

# ALGUNAS APLICACIONES MECANICAS DE LA FUNCION DE GREEN

Por JOSÉ MARÍN TOYOS, Ingeniero de Caminos.

*Al presente trabajo le da el autor la finalidad de que nuestros investigadores recojan la sugerencia de aplicar las propiedades de la función de Green a la resolución de los problemas de Mecánica elástica, lo cual sería, a su juicio, de interés para el Cálculo de Estructuras.*

En todos los tratados de Mecánica elástica, al resolver las ecuaciones diferenciales a que el estudio de la Elasticidad y sus aplicaciones dan lugar, se obtienen las integrales particulares determinando en cada caso las funciones arbitrarias de la integral general. No hemos visto ninguno en que se haga aplicación de la función de Green con la que los problemas de estructuras elásticas, que se presentan con apariencia muy diversa, adquieren una sistematización uniforme.

No es nuestro propósito hacer un desarrollo completo de cálculo de estructuras por aplicación de la función de Green, sino exponer su utilidad en algunas aplicaciones sencillas, ver la uniformidad que adquiere su aplicación resolviendo cuestiones muy diversas, y como nuestra preparación no llega a más, brindar la idea a mejores investigadores para que vean si estos vestigios pueden abrir nuevos horizontes en la Ciencia de las Estructuras, la fundamental de nuestra profesión.

## La función de Green.

Si tenemos una ecuación diferencial y homogénea, con determinadas condiciones en los límites y de la forma:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = 0; \quad [1]$$

en la que  $p_1$  y  $p_2$  son funciones continuas de  $x$  en el intervalo  $(a, b)$ ; si suponemos que  $y_1$  e  $y_2$  son dos integrales particulares, linealmente independientes de la ecuación anterior, y formamos con ellas la función:

$$\gamma(x_1, \xi) = \pm \frac{1}{2} \frac{y_2(\xi) y_1(x) - y_1(\xi) y_2(x)}{y_2(\xi) y_1'(\xi) - y_1(\xi) y_2'(\xi)} \quad a < \xi < b,$$

se demuestran en los tratados de ecuaciones diferenciales las siguientes propiedades (\*):

1.<sup>a</sup> Que la función  $\gamma(x_1, \xi)$  es una integral particular de la ecuación [1].

2.<sup>a</sup> Que la misma función  $\gamma(x_1, \xi)$  es continua en el intervalo  $(a, b)$ .

3.<sup>a</sup> Que la derivada respecto a  $x$  es discontinua en el punto de abscisa  $\xi$ , verificándose en él:

$$\left( \frac{d\gamma}{dx} \right)_{x=\xi+0} - \left( \frac{d\gamma}{dx} \right)_{x=\xi-0} = 1.$$

4.<sup>a</sup> Que la función

$$y = \int_a^b \gamma(x_1, \xi) q(\xi) d\xi \quad [2]$$

es una integral particular de la ecuación diferencial completa:

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1 \frac{dy}{dx} + p_2 y = q(x); \quad [3]$$

siendo  $q(x)$  función continua en el mismo intervalo  $(a, b)$ .

5.<sup>a</sup> Que la integral particular [2] satisface las mismas condiciones en los límites que la función  $\gamma(x_1, \xi)$ .

La función  $\gamma(x_1, \xi)$  es la llamada integral básica de la ecuación homogénea [1], y también se denomina *función de Green* con la notación  $G(x_1, \xi)$ .

Si hacemos aplicación de lo anterior al caso particular de la ecuación diferencial

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad [4]$$

con las condiciones en los límites  $(a) = (b) = 0$ , la función de Green será:

$$\begin{aligned} G(x_1, \xi) &= C_1 x + C_2 \quad \text{para } a < x < \xi; \\ G(x_1, \xi) &= C_3 x + C_4 \quad \text{para } \xi < x < b; \end{aligned}$$

las condiciones en los límites nos dan:

$$C_1 a + C_2 = 0 \quad \gg \quad C_3 b + C_4 = 0;$$

(\*) Esta demostración puede verse en el *Curso Superior de Análisis Matemático para Ingenieros*, de Navarro Borrás, 1942, pág. 379.

la propiedad de la continuidad de la función proporcional:

$$C_1 \xi + C_2 = C_3 \xi + C_4,$$

y la propiedad de la discontinuidad de la derivada:

$$C_3 - C_1 = 1.$$

Con estas cuatro ecuaciones, determinamos las constantes de integración, cuyos valores son:

$$C_1 = \frac{\xi - b}{a - b}; \quad C_2 = -\frac{a(\xi - b)}{a - b}; \quad C_3 = \frac{\xi - a}{a - b};$$

$$C_4 = -\frac{b(\xi - a)}{a - b};$$

con lo que la función de Green queda determinada, y es:

$$G(x_1 \xi) = \frac{\xi - b}{a - b} x - \frac{a(\xi - b)}{a - b} = \frac{\xi - b}{a - b} (x - a)$$

para  $a < x < \xi$ ;

$$G(x_1 \xi) = \frac{\xi - a}{a - b} x - \frac{b(\xi - a)}{a - b} = \frac{\xi - a}{a - b} (x - b)$$

para  $\xi < x < b$ .

Hagamos un cambio de coordenadas de modo que  $a$  esté en el origen, y llamemos  $l$  al intervalo  $(a, b)$ ; tendremos:

$$G(x_1 \xi) = \frac{l - \xi}{l} x \quad \text{para } 0 < x < \xi;$$

$$G(x_1 \xi) = \frac{l - x}{l} \xi \quad \text{para } \xi < x < l.$$

Analicemos una viga recta, de luz  $l$ , apoyada en los extremos y sometida a una fuerza unidad en el punto de abscisa  $\xi$ , y encontramos inmediatamente que la variación de los momentos flectores viene expresada por:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{l - \xi}{l} x \quad \text{para } 0 < x < \xi; \\ M &= \frac{l - x}{l} \xi \quad \text{para } \xi < x < l. \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

y vemos que los valores obtenidos son idénticamente iguales a los que expresa la función de Green para la ecuación [4], lo que ya indica una significación mecánica de esta función en apariencia puramente matemática.

Halleemos la derivada parcial de la función de Green [5], y tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G(x_1 \xi)}{\partial x} &= \frac{l - \xi}{l} \quad \text{para } 0 < x < \xi; \\ \frac{\partial G(x_1 \xi)}{\partial x} &= -\frac{\xi}{l} \quad \text{para } \xi < x < l. \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

Halleemos también la ley de variación de los esfuerzos cortantes en la viga antes definida, y tenemos:

$$E = \frac{dM}{dx} = \frac{l - \xi}{l} \quad \text{para } 0 < x < \xi;$$

$$E = \frac{dM}{dx} = -\frac{\xi}{l} \quad \text{para } \xi < x < l;$$

luego:

$$M = G(x_1 \xi) \quad \text{y} \quad E = \frac{\partial G(x_1 \xi)}{\partial x}.$$

Resulta, pues, que la función de Green de la ecuación diferencial [4] es la del momento flector de una viga apoyada, de luz  $l$ , sometida a una fuerza unidad en la abscisa  $\xi$ ; la derivada parcial de la misma función de Green es la función del esfuerzo cortante en la misma viga.

Si en esta misma viga actúa una carga repartida, expresada por  $q(x)$ , y aplicamos el principio de la superposición de los esfuerzos y la propiedad anterior de la función de Green, la fuerza elemental sería  $q(\xi) d\xi$ , y la función del momento flector vendrá expresada por:

$$M = \int_0^l G(x_1 \xi) q(\xi) d\xi. \quad [7]$$

Si consideramos independientemente la ecuación diferencial completa

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \dot{q}(x),$$

con las condiciones en los límites  $y(0) = y(l) = 0$ , y aplicamos la propiedad cuarta de la función de Green, la integral particular de la ecuación diferencial anterior que satisface a los límites es:

$$y = \int_0^l G(x_1 \xi) q(\xi) d\xi. \quad [8]$$

expresión exactamente igual a la que representa la función del momento flector de una viga apoyada, de luz  $l$ , sometida a la carga repartida expresada por  $q(x)$ , lo que ya constituye una aplicación de la función de Green, como se verá más adelante.

### Demostración de algunos teoremas clásicos de Elasticidad.

La función  $G(x, \xi)$  es simétrica respecto a las dos variables  $x$  y  $\xi$  (\*), y de esta propiedad se deduce que cuando la carga unitaria actúa en  $\xi$ , la función  $G$  da el valor del efecto que se produce en la sección  $x$ ; recíprocamente, si aquélla actuase en  $x$ ,  $G$  representaría el efecto producido en la sección  $\xi$ , lo que constituye una elegante demostración del teorema de Maxwell en los casos de flexión de piezas rectas.

Supongamos una viga, de luz  $l$ , apoyada en los extremos, en la que la función de los momentos flectores sea  $m(x)$ ; consideremos que en la misma viga actuase una carga ideal representada por  $\frac{m(x)}{EI(x)}$ , y apliquemos la fórmula [8] para obtener la función de los momentos flectores ideales que produciría la carga indicada, y tenemos:

$$M = \int_0^l G(x, \xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

sustituyendo en  $G$  los valores [5]:

$$M = \int_0^x \frac{l-x}{l} \xi \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi + \int_x^l \frac{x}{l} (l-\xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi. \quad [9]$$

Pero al mismo tiempo, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{m(x)}{EI(x)}$$

representa la ecuación diferencial de la deformada de la viga considerada, cuya integral particular es:

$$y = \int_0^l G(x, \xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi = \int_0^x \frac{l-x}{l} \xi \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi + \int_x^l \frac{x}{l} (l-\xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi. \quad [10]$$

Las fórmulas [9] y [10] son idénticas y su identidad demuestra que la deformada puede construirse como una función de momentos flectores, lo que constituye uno de los teoremas de Möhr.

La fórmula [10], por medio de algunas transfor-

maciones de cálculo sencillas que no hace falta detallar, puede ponerse bajo la forma:

$$y = \frac{x}{l} \int_0^l (l-\xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi - \int_0^x (x-\xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi, \quad [11]$$

y se ve que el primer término del segundo miembro, dividido por  $x$ , representa precisamente la reacción  $R_1$  que se produce en el apoyo izquierdo de la viga considerada cuando está sometida a la carga ideal

$\frac{m(x)}{EI(x)}$ ; pues en efecto:

$$R_1 \times l = \int_0^l (l-\xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

$$R_1 = \frac{1}{l} \int_0^l (l-\xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

y, por tanto, la expresión [11] puede escribirse:

$$y = R_1 x - \int_0^x (x-\xi) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi. \quad [12]$$

Si tomamos (fig. 1.<sup>a</sup>) una sección  $x$  y hallamos el momento estático del área de momento, situada a la

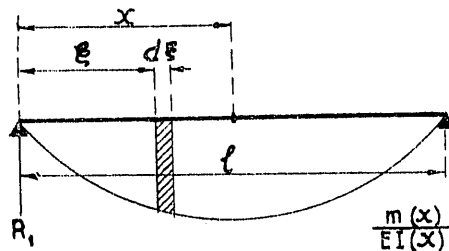


Figura 1.<sup>a</sup>

izquierda de  $x$ , respecto a  $x$ , obtenemos como valor diferencial:

$$\frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \times (x-\xi),$$

y el total:

$$\int_0^x \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} (x-\xi) d\xi;$$

expresión idéntica a la que figura como segundo término del segundo miembro de [12], y, por lo tanto, tiene la significación mecánica de ser el momento estático respecto a  $x$  del área de momentos de una viga

sometida a la carga ideal  $\frac{m(x)}{EI(x)}$  extendida a toda ella.

Derivemos la ecuación [12], teniendo en cuenta

(\*) La demostración analítica puede verse en el *Curso Superior de Análisis Matemático para Ingenieros*, de Navarro Borrás, 1942, pág. 381.

que se trata de una derivación bajo el signo integral, y se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = R_1 - \int_0^x \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi; \quad [13]$$

y esta expresión, recordando la identidad entre [9] y [10] y su significado, representa, por un lado, el coeficiente angular de la tangente a la deformada, y por otro, la función de los esfuerzos cortantes de la viga sometida a la carga ideal que venimos considerando. La equivalencia entre estos dos significados constituye la demostración de otro de los teoremas de Möhr, puesto que resulta que la pendiente de la deformada se obtiene determinando los esfuerzos cortantes de la misma viga cuando la carga sea  $\frac{m(x)}{EI(x)}$ .

Si en la expresión [13] hacemos  $x = 0$ ,

$$\frac{dy}{dx} = R_1;$$

lo que nos dice que el ángulo de giro de la deformada en el apoyo izquierdo viene expresado por la reacción que en el mismo se produce cuando sobre la viga actúa la carga ideal tantas veces citada; es la demostración de otro de los teoremas de Möhr (\*).

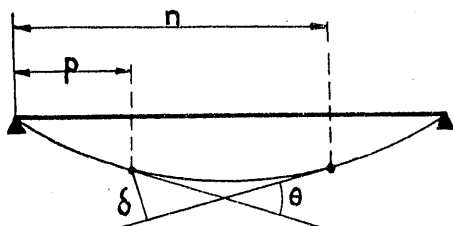


Figura 2.ª

Consideremos dos puntos de la deformada, de abscisas  $p$  y  $n$ , trazadas en ellos las tangentes a aquella; el coeficiente angular de cada una de estas rectas es [13]:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_p = R_1 - \int_0^p \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_n = R_1 - \int_0^n \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

y el ángulo  $\theta$  que forman entre sí las dos tangentes será:

$$\theta = \left(\frac{dy}{dx}\right)_p - \left(\frac{dy}{dx}\right)_n = \int_0^n \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi - \int_0^p \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi = \int_p^n \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi,$$

que demuestra otra de las formas de expresar el

primer teorema de Möhr, que dice: "El ángulo de las tangentes a la deformada en dos puntos cualesquiera de una barra recta, viene dado por el área, entre las ordenadas de aquellos dos puntos, del diagrama de los momentos flectores divididos por los momentos de inercia de las secciones y por el coeficiente de elasticidad".

Hallemos el valor de la distancia  $\delta$  (fig. 2.ª) desde uno de los puntos considerados a la tangente en el otro:

$$\delta = \frac{y_p - \left(\frac{dy}{dx}\right)_n \times p + n \left(\frac{dy}{dx}\right)_n}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_n^2}} = \frac{y_p - y_n + (n - p) \left(\frac{dy}{dx}\right)_n}{ds} dx;$$

y como puede admitirse  $ds = dx$ , sin error sensible,

$$\delta = y_p - y_n + (n - p) \left(\frac{dy}{dx}\right)_n;$$

aplicando los valores determinados en [12] y [13], y simplificando, se llega sin dificultad a:

$$\delta = \int_p^n (\xi - p) \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi,$$

que demuestra el teorema de Möhr, que dice: "La distancia desde un punto de la deformada a la tangente en otro punto de esta misma curva, viene dada por el momento estático con relación al primer punto del área citada en el teorema anterior para los dos puntos considerados" (\*).

### Resolución de algunos problemas de estructuras.

Hasta aquí hemos hecho aplicación de la función de Green para demostrar algunos teoremas clásicos en el cálculo de estructuras. Es también interesante ver cómo con la misma función se resuelven problemas de estructuras.

Consideremos el caso más sencillo de una viga recta, de luz  $l$ , apoyada en los extremos y sometida a una carga constante  $p$ .

Aplicando la fórmula [7] se obtiene directamente la función de los momentos:

$$M = \int_0^l G(x, \xi) p \cdot d\xi = p \int_0^l G(x, \xi) d\xi;$$

(\*) Strassner: *Nuevos métodos*, 1942, pág. 12.

(\*) Fernández Casado: *Cálculo de Estructuras reticulares*, 1944, pág. 19.

y poniendo en  $G$  los valores [5]:

$$\begin{aligned} M &= p \int_0^x \frac{l-x}{l} \xi d\xi + p \int_x^l \frac{l-\xi}{l} x d\xi = \\ &= \frac{p(l-x)}{l} \int_0^x \xi d\xi + \frac{px}{l} \int_x^l (l-\xi) d\xi \\ M &= \frac{1}{2} p x (l-x). \end{aligned}$$

Sea ahora la misma viga, sometida a una carga triangular y simétrica, con valor máximo  $p$  en el centro.

La función de la carga será:

$$\begin{aligned} \frac{2px}{l} &\text{ para } 0 < x < \frac{l}{2}; \\ \frac{2p(l-x)}{l} &\text{ para } \frac{l}{2} < x < l; \end{aligned}$$

la ecuación de los momentos de 0 a  $\frac{l}{2}$  será:

$$M = \int_0^l 2G(x, \xi) \frac{2p\xi}{l} d\xi + \int_{\frac{l}{2}}^l G(x, \xi) \frac{2p(l-\xi)}{l} d\xi$$

y poniendo  $G$  explícita se tiene:

$$\begin{aligned} M &= \frac{2p(l-x)}{l^2} \int_0^x \xi^2 d\xi + \frac{2px}{l^2} \int_x^{\frac{l}{2}} (l-\xi)\xi d\xi + \\ &+ \frac{2px}{l^2} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-\xi)^2 d\xi = px \left( \frac{l}{4} - \frac{x^2}{3l} \right). \end{aligned}$$

Tratemos ahora de determinar los giros que experimenta una viga recta apoyada, cuando en el extremo izquierdo se le aplica un momento  $m$ .

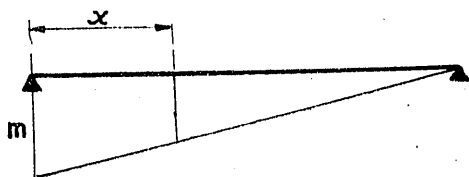


Figura 3.ª

La función de los momentos es lineal:

$$\frac{m(l-x)}{l};$$

la ecuación diferencial de la elástica es:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{m(l-x)}{EI l},$$

y la función derivada de la deformada es:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^l \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \cdot \frac{m(l-\xi)}{lEI} d\xi;$$

aplicando los valores [6] y suponiendo la viga de sección constante:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{m}{l^2 EI} \int_0^x \xi(l-\xi) d\xi + \frac{m}{l^2 EI} \int_x^l (l-\xi)^2 d\xi = \\ &= -\frac{m}{6lEI} (3x^2 - 6lx + 2l^2). \end{aligned}$$

El giro en los apoyos se obtiene haciendo en la ecuación general  $x=0$  y  $x=l$ , y se obtiene:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_0 = \frac{ml}{3EI}, \quad \left( \frac{dy}{dx} \right)_l = -\frac{ml}{6EI}.$$

Estudiemos la viga empotrada en un extremo (sea el derecho) y apoyada en el opuesto.

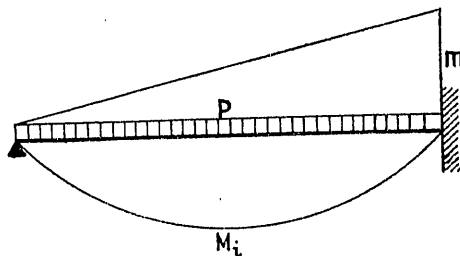


Figura 4.ª

En este caso, las condiciones en los límites para la deformada son tres:

$$y(0)=0; \quad y(l)=0; \quad y'(l)=0,$$

y la función de Green no admite más que las dos primeras, por lo que existe una superabundancia de primer grado, que es precisamente el grado de hiperestaticidad de la estructura. Supuesto conocida la reacción hiperestática  $m$  y llamando  $M_i$  a los momentos isostáticos, cuando la viga está apoyada, la función de los momentos es:

$$M(x) = M_i(x) - \frac{mx}{l},$$

y la función derivada de la deformada:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^l \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \cdot \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

como para  $x=l$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$  se tiene la condición:

$$\int_0^l \left( \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right)_{x=l} \cdot \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi = 0;$$

de la que se deduce el valor de  $m$ , y el problema se reduce a otro isostático de solución inmediata.

Desarrollemos el cálculo para el caso de carga  $p$ , uniformemente repartida:

$$M(x) = \frac{1}{2} p x (l-x) - \frac{m x}{l} = x \left( \frac{p(l-x)}{2} - \frac{m}{l} \right);$$

$$\frac{dy}{dx} = - \int_0^x \frac{\xi}{l} x \left( \frac{p(l-x)}{2} - \frac{m}{l} \right) d\xi +$$

$$+ \int_x^l \frac{l-\xi}{l} \left( \frac{p(l-x)}{2} - \frac{m}{l} \right) d\xi =$$

$$= \frac{p}{24} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3) - \frac{m}{6} \left( l - \frac{3x^2}{l} \right);$$

haciendo  $x = l$  e igualando a cero, se obtiene:

$$m = \frac{1}{8} p l^2.$$

Como última aplicación, resolvamos el problema de la viga empotrada en los dos extremos.

Las condiciones en los límites son cuatro:

$$y(0) = 0; \quad y(l) = 0; \quad y'(0) = 0; \quad y'(l) = 0;$$

luego la superabundancia de condiciones es de segundo grado, como lo es también la hiperestaticidad. Supongamos conocidas las reacciones hiperestáticas en los extremos  $m_1$  y  $m_2$ , con lo cual la función de momentos es:

$$M(x) = M_l - m_1 - \frac{m_2 - m_1}{l} x,$$

y la función derivada de la elástica:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^l \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

como se han de verificar las condiciones:

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} = \int_0^l \left( \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi = 0; \quad \left\{ \right.$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = \int_0^l \left( \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} \right)_l \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi = 0; \quad \left. \right\}$$

de este sistema despejamos los valores de  $m_1$  y de  $m_2$ , y el problema se ha transformado en otro isostático que no tiene dificultad.

En el caso de carga uniforme  $p$ , extendida sobre toda la viga, y como por razones de simetría  $m_1 = m_2$ , la función de los momentos es:

$$M(x) = \frac{1}{2} p x (l-x) - m;$$

$$\frac{dy}{dx} = - \int_0^x \frac{\xi}{l} \left( \frac{p\xi(l-\xi)}{2} - m \right) d\xi +$$

$$+ \int_x^l \frac{l-\xi}{l} \left( \frac{p\xi(l-\xi)}{2} - m \right) d\xi =$$

$$= \frac{p}{24} (l^3 - 6lx^2 + 4x^3) - \frac{m}{2} (l - 2x);$$

haciendo  $x = 0$  y  $x = l$  e igualando a cero, se obtiene en los dos casos:

$$m = \frac{1}{12} p l^2.$$

\* \* \*

Al terminar este trabajo, observará el lector que no hemos descubierto nada nuevo; todo ha quedado reducido a demostrar cuestiones y a resolver sencillos problemas de todos conocidos; pero para llegar a los resultados hemos utilizado un procedimiento distinto a los que se emplean en los tratados más modernos y han servido para poner de manifiesto la fecundidad de las funciones de Green, con las que los hemos obtenido con gran rapidez y uniformidad.

Si tiene alguna importancia, es ésta, la de lanzar una nueva idea que, si es recogida por nuestros investigadores, puede servir para producir mejores frutos o para demostrar que hemos perdido el tiempo en un entretenimiento matemático.