplazamientos horizontales simultáneos de las partículas contenidas en un plano vertical y despreciar las fuerzas verticales al lado de las horizontales.

Se parte, por tanto, de la hipótesis de que un plano *material* normal al sentido de propagación y de masa despreciable no perturbaría lo más mínimo la propagación de la onda ni las trayectorias de las partículas. El desplazamiento de tal plano con una velocidad conveniente permite precisamente producir la onda solitaria.

Consideremos los desplazamientos horizontales, ε, de una onda cualquiera. Evidentemente puede construirse una función $\varepsilon = f(y)$, idénticamente nula para $y < 0$, que toma un valor constante, $\varepsilon = b$, para $y > 0$. Queda así definido cinemáticamente el movimiento de una onda que, a su paso, transporta las partículas una longitud b, en el sentido de su propagación. El movimiento no existe más que entre los valores 0 y a de la variable. Falta por ver la forma de la función, de modo que no exista contradicción física y se cumpla el principio de la continuidad.

Supuesta demostrada la posibilidad de una serie indefinida de ondas de una cierta forma, no basta con conservar de la curva la parte comprendida entre $y = 0$ e $y = a$. Esta fragmentación, si bien no crea discontinuidades para ε ni para $\frac{d\varepsilon}{dx}$, las ocasiona en la curvatura que depende de $\frac{d^2\varepsilon}{dx^2}$. Para evitar estas discontinuidades es preciso elegir $f(y)$, de modo que se anulen para $y = 0$ e $y = a$, f' y f''. Pero, además, las condiciones de propagación uniforme y de continuidad exigen que f''' y f'''' sean también nulas para dichos valores. Cumplidas estas condiciones, la función $\varepsilon = f(y)$ es arbitraria y pueden determinarse las fuerzas, F, finitas y capaces de mantener la onda así determinada.

Pero si la onda es corta, las fuerzas a aplicar son considerables en relación con las presiones que se ejercen entre los elementos del líquido. Cada término de la función f representa una onda de longitud particular que tiende a propagarse con su velocidad propia diferente a las de las otras componentes (ondas residuales de Russell). Por el contrario, cuando las ondas son largas, estas velocidades tienden hacia el mismo valor.

Pues bien: la *onda solitaria* posee un perfil teóricamente infinito, que se propaga libremente, sin deformación, en tanto el cauce tenga profundidad suficiente. Ha llamado la atención de los investigadores la *longevidad* extraordinaria de este tipo de onda, estudiada por Russell, Mac Cowan, Bussinesq, Rayleigh, Gwyther y otros.

El desplazamiento horizontal es, pues, el mismo para todas las partículas, igual evidentemente a $\Omega : h$, siendo Ω el volumen de la onda y h la profundidad del canal antes de su paso.

El desplazamiento vertical es proporcional a su distancia al fondo; de modo que es nulo en el fondo, y en la superficie alcanza el valor ξ_0 de la altura máxima de la intumescencia.

Con estas hipótesis, la ecuación general de Airy y las generales de la Dinámica, así como con las condiciones de incompresibilidad, líquido no viscoso y velocidad uniforme de propagación del fenómeno, obtiene Saint-Venant la expresión de la celeridad:

$$C = \sqrt{g\,h}\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{\xi}{h} + \frac{h^2}{6\,\xi}\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right), \qquad [1]$$

y la ecuación del perfil de la onda:

$$\frac{\xi_0}{\xi} = ch^2\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{3\,\xi_0}{h^3}}\right). \qquad [2]$$

El segundo término de C representa la influencia de la altura, y el tercero, la de la curvatura. El perfil de la onda solitaria es tal que C es constante para todo valor de x, y con esa condición se ha obtenido, ya que, en caso contrario, no existiría velocidad de propagación uniforme. Su altura máxima, ξ_0, está ligada con el volumen total Ω de la intumescencia y la profundidad h del canal por la relación:

$$16\,\xi_0\,h^3 = 3\,\Omega^2. \qquad [3]$$

Resultan, las trayectorias de las partículas, ser arcos de parábola de cuerda constante y flecha proporcional a su distancia al fondo.

La experiencia enseña que existe un límite de la profundidad por debajo del cual la onda *rompe*; este límite se alcanza cuando la altura es sensiblemente menor que la profundidad del canal. Los resultados analíticos concuerdan con la experimentación, pues mientras analíticamente se obtiene como valor límite de $\xi_0 : h$ el de 0,82, Russell encontró que la altura no puede llegar a h, y Mac Cowan no pudo pasar del valor $\xi_0 : h = 0{,}75$.

En cuanto a la forma del perfil límite en el momento de la rotura, las dos ramas de la curva se cortan bajo ángulo recto con tangentes inclinadas 45° con relación a la vertical.

La fórmula de Lagrange, de la celeridad de la onda, obtenida aplicando el principio de continuidad y el teorema de la cantidad de movimiento a la intumescencia provocada en un canal de sección rectangular por el movimiento de un plano normal al mismo, es la conocida:

$$C = \sqrt{g\,h}\,\sqrt{1 + \frac{3}{2}\,\frac{\xi}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{h}\right)^2} \qquad [4]$$

de la que, despreciando términos, cuando $\frac{\xi}{h}$ es pequeño, o sea, la altura de la onda pequeña en comparación con la profundidad del canal, se obtienen las fórmulas aproximadas:

$$C \simeq \sqrt{g\,h}\,\sqrt{1 + \frac{3}{2}\,\frac{\xi}{h}} \simeq \sqrt{g\,h}\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{\xi}{h}\right) \qquad [5]$$

y más groseramente:

$$C \simeq \sqrt{g\,h}\,. \qquad [6]$$

II. Caso del resalto hidráulico.

El resalto hidráulico, destinado a amortiguar la energía vertiente, puede considerarse como un caso particular de la onda solitaria en estado de rotura.

Se ha visto que la celeridad es función de la altura de la onda. Ésta remonta el curso de un canal siempre que su celeridad sea mayor que la velocidad del agua que discurre por el mismo. Si la celeridad es igual a dicha velocidad, la onda permanece en reposo aparente. En el caso del resalto se da esta circunstancia en estado de rotura de la onda. Ésta, en dicha posición de equilibrio, toma una altura tal, que su celeridad, al avanzar por un cauce de profundidad t_1, es igual a la velocidad v_1 del agua al pie del vertedero (figura 1.ª).

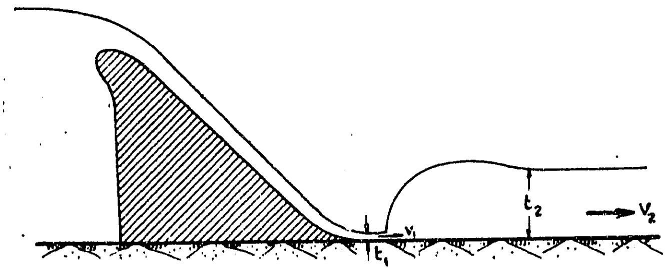

Figura 1.ª

En efecto, en la ecuación de Lagrange:

$$C = \sqrt{g\,h}\,\sqrt{1 + \frac{3}{2}\,\frac{\xi}{h} + \frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{h}\right)^2},$$

en la que ahora no pueden despreciarse términos por ser ξ grande al lado de h, haciendo (figs. 1.ª y 2.ª):

$$h = t_1;$$
$$\xi = t_2 - t_1;$$
$$c = v_1\,.$$

Se tiene:

$$v^2{}_1 = g\,[t_1 + \frac{3}{2}(t_2 - t_1)] + \frac{(t_2 - t_1)^2}{2\,t_1}\cdot$$

$$t^2{}_2 + t_1\,t_2 - \frac{2\,v^2{}_1\,t_1}{g} = 0; \qquad [7]$$

ecuación de segundo grado en t_2, que, resuelta, da la raíz positiva:

$$t_2 = -\frac{t_1}{2} + \sqrt{\frac{t_1^2}{4} + \frac{2\,v_1^2\,t_1}{g}} \qquad [8]$$

que es, precisamente, la ecuación que enlaza los calados conjugados t_1 y t_2 en el resalto, corrientemente

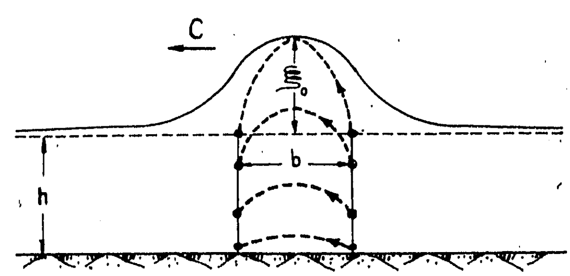

Figura 2.ª

empleada para calcular t_2 en función de t_1 y v_1 (fórmula de Belanger).

Nos encontramos, por tanto, ante dos fenómenos *hidráulicamente equivalentes*: resalto y onda solitaria. Al menos, las fórmulas empleadas para los dos son idénticas. Esto permite aplicar a cualquiera de ellos gran parte de las fórmulas y resultados de experimentación obtenidos en el otro. Siempre nos moveremos en el mismo orden de aproximación que ofrecen las fórmulas [4] y [8] en sus respectivos casos.

Así, por ejemplo:

La altura de la línea de energía antes del resalto es:

$$H_1 = t_1 + \frac{v^2_1}{2g};$$

y después del mismo:

$$H_2 = t_2 + \frac{v^2_2}{2g}.$$

Y la pérdida de energía es:

$$H_1 - H_2 = \frac{t_1}{16} \frac{(\sqrt{1+8R_1^2} - 3)^3}{\sqrt{1+8R_1^2} - 1} \left(R_1 = \frac{v_1}{\sqrt{y\,t_1}}\right).$$

Para que exista pérdida de energía es preciso que:

$$R_1 > 1;$$

o sea:

$$v_1 > \sqrt{g\,t_1};$$

como era de esperar, ya que ello equivale a expresar que la velocidad v_1 es superior a la crítica correspondiente al calado t_1 (sección rectangular).

Pero la anulación de energía adquiere importancia cuando la ola rompe; es decir, para

$$\frac{\xi}{h} \geqq 1;$$

$$\frac{t_2 - t_1}{t_1} = \frac{t_2}{t_1} - 1 \geqq 1; \quad \frac{t_2}{t_1} \geqq 2;$$

y como [7]:

$$\frac{v_1^2}{g\,t_1} = \frac{t_1\,t_2}{2\,t_1^2} + \frac{t_2^2}{2\,t_1^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t_2}{t_1} + \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2\right],$$

se tiene:

$$\frac{v_1^2}{g\,t_1} \geqq 3; \qquad R_1 \geqq \sqrt{3},$$

que se da un límite práctico inferior del número R_1.

En la práctica se toman valores mayores, recomendando Safranez en resaltos de mezcla:

$$R_1 \geqq 3.$$

III. Longitud del resalto.

Existen, como es sabido, numerosas fórmulas de empleo más o menos cómodo, que dan la longitud del resalto en función de sus características v_1, t_1, t_2, etc., tales como las de Smetana, Parlowsky, Aguila, etc. Como aplicación de la analogía *onda-resalto* examinada, podemos aportar alguna más a la colección. La onda solitaria, en realidad, no tiene una longitud λ determinada, puesto que su perfil es asintótico a la línea de lámina libre. Pero por analogía con las ondas periódicas, donde las funciones hiperbólicas son reemplazadas por funciones circulares, Mac Cowan propuso la expresión aproximada para la onda en el momento de romper: $\lambda = 2\,\pi\,h$. La longitud convencional así considerada, de la onda, es la comprendida entre las abscisas, para las que la altura se reduce a las 16 centésimas del valor máximo. Esta fórmula fué obtenida experimentalmente por Russell, lo que prueba que éste operaba con ondas en estado próximo al de rotura.

Teniendo en cuenta el valor límite de la relación:

$$\xi_0 : \lambda = 0{,}82;$$

o sea:

$$t_2 - t_1 = 0{,}82\,t_1;$$

$$t_1 = \frac{1}{1{,}82}\,t_2;$$

se tiene:

$$\lambda = 2\,\pi\,h = 2\,\pi\,t_1 = \frac{2\,\pi}{1{,}82}\,t_2 \simeq \mathbf{3{,}5}\,t_2;$$

fórmula análoga a la obtenida por Safranez, tras numerosísimos ensayos en modelo reducido.

Bibliografía.

BOUASSE: *Houles, Rides, Seiches et Marees.*

BAKHMETEFF: *Hidraulics of Open channels.*

SAFRANEZ: *Anwendung des Wassersprunges für Wasserreinigung.*

— *Wechselprung und Energievernichtung des Wassers.*