

INTEGRACION ELECTRICA DE LA ECUACION DIFERENCIAL DE POISSON

Por MARIANO FERNÁNDEZ BOLLO, Ingeniero de Caminos.

Se describe en el presente trabajo la interesante instalación experimental que ha construido el autor, con la ayuda económica de la Junta de Investigaciones Técnicas, y que ha sido ensayada con notables resultados en los Laboratorios de nuestra Escuela Especial.

I

Introducción.

En muchas cuestiones de Ingeniería se presentan ecuaciones diferenciales que no son integrables por un método matemático general, entre las cuales destaca por su frecuencia la denominada de Poisson:

$$Z''_{xx} + Z''_{yy} = f(x, y);$$

expresión en la cual $f(x, y)$ puede ser constante e incluso nula, caso en el que suele llamarse ecuación de Laplace.

Este artículo trata de dar una idea de un método de resolución eléctrica de los problemas en que intervengan ecuaciones reducibles al tipo antes indicado.

El método se ha aplicado para la construcción de una instalación experimental, que se describe brevemente, y con la cual se han realizado los ensayos cuyos resultados se indican al final.

La realización de estos trabajos ha sido posible

gracias a la ayuda económica de la Junta de Investigaciones Técnicas del Ministerio de Obras Públicas, con cuyos fondos se ha construido la instalación y efectuado la parte material de los ensayos, y de la Escuela Especial, cuyos Laboratorios y medios han podido emplearse en el trabajo.

II

Fundamento físicomatemático de la solución adoptada.

Supongamos (véase figura 1.^a) construida una capa e de un material de una resistencia óhmica muy elevada y perfectamente uniforme, de ρ ohms./cm.³ y por un procedimiento que asegure el contacto perfecto, la cubrimos por una de sus caras, S , de una capa de espesor despreciable y resistencia óhmica perfectamente uniforme de r ohms./cm.², y por la otra cara de una capa gruesa metálica, T , de resistencia despreciable, obtendremos un esquema funcio-

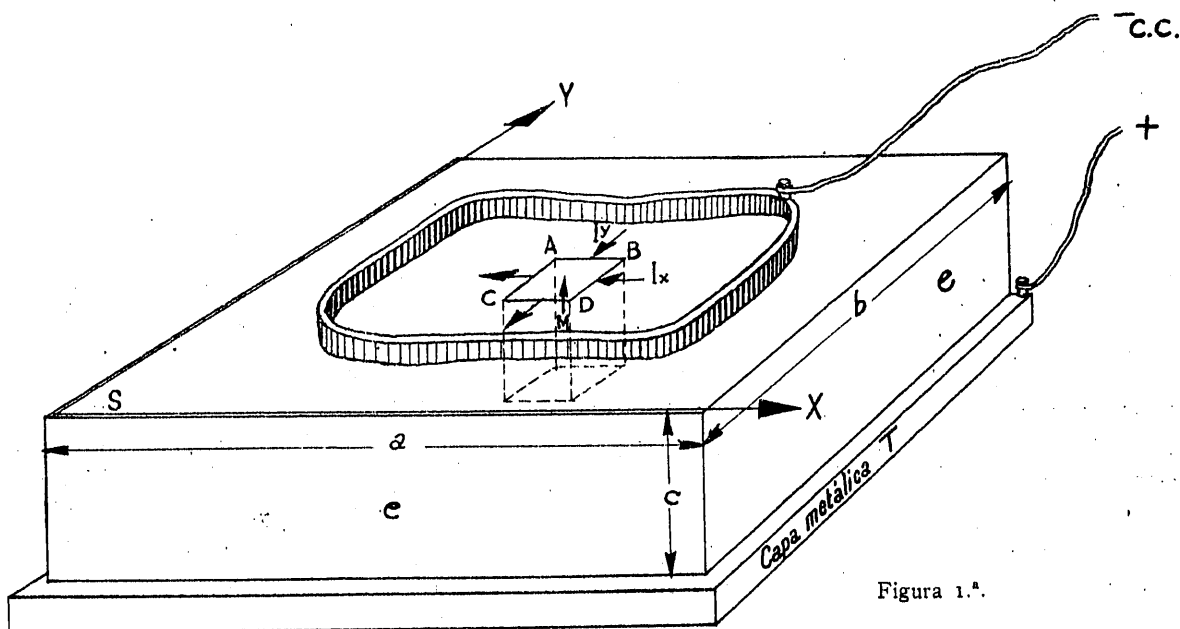


Figura 1.^a

nal muy simplificado de la instalación montada en realidad.

Para hacer funcionar esta instalación teórica sería preciso disponer un contorno metálico de resistencia despreciable, que se designa en la figura con Γ , colocándole de manera que su contacto con la superficie, S , fuese uniforme y sin resistencia apreciable.

Supuesto todo esto, veamos lo que sucede en la instalación, al conectar el contorno Γ y la placa inferior a una diferencia de potencial (corriente continua) no muy grande para que las corrientes que circulen por el aparato no sufran perturbaciones por efectos electromagnéticos, de capacidad, o debidos al calentamiento del circuito.

La intensidad total que circule, suponiendo la resistencia superficial de S (es decir, r) bastante menor que ρ , será, aproximadamente:

$$i = V \cdot \frac{a \cdot b}{c \cdot \rho} \text{ amperios,}$$

para V en voltios, y a , b , c en centímetros, despreciando además las resistencias de Γ , de S y de su contacto, por lo cual, en realidad, será algo menor.

Esta corriente I atraviesa la capa resistente e de una manera prácticamente uniforme, ya que suponemos que la superficie S , aunque de resistencia no nula, es mucho más conductora que e , de tal manera que en S las caídas de tensión no pasen de un pequeño tanto por ciento de V . Por tanto, si $ABCD$ es un elemento de superficie (fig. 1.^a) en el cual $AB = x$, $AC = y$, la corriente que alcanzará este elemento de superficie a través de la placa e será de:

$$\Delta I = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{a \cdot b} \cdot i = \frac{\Delta x \Delta y}{c \cdot \rho} \cdot V \text{ amperios.}$$

Si, por otra parte, consideramos las corrientes que circulan sobre la cara S , que se podrán medir por las pequeñas diferencias de potencial que origine la resistencia de su recubrimiento conductor, designándolas por I_x e I_y tendremos, por la condición de continuidad:

$$I_x + \Delta I_x + I_y + \Delta I_y + \Delta I = I_x + I_y,$$

igualando las corrientes que entran con las que salen. Pero si suponemos que x e y tienden a cero, y por otra parte recordamos que:

$$I_x = P'_x \cdot \frac{dy}{r}; \quad I_y = P'_y \cdot \frac{dx}{r};$$

designando por P el potencial y r la resistividad de la cara S , tendremos:

$$(dy \Delta P'_x + dx \Delta P'_y) \frac{1}{r} = -\Delta I;$$

pero si $\Delta x = dx$ y $\Delta y = dy$, se podrá escribir:

$$\Delta P'_x = P''_{x^2} \cdot dx; \quad \Delta P'_y = P''_{y^2} dy;$$

$$\Delta I = \frac{dx \cdot dy}{c \cdot \rho} \cdot V;$$

sustituyendo:

$$(P''_{x^2} + P''_{y^2}) \frac{dx \cdot dy}{r} = - \frac{dx \cdot dy}{c \cdot \rho} \cdot V;$$

simplificando, queda finalmente:

$$P''_{x^2} + P''_{y^2} = - \frac{r}{c \cdot \rho} \cdot V$$

que es la ecuación de Poisson para las tensiones en los puntos de S .

Como en ella r , c , ρ son características de construcción, la variación de la constante la obtendremos cambiando el valor de V cuando nos convenga, de tal modo, que, aunque prácticamente sería muy complicado, se comprende que así sería posible deducir un procedimiento de integración experimental incluso para segundo miembro variable con x e y , aplicando tensiones adecuadas en los distintos puntos de la placa inferior T que habría de estar dividida en trozos.

En la verdadera instalación construída es imposible con los materiales realmente existentes interpretar de una forma inmediata este esquema, que, además, presenta el inconveniente de la construcción del contorno Γ y de la necesidad de que su contacto sea perfecto. Pero se ha sustituido la capa S por una red equivalente de resistencias de 100 Ω , y la capa e , por otra de resistencias de 25 000 Ω . Se han tomado estos valores porque, según cálculos que se detallan en la Memoria presentada a la Junta de Investigaciones, corresponden a la mayor precisión alcanzable en las medidas. Se comprende que la capa T corresponde a los alambres de cobre de gran sección que unen las resistencias de 25 000 Ω .

Así se resuelven por un procedimiento sencillo todas las dificultades prácticas que presentaba la realización del aparato teórico estudiado anteriormente. Incluso la de la construcción y conexión de los contornos Γ por medio de los puentes y clavijas de la figura 3.^a.

III

Breve idea de la instalación construida.

La instalación consiste (fig. 2.^a) en un tablero de bakelita, dividido en zonas por medio de molduras níqueladas y sostenido por una estructura adecuada de acero soldado, sobre el cual se fijan los distintos elementos.

En el recuadro más amplio se encuentran 980 enchufes unipolares (hembrillas) dispuestos a tresbolillo. Conectándolos por medio de puentes y piezas triples unipolares especiales (fig. 3.^a) se pueden formar contornos (en la figura 2.^a se ha formado uno circular) de la forma que interese en cada caso.

Detrás del tablero de bakelita (fig. 4.^a) existe una red de resistencias de 100 ohmios que enlazan entre sí todas las hembrillas, de manera que en cada una concurren 6 resistencias.

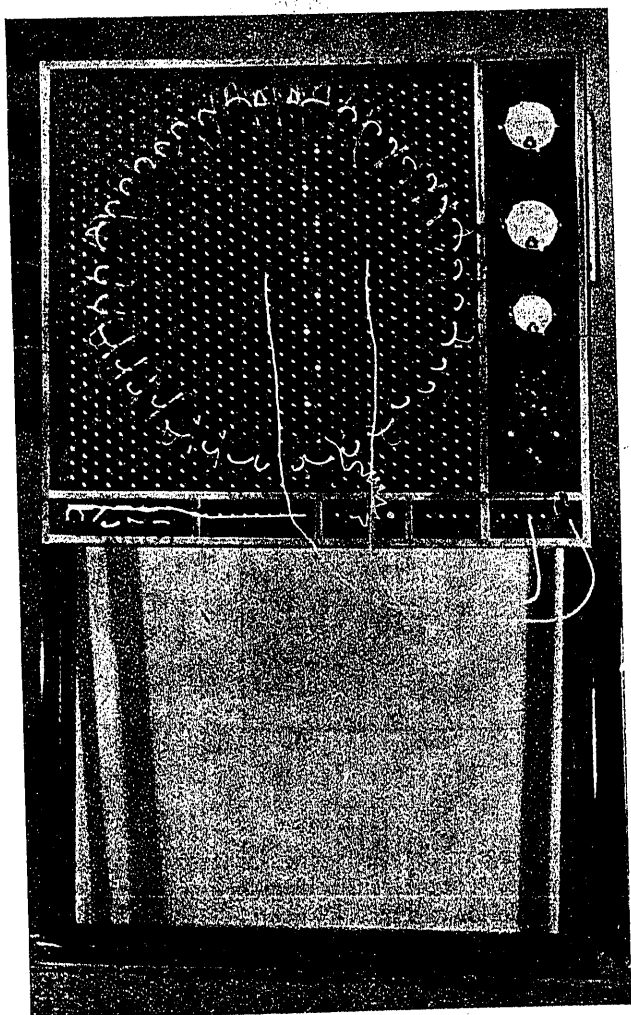


Figura 2.^a.

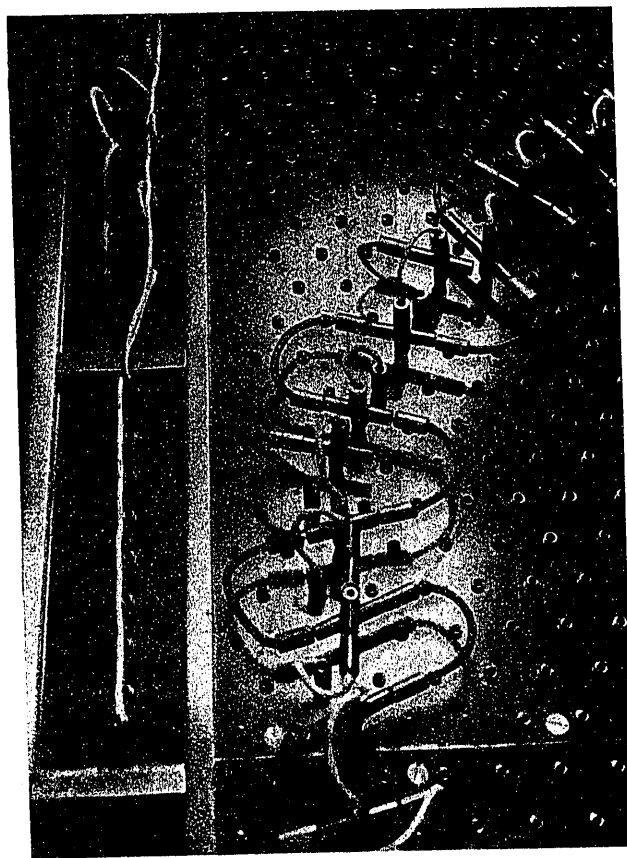


Figura 3.^a.

Por otra parte, de cada hembrilla parte una resistencia de 25 000 ohmios, que se une por su otro extremo con alambres de cobre que concurren en otros de mayor sección y recubiertos de una capa aislante que terminan en las 18 hembrillas del recuadro inferior izquierdo.

En la figura 5.^a se representa con más detalle estas redes, pudiéndose apreciar en la fotografía los distintos elementos mencionados.

Lo descrito constituye la parte esencial de la instalación, habiéndose montado los aparatos de medida en el recuadro de la izquierda para facilitar el trabajo, y sus reóstatos, *shunts*, interruptores y enchufes de conexión en los restantes recuadros para permitir un manejo más cómodo y obtener un conjunto compacto.

Los aparatos de medida, todos ellos de cuadro móvil en campo magnético uniforme, son, de arriba a abajo: 1.º, un miliamperímetro de 2 mA. en toda la escala, que según la posición en que se coloque el interruptor situado en la parte inferior del aparato en el más pequeño de los recuadros, funciona como am-

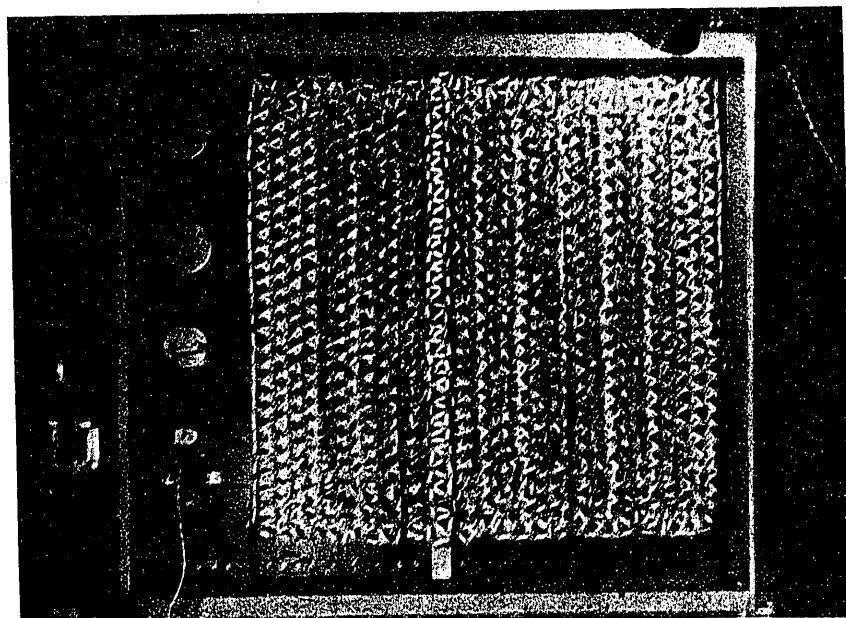


Figura 4.ª.

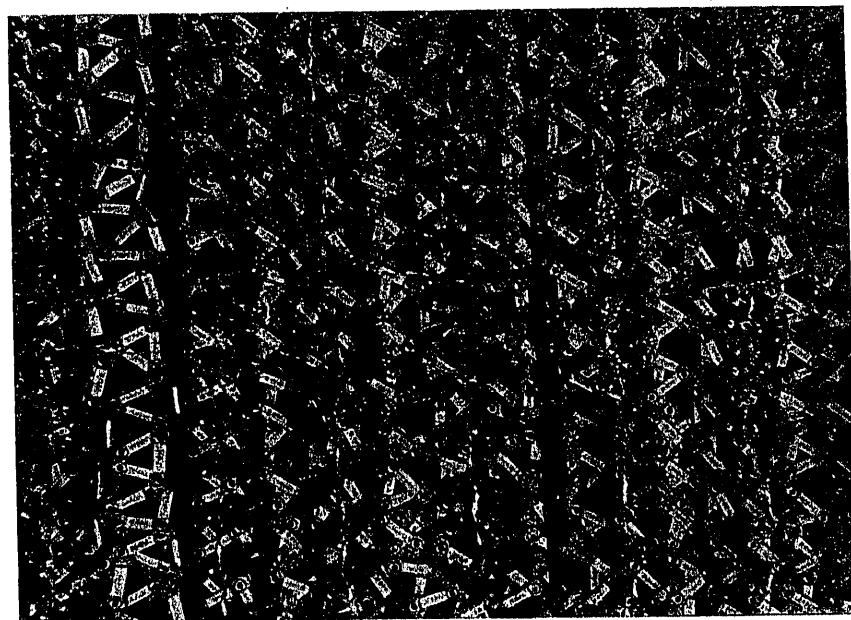


Figura 5.ª.

perímetro de 10 A., indicando la corriente total consumida por la instalación, o las diferencias de tensión como voltímetro de 1 000 Ω /voltio entre puntos interiores al contorno construido y éste.

El segundo aparato es un microamperímetro de 100 μ A. en toda la escala, que posee resistencias para emplearlo como voltímetro de 10 000 Ω /voltio y es-

calas de 0,03 voltio a 25 voltios, y un reóstato de sensibilidad de 3 000 Ω situado en la parte inferior del recuadro de los aparatos de medida. Los enchufes correspondientes a sus tomas son los situados en el recuadro inferior derecha.

El tercer aparato es un voltímetro de precisión que indica el voltaje de entrada.

IV

Aplicaciones.

Como es muy frecuente encontrar en la técnica problemas que en último término se reducen a integrar las ecuaciones de Poisson o de Laplace, todos ellos pueden resolverse por medio de la instalación construida. Así, tendremos:

1.º *Problemas de movimiento irrotacional en un líquido*: con contornos abiertos o cerrados, ya que existe entonces una función potencial de velocidades que cumple la ecuación de Laplace.

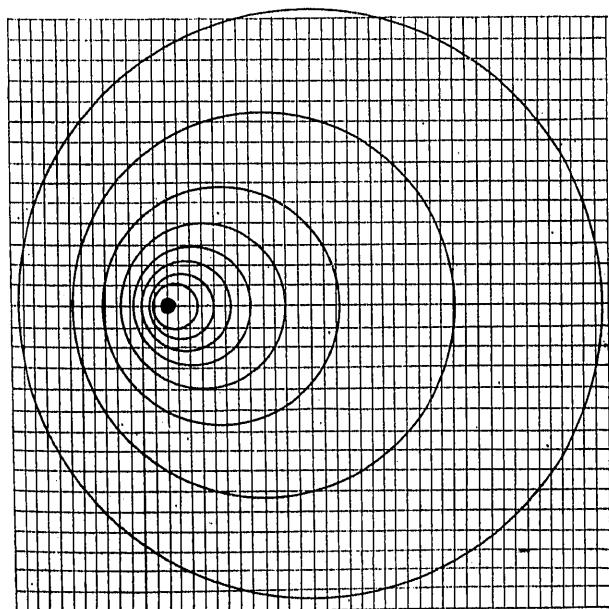
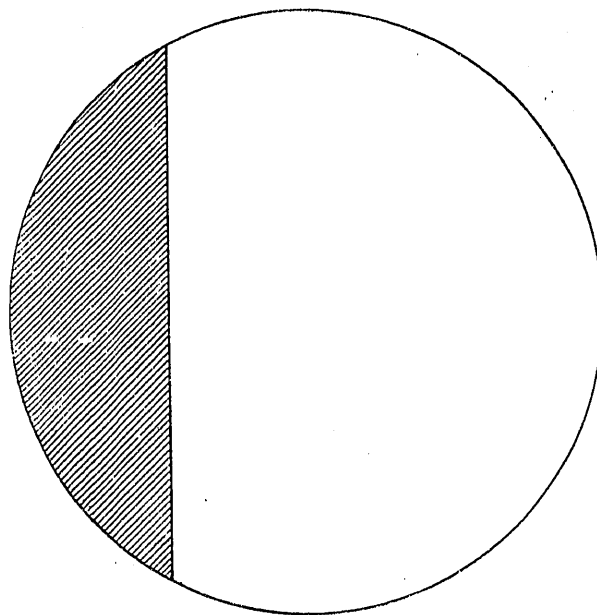
Supongamos que se trata de estudiar el movimiento irrotacional en un contorno circular cerrado cuando se produce un remolino alrededor de un punto situado a $1/2$ de la longitud del radio (fig. 6.^a), como sucedería en un depósito cilíndrico con una salida descentrada en esta forma, para secciones próximas al fondo. Este problema, por su contorno cerrado, no se puede resolver por medio del dispositivo para integrar la ecuación de Laplace que describe el número 2726 de la REVISTA.

El contorno circular se construye por medio de puentes y fichas, de forma que tenga el diámetro mayor posible.

Este contorno se conecta al polo positivo del cuadro mediante un puente.

Se conecta al polo negativo un punto situado a $1/2$ del radio, y se toma en la entrada una diferencia de tensión de 2 voltios.

Con el reóstato se hace que estos 2 voltios correspondan a 100 divisiones del aparato principal de me-

Figura 6.^aFigura 7.^a

dida, y hasta tomar tensiones en todos los puntos interiores.

Pasando estas medidas al gráfico y dibujando las líneas de nivel se obtienen las líneas de corriente del movimiento, que, como es lógico, de acuerdo con la teoría del remolino irrotacional, se estrechan hacia el punto que representa el desagüe del depósito. Tendremos resuelto así el problema (fig. 6.^a).

Combinando estas velocidades así obtenidas con las radiales debidas al caudal de desagüe se pueden obtener las líneas de corriente verdaderas cuando realmente desagua el depósito, otro problema que también resulta interesante.

Las velocidades radiales se pueden hallar experimentalmente como se indica en el apartado 3.º, por tratarse de una variación uniforme.

2.º *Problemas debidos a manantiales o sumideros de área finita*: con caudal uniforme, como, por ejemplo, el movimiento del agua en un vaso sometido a una evaporación o a una lluvia uniforme.

El caso clásico que se presenta con frecuencia es el del depósito con manantial limitado a una parte de su fondo.

Para algunos casos sencillos pueden verse soluciones en algunos tratados de Hidráulica, más o menos aproximadas (Forcheimer, Schöklitsch, H. Lamb). Por medio de la instalación estudiada pueden resolverse todos los casos imaginables, siempre que puedan tratarse bidimensionalmente.

Así, por ejemplo, un depósito o estanque de base circular, en el cual el agua afluye por el segmento limitado por una cuerda que dista del centro $1/3$ del radio (fig. 7.^a).

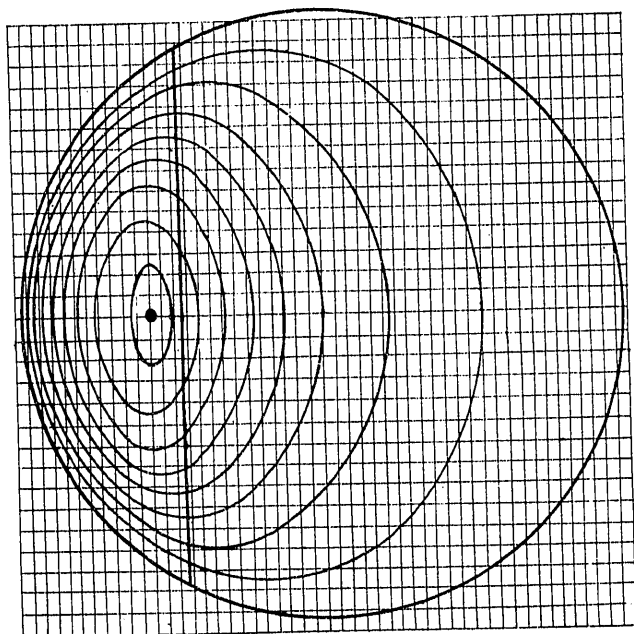


Figura 8.ª

Se empieza por construir el contorno circular, igual al del ensayo anterior, y que, como en aquél, se conecta al polo positivo del cuadro, mediante un puente.

Después se conecta el polo negativo con tensión de 100 voltios a los enchufes del recuadro inferior izquierda, que corresponden a las zonas que cubren el segmento de $2/3$ del radio de flecha.

Se producen así caídas de tensión del orden de 1,5 voltios como máximo sobre la parte interior del contorno circular. Esta caída de tensión se hace corresponder, por medio del reóstato de regulación, a un número de divisiones, de modo que el centro tenga una tensión representada por 60 divisiones.

Se representan las tensiones y uniendo las líneas de nivel obtenemos las líneas equipotenciales del movimiento (fig. 8.ª) que permiten inmediatamente dibujar las líneas de corriente (fig. 9.ª).

Debe observarse, en este gráfico, que por no tratarse de un movimiento irrotacional conservativo, el caudal no es constante entre dos líneas de corriente.

También debe observarse la presencia de un punto singular de la función de corriente, P , que podemos designar como "foco de emergencia" con propiedades analíticas fáciles de establecer.

3.º Variaciones uniformes.

Un estanque de planta triangular, vierte por sus bordes el agua de lluvia que cae uniformemente sobre él. Construiremos el contorno y lo uniremos al polo positivo, mientras que el negativo se une a las zonas que cubren su área (enchufes del recuadro inferior izquierda).

Se representan las líneas equipotenciales (fig. 10), y sus normales nos determinan la red de líneas de corriente (red no conservativa) de la figura 11.

4.º Transmisión de calor en régimen permanente.

Basta recordar que en este caso se cumple la ecuación de Laplace (1).

La importancia de este problema es innegable en la construcción de obras en que intervengan grandes macizos.

Veamos un ejemplo:

Supongamos un macizo de sección rectangular que tiene en su interior dos huecos de sección cuadrada que conducen humos a una temperatura de 150° (figura 12). Se supone medida la temperatura exterior que se puede considerar como uniforme en la cara superior y las laterales e igual a 25° , y la de la cara inferior a 60° . Distribución de temperaturas en la sección.

Empezaremos por construir los contornos y dar tensión negativa al contorno exterior, y positiva, a los dos interiores con una diferencia total de unos 2 voltios.

A la sección de la cara inferior la daremos una tensión intermedia tal que su diferencia con la interior esté con respecto a la diferencia total en la relación de temperaturas:

$$\frac{150 - 25}{150 - 60} = \frac{125}{90}.$$

(1) Véase cualquier libro de Física Matemática o Teoría o del Calor, como, por ejemplo, el elemental texto de G. Jäger: *Theoretische Physik.*; trad. Ed. Labor. Tomo I, página 281.

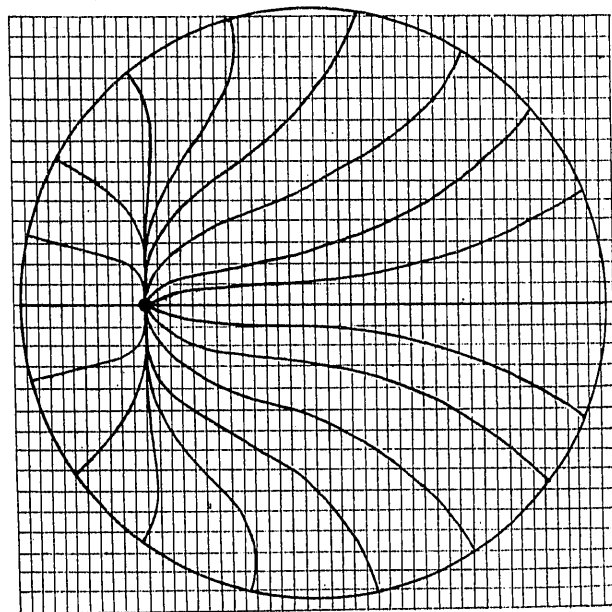


Figura 9.ª

Para 1,85 voltios, que era la diferencia total en el ensayo, resultarán:

$$\frac{1,85}{125} = \frac{x}{90}; \quad x = 1,332 \text{ voltios.}$$

Esta tensión se da con un potenciómetro divisor de la tensión total, obteniéndose la distribución de la figura 12.

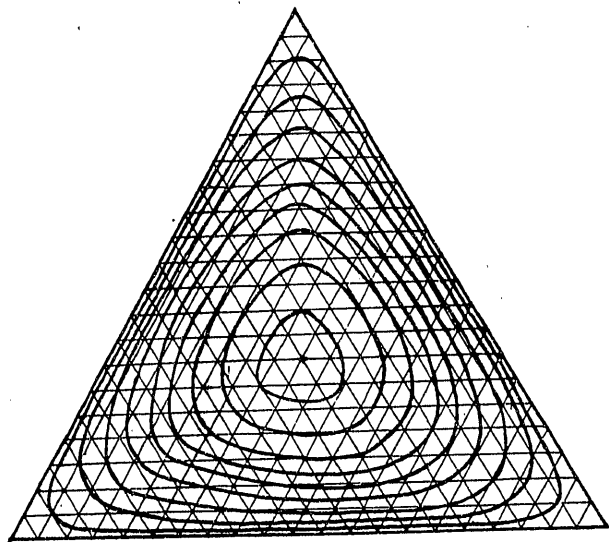


Figura 10.

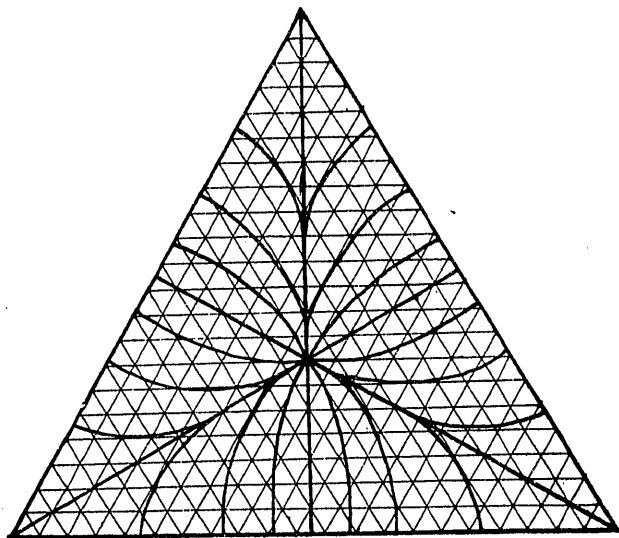


Figura 11.

Debe observarse que, como se trata de un problema soluble por medio de la ecuación de Laplace, *no ha de darse* tensión a ninguno de los enchufes situados en el recuadro inferior izquierda.

5.º Transporte de calor y distribución de temperaturas cuando se genera o disipa calor uniformemente.

La relación que sirve para plantear la función de temperaturas:

$$m \cdot u'_t = u''_{x^2} + u''_{y^2},$$

y u'_t es constante.

Supongamos que una presa se construye tan rápidamente que no llega a disiparse el calor de fraguado, cosa que sucede con frecuencia en la realidad.

Para simplificar el problema supondremos primeramente que toda la presa genera calor uniformemente y que todos sus contornos están a igual temperatura (fig. 13).

Basta formar el contorno y comunicarle con el

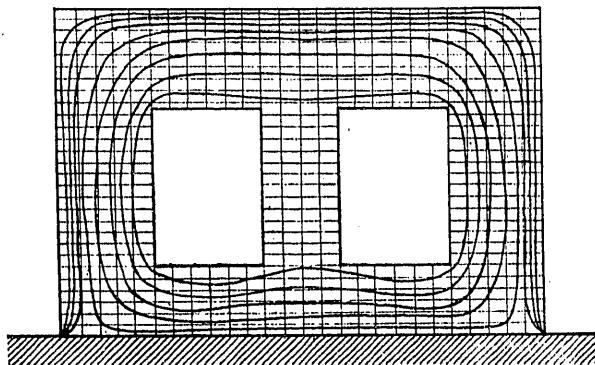


Figura 12.

polo positivo mientras el polo negativo se une a las zonas que cubren la figura.

Midiendo tensiones, tendremos las curvas isoterma.

6.º Problemas de potencial eléctrico en electrostática.

Ya que si se trata de puntos exteriores a los cuerpos o zonas cargadas se cumplirá la ecuación de Laplace, y si se trata de puntos interiores a cuerpos cargados, siendo éstos conductores, la carga σ será uniforme, y la fórmula de Poisson tomará la forma de la ecuación de Poisson:

$$V''_{x^2} + V''_{y^2} = -2\pi\sigma.$$

Supongamos que dos cables tienen tensiones iguales a $+50$ y -50 y se hallan a una cierta altura sobre un suelo conductor neutro (fig. 14).

Uniremos el polo positivo a un punto de sección de los cables, y el negativo, al otro punto.

La integración que se realiza de la ecuación de Laplace permite obtener el campo eléctrico de la figura 15.

7.º Cálculo de secciones de piezas prismáticas sometidas a torsión simple.

En una sección ortogonal al eje sólo existen esfuerzos tangenciales que no modifican la dilatación cúbica θ , condición suficiente para que las deformaciones de un cuerpo isótropo $\xi \eta \zeta$ paralelas a $O X$, $O Y$, $O Z$ admitan una función potencial φ tal que:

$$\xi = \varphi'_x; \quad \eta = \varphi'_y; \quad \zeta = \varphi'_z$$

(véanse los tratados de Peña, Torroja, Timoschenko, etcétera, de la materia).

Pero como en este caso, si el eje de la pieza es paralelo a $O Z$:

$$\zeta = \varphi'_z = 0;$$

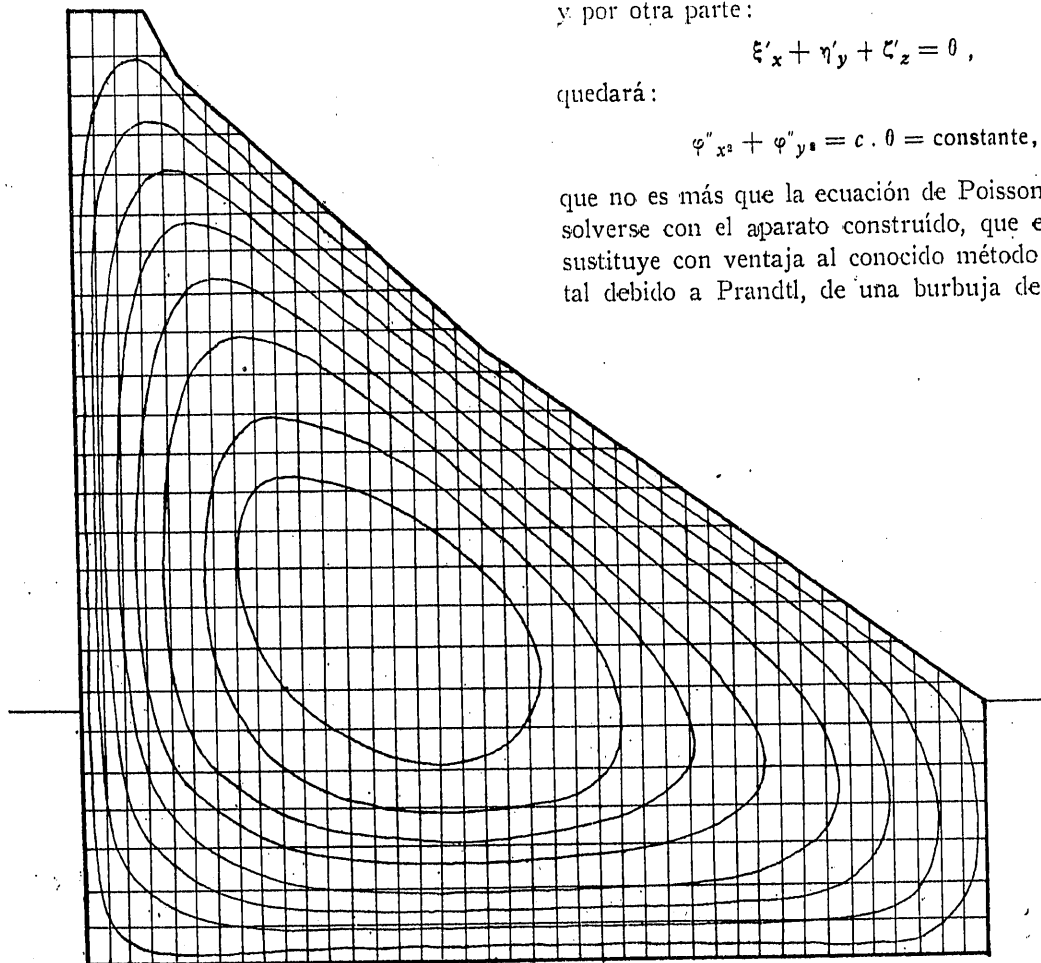


Figura 13.

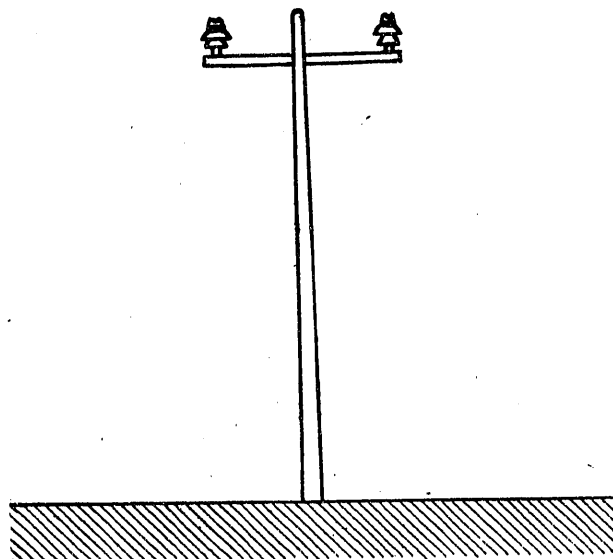


Figura 14.

y por otra parte:

$$\xi'_x + \eta'_y + \zeta'_z = 0,$$

quedará:

$$\varphi''_{x^2} + \varphi''_{y^2} = c \cdot 0 = \text{constante},$$

que no es más que la ecuación de Poisson. Puede resolverse con el aparato construido, que en este caso sustituye con ventaja al conocido método experimental debido a Prandtl, de una burbuja de jabón for-

mada sobre el contorno de la sección e hinchada con aire a una leve presión.

Supongamos una pieza prismática de sección triangular sometida a torsión simple.

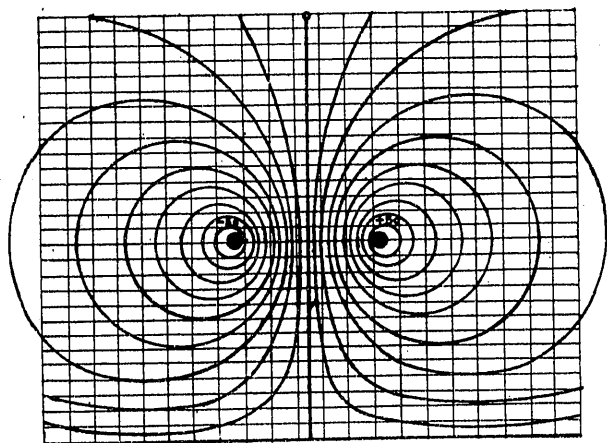


Figura 15.

Las líneas que se obtienen para la función φ son las ya indicadas para el tercer caso (fig. 10), teniendo en cuenta que su gradiente es el esfuerzo cortante.

8.º Velocidades en una tubería.

Para estudiar la distribución de velocidades en una sección normal de una tubería en régimen lami-

nar basta resolver la ecuación de Poisson, ya que las ecuaciones de Navier Stokes que rigen el movimiento se reducen a:

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= p'_x + \mu [u''_{y^2} + u''_{z^2}] \\ \rho_y &= p'_y \\ \rho_z &= p'_z \end{aligned} \right\} u = \text{velocidad,}$$

siendo x la dirección del eje del tubo.

Si no actúa más que la gravedad y p'_x es el gradiente (pendiente en este caso):

$$u''_{y^2} + u''_{z^2} = -\frac{p'_x}{\mu},$$

que no es más que la ecuación de Poisson.

Por ejemplo: para una tubería de sección triangular, nos serviría la misma figura del tercer caso (figura 10).

* * *

Hasta aquí, ocho tipos de problemas que se resuelven con la instalación construída. Pero quedan otros. Por ejemplo: flexión de piezas prismáticas, movimiento laminar en canales, distribución de tensiones en las armaduras de un condensador, distribución de corriente eléctrica en un conductor grueso. Y muchos más que cualquiera puede hallar al estudiar matemáticamente problemas de cimentaciones, suelos, hidráulica, etc.