

# MAS APLICACIONES MECANICAS DE LA FUNCION DE GREEN

Por JOSÉ MARÍN TOYOS, Ingeniero de Caminos.

Como dice el autor en los primeros párrafos, presenta una nueva aplicación de la función de Green, que se refiere a las estructuras reticulares, y hace constar, al final, que el tema no está agotado y espera lograr alguna otra aplicación, que ofrecerá a los lectores que se interesan por estos temas.

## II

En el número de septiembre de 1946 publicamos "Algunas aplicaciones mecánicas de la función de Green", dando a la luz cuantas habíamos encontrado en el estudio de esta interesante función, compatible con el tiempo que el trabajo diario permite dedicar a estas cuestiones, que constituyen el ocio de otras actividades.

El tema es tan sugestivo, quizá por no ser obligatorio, que hemos seguido estudiándolo, y al llegar a nuevas aplicaciones, las reunimos para formar la continuación de aquel primer artículo; como éste, el actual comprende una parte teórica y otra de aplicación práctica.

### Teorema de Clapeyron.

Tiene por finalidad, como es sabido, encontrar una expresión que ligue los momentos hiperestáticos de tres apoyos consecutivos de una viga continua apoyada.

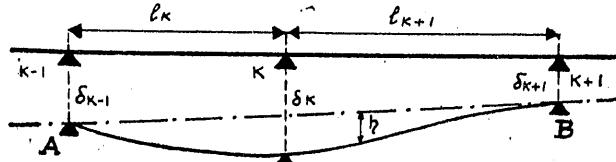


Figura 5.<sup>a</sup>

Consideremos dos tramos de esta viga, cuyas luces son (fig. 5.<sup>a</sup>)  $l_k$  y  $l_{k+1}$ , sustentados por los apoyos  $k - 1$ ,  $k$  y  $k + 1$ . A causa de los esfuerzos solicitantes, la viga y sus apoyos han experimentado una deformación, siendo la magnitud de la de éstos  $\delta_{k-1}$ ,  $\delta_k$  y  $\delta_{k+1}$ , respectivamente. El sistema de cargas da lugar a una variación de momentos flectores,  $M(x)$ , y sabemos que la deformada satisface a la ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)};$$

pero para poder aplicar la función de Green es preciso

que se satisfagan las condiciones de los límites en los extremos (\*); es decir, que

$$y = 0 \quad \text{para } \begin{cases} x = 0 \\ x = l_k + l_{k+1}; \end{cases}$$

lo que no se verifica en este caso si se toma como eje  $X$  la directriz de la viga; pero si referimos la deformada al eje de abscisas  $AB$ , las condiciones de los límites quedan satisfechas, se puede aplicar la expresión [8] (\*), y se obtiene directamente:

$$\eta = \int_0^{l_k + l_{k+1}} G(x, \xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi;$$

y para el valor particular de  $x = l_k$ , resulta:

$$\eta_k = \int_0^{l_k + l_{k+1}} G(l_k, \xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi. \quad [14]$$

Esta es la expresión más general del teorema de Clapeyron, puesto que con ella se obtienen directamente las deformaciones en los apoyos y de éstos se deducen los momentos flectores, sean cualesquiera los tramos de la viga que se consideren y las características particulares de éstos.

Esta expresión, con toda su generalidad, resulta poco práctica, pero vamos a ver cómo de ella se deducen las que figuran en términos finitos en los tratados y manuales.

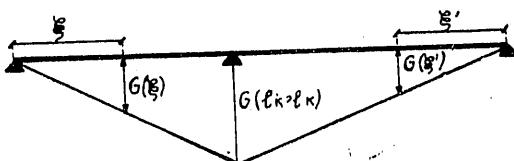
Si consideramos abscisas  $\xi$  para el tramo  $l_k$  a partir del apoyo  $k - 1$ , y abscisas  $\xi'$  para el tramo  $l_{k+1}$  a partir del apoyo  $k + 1$ , la expresión general [14] puede escribirse así:

$$\begin{aligned} \eta_k &= \int_0^{l_k} G(l_k, \xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi + \\ &+ \int_0^{l_{k+1}} G(l_{k+1}, \xi') \frac{M(\xi')}{EI(\xi')} d\xi'. \end{aligned} \quad [15]$$

La ley de momentos  $M(\xi)$ ,  $M(\xi')$ , producidos por las cargas solicitantes, se descompone en dos: la debida a los isostáticos y la que producen los hiperestáticos. Cada uno de ellos da lugar a una deformación que, particularizada en el apoyo  $k$ , resulta:

$$\eta_k = \eta_{kh} + \eta_{ki}.$$

Calcularemos separadamente cada uno de los sumandos, aplicando la fórmula [15].

Figura 6.<sup>a</sup>

La función  $G$  tiene por variación una ley triangular (fig. 6.<sup>a</sup>), cuyo valor para  $\xi = l_k$  se obtiene aplicando [5] (\*), y vale:

$$G(l_k, l_k) = \frac{l_k \cdot l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}};$$

y, por lo tanto,  $G(l_k, \xi)$  y  $G(l_{k+1}, \xi')$ , valdrán:

$$G(l_k, \xi) = \frac{l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}} \xi \rightarrow G(l_{k+1}, \xi') = \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}} \xi'.$$

Siendo  $M_{k-1}$ ,  $M_k$  y  $M_{k+1}$  los momentos en los apoyos,  $M(\xi)$  en los dos tramos será, teniendo presente que consideramos únicamente los momentos hiperestáticos:

$$M(\xi) = M_{k-1} + \frac{(M_k - M_{k-1})\xi}{l_k};$$

$$M(\xi') = M_{k+1} + \frac{(M_k - M_{k+1})\xi'}{l_{k+1}}.$$

Con esto tenemos los elementos necesarios para aplicar la fórmula [15] a los momentos hiperestáticos y calcular  $\eta_{kh}$ , que será:

$$\eta_{kh} = \int_0^{l_k} \frac{l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}} \xi \left( M_{k-1} + \frac{(M_k - M_{k-1})\xi}{l_k} \right) \frac{d\xi}{EI(\xi)} +$$

$$+ \int_0^{l_{k+1}} \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}} \xi' \left( M_{k+1} + \frac{(M_k - M_{k+1})\xi'}{l_{k+1}} \right) \frac{d\xi'}{EI(\xi')}.$$

Consideremos constante el momento de inercia de cada tramo, aunque variable de uno a otro, y sean  $I_k$ ,  $I_{k+1}$ , efectuando las integraciones, que no ofrecen ninguna dificultad, se obtiene:

$$\eta_{kh} = \frac{l_k \cdot l_{k+1}}{(l_k + l_{k+1}) 6 E} \left[ \frac{l_k}{I_k} (M_{k-1} + 2M_k) + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}} (M_{k+1} + 2M_k) \right]. \quad [16]$$

Calculemos ahora la deformación  $\eta_{ki}$  debida a los momentos isostáticos, aplicando la misma fórmula [15], y tenemos:

$$\eta_{ki} = \frac{l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}} \int_0^{l_k} \xi \frac{M_i(\xi)}{EI_k} d\xi + \\ + \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}} \int_0^{l_{k+1}} \xi' \frac{M_i(\xi')}{EI_{k+1}} d\xi';$$

Las integrales que figuran en esta expresión son, precisamente, los momentos estáticos a la izquierda, en el primer tramo, y a la derecha, en el segundo, que podemos representar, como es usual, por:

$$(M_i) = \int_0^{l_k} \xi M_i(\xi) d\xi \rightarrow (M_i) = \int_0^{l_{k+1}} \xi' M_i(\xi') d\xi';$$

y queda la expresión:

$$\eta_{ki} = \frac{l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}} \frac{(M_i)_{l_k}}{EI_k} + \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}} \frac{[M_i]_{k+1}}{EI_{k+1}}. \quad [17]$$

Sumando las expresiones [16] y [17], se obtiene  $\eta_k$ :

$$\eta_k = \frac{l_k + l_{k+1}}{6 E (l_k + l_{k+1})} \left[ \frac{l_k}{I_k} (M_{k-1} + 2M_k) + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}} (M_{k+1} + 2M_k) + \frac{l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}} \frac{(M_i)_{l_k}}{EI_k} + \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}} \frac{[M_i]_{k+1}}{EI_{k+1}} \right]. \quad [18]$$

Ahora, la deformación total  $\delta_k$ , en el apoyo  $k$ , se puede expresar así (fig. 5.<sup>a</sup>):

$$\delta_k = \eta_k + \delta_{k-1} \frac{l_{k+1}}{l_k + l_{k+1}} + \delta_{k+1} \frac{l_k}{l_k + l_{k+1}};$$

sustituímos, en lugar de  $\eta_k$ , su valor [18]; sim-

plificamos y se obtiene la ecuación de Clapeyron en términos finitos:

$$\begin{aligned} M_{k-1} \frac{l_k}{I_k} + 2M_k \left( \frac{l_k}{I_k} + \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}} \right) + M_{k+1} \frac{l_{k+1}}{I_{k+1}} = \\ = -6 \left[ \frac{(M_i)_k}{l_k} + \frac{(M_i)_{k+1}}{l_{k+1}} \right] - 6E \left( \frac{\delta_{k-1} - \delta_k}{l_k} + \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{l_{k+1}} \right), \end{aligned} \quad [19]$$

la que, comparada con la [14], tiene menos generalidad por exigir que cada uno de los tramos sea de momento de inercia constante, pero es de mejor aplicación práctica.

Vayamos descendiendo a casos particulares y supongamos que toda la viga tenga el mismo momento de inercia,  $I_k = I_{k+1} = I$ , resultando:

$$\begin{aligned} M_{k-1} l_k + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \\ = -6 \left[ \frac{(M_i)_k}{l_k} + \frac{(M_i)_{k+1}}{l_{k+1}} \right] - 6EI \left( \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{l_k} + \frac{\delta_{k+1} - \delta_k}{l_{k+1}} \right). \end{aligned} \quad [20]$$

Supongamos ahora que todos los apoyos son rígidos, y la expresión [20], al hacer  $\delta_{k-1} = \delta_k = \delta_{k+1} = 0$ , se convierte en la siguiente:

$$\begin{aligned} M_{k-1} l_k + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \\ = -6 \left[ \frac{(M_i)_k}{l_k} + \frac{(M_i)_{k+1}}{l_{k+1}} \right]. \end{aligned} \quad [21]$$

Supongamos también que los tramos de la viga son de la misma luz, con lo que  $l_k = l_{k+1}$  y la fórmula se reduce a:

$$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = -\frac{6}{l^2} [(M_i)_k + (M_i)_{k+1}]. \quad [22]$$

Las fórmulas [20], [21] y [22] son las que, por tener más aplicación, se encuentran en todos los manuales.

Si el tramo  $k$  está sometido a una carga uniformemente repartida,  $p_k$ , y el tramo  $k+1$  a otra,  $p_{k+1}$ , los valores de los momentos estáticos son:

$$\begin{aligned} (M_i)_k &= \int_0^{l_k} \xi \frac{1}{2} p_k \xi (l_k - \xi) d\xi = \frac{p_k l_k^4}{24}; \\ (M_i)_{k+1} &= \int_0^{l_{k+1}} \xi' - \frac{1}{2} p_{k+1} \xi' (l_{k+1} - \xi') d\xi' = \\ &= \frac{p_{k+1} l_{k+1}^4}{24} \end{aligned}$$

y la ecuación de Clapeyron será en este caso [21]:

$$\begin{aligned} M_{k-1} l_k + 2M_k (l_k + l_{k+1}) + M_{k+1} l_{k+1} = \\ = -\frac{1}{4} (p_k l_k^3 + p_{k+1} l_{k+1}^3). \end{aligned} \quad [23]$$

Por último, si los tramos son de igual luz y sometidos a la misma carga,  $p$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = -\frac{p l^3}{2}. \quad [24]$$

### La función de Green en las estructuras reticulares.

Consideremos una barra cualquiera,  $A B$  (fig. 7.<sup>a</sup>), de una estructura reticular en la que admitimos que no experimenta más que deformaciones angulares en los nudos; está sometida a un régimen de cargas que produce una variación,  $M(x)$ , de momentos flectores

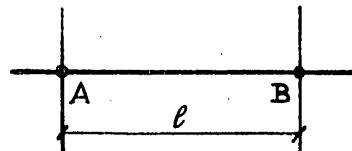


Figura 7.<sup>a</sup>

Podemos estudiar la barra  $A B$  independientemente del resto de la estructura y considerarla como apoyada en los extremos, si en éstos aplicamos las reacciones hiperestáticas que la ligan a aquélla. En estas condiciones se verifica la ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)};$$

y como no existen, por hipótesis, deformaciones lineales, la ecuación de la elástica o deformada será directamente por aplicación de la función de Green:

$$y = \int_0^l G(x, \xi) \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi; \quad [25]$$

y como:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(l-x)\xi}{l}, & \text{para } 0 < \xi < x; \\ \frac{(l-\xi)x}{l}, & \text{para } x < \xi < l; \end{cases}$$

la expresión anterior puede escribirse:

$$\begin{aligned} y &= \int_0^x \frac{(l-x)\xi}{l} \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi + \\ &+ \int_x^l \frac{(l-\xi)x}{l} \frac{M(\xi)}{EI(\xi)} d\xi = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^x (l-x)\xi \frac{M(\xi)}{I(\xi)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_x^l (l-\xi)x \frac{M(\xi)}{I(\xi)} \right] d\xi. \quad [26] \end{aligned}$$

Si en la estructura que se estudia es ya conocida  $M(x)$ , se obtiene así directamente la ecuación de la directriz deformada; si es desconocida la ley de momentos, la ecuación [26] o su derivada permiten establecer ecuaciones de condición para determinar los momentos flectores, problema que se presenta con más frecuencia que el anterior.

Analizando la expresión [25], tenemos que  $G(x, \xi)$  es un momento; luego sus dimensiones son  $FL$ , y éstas son también las de  $M(\xi)$ ; las dimensiones del coeficiente de elasticidad  $E$  son  $FL^{-2}$ , por representar una fuerza por unidad de superficie; el momento de inercia tiene  $L^4$  por dimensión; aplicando estos valores, las dimensiones de  $y$  son:

$$FL \frac{FL \cdot L}{FL^{-2} L^4} = FL,$$

que representan un trabajo  $y$ , y por lo tanto, la ecuación no es homogénea por ser  $y$  una longitud; para que lo sea, hay que multiplicar el primer miembro por la fuerza unidad, que designaremos por  $\bar{1}$ , sin que se altere por ello su representación. Como  $G(x, \xi)$  representa el momento flector producido por la fuerza unidad situada en la abscisa  $x$  de la viga isostática de luz  $l$ , podemos también representarlo por el símbolo  $\bar{M}$ , y entonces la ecuación [25] se representa por:

$$\bar{1} \cdot y_x = \int_0^l \frac{\bar{M} M}{E I} d\xi,$$

que es una elegante demostración del teorema de los "Trabajos virtuales", de aplicación en el cálculo de estructuras.

*Aplicaciones.* — Supongamos el pórtico de la figura 8.<sup>a</sup>, cuyo dintel está sometido a la carga uniformemente repartida  $p$  kilogramos por metro, y que ya conocemos la ley de variación de momentos en el dintel, que es:

$$M(x) = \frac{1}{2} p x(l-x) - \frac{p l^2}{6(2+K)}; \quad K = \frac{I_2 h}{I_1 l}.$$

Aplicando la fórmula [26], la ecuación de la deformada será:

$$y = \frac{1}{EI_2 l} \left[ \int_0^x (l-x)\xi \left[ \frac{1}{2} p \xi(l-\xi) - \frac{p l^2}{6(2+K)} \right] + \right. \\ \left. + \int_x^l (l-\xi)x \left[ \frac{1}{2} p \xi(l-\xi) - \frac{p l^2}{6(2+K)} \right] \right] d\xi;$$

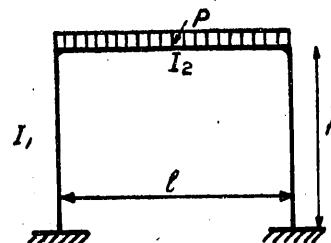


Figura 8.<sup>a</sup>

efectuando la integración y simplificando, se obtiene:

$$y = \frac{p x(x-l)}{12 E I_2} \left( \frac{x^2 - l x - l^2}{2} + \frac{l^2}{2+K} \right).$$

La flecha máxima se obtiene para  $x = \frac{l}{2}$  y vale:

$$y = -\frac{p l^4}{48 E I_2} \left( \frac{5}{8} - \frac{1}{2+K} \right);$$

si la misma viga estuviese apoyada, se sabe que la flecha máxima es:

$$y = -\frac{p l^4}{384 E I_2};$$

y se ve claramente que las uniones con los pilares produce una contraflecha:

$$y_1 = +\frac{p l^4}{48 E I_2 (2+K)}.$$

La deformada tiene, como debía de ocurrir, dos puntos de inflexión, simétricamente colocados respecto al centro del dintel, cuyas abscisas son:

$$x = \frac{l}{2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{2+3K}{3(2+K)}} \right).$$

Estudiemos a continuación el problema contrario; es decir: que en el mismo pórtico de la figura 8.<sup>a</sup> queremos determinar la ley de momentos, ahora desconocida.

Por razones de simetría, los momentos en los nu-

dos han de ser iguales; los designaremos por  $m$ , y la ecuación de momentos será:

$$M(x) = \frac{1}{2} p x (l - x) - m.$$

Derivamos con respecto a  $x$  la función [26], y tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI} \left[ \int_0^x \xi \frac{M(\xi)}{I(\xi)} d\xi - \int_x^l (l - \xi) \frac{M(\xi)}{I(\xi)} d\xi \right] d\xi;$$

aplicando valores, se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & -\frac{1}{EI_2 l} \int_0^x \xi \left[ \frac{1}{2} p \xi (l - \xi) - m \right] d\xi + \\ & + \frac{1}{EI_2 l} \int_x^l (l - \xi) \left[ \frac{1}{2} p \xi (l - \xi) - m \right] d\xi, \end{aligned}$$

sin que sea necesario desarrollar esta expresión, porque como lo que interesa es el valor  $\frac{dy}{dx}$  en el extremo izquierdo, o sea para  $x = 0$ , el primer término se anula y queda únicamente:

$$\begin{aligned} \left( \frac{dy}{dx} \right)_{x=0} &= \frac{1}{EI_2 l} \int_0^l (l - \xi) \left[ \frac{1}{2} p \xi (l - \xi) - m \right] d\xi = \\ &= \frac{l}{2EI_2} \left( \frac{p l^2}{12} - m \right). \end{aligned} \quad [27]$$

Pero este ángulo de deformación es el mismo que habrá experimentado el pilar correspondiente en la cabeza superior, y su valor, teniendo en cuenta que el extremo inferior está empotrado, es:

$$\frac{m h}{4EI_1} = \frac{m k l}{4EI_2}; \quad [28]$$

como consecuencia, se ha de verificar [27] = [28], que es la ecuación de condición que permite calcular el valor de  $m$ :

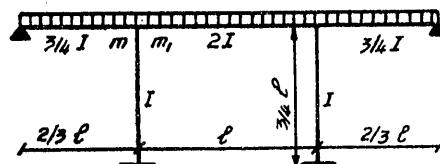
$$\begin{aligned} \frac{l}{2EI_2} \left( \frac{p l^2}{12} - m \right) &= \frac{m k l}{4EI_2}, \\ m &= \frac{p l^2}{6(2+k)}; \end{aligned}$$

conocido esto, la ley de variación de los momentos flectores en el dintel es:

$$M(x) = \frac{1}{2} p x (l - x) - \frac{p l^2}{6(2+k)},$$

que es precisamente la misma que se tuvo en cuenta en el primer problema.

Hagamos otra aplicación al pórtico triple representado en la figura 9.<sup>a</sup>, en la que también se indican sus características y la carga a que está sometido. Por simetría, los momentos que se produzcan en los nudos son iguales; así que basta con estudiar uno de ellos: el izquierdo; llamemos  $m$  al del tramo izquierdo;  $m_1$ , al del derecho, y sobre el pilar actuará  $m - m_1$ .

Figura 9.<sup>a</sup>

La ley de momentos del tramo izquierdo es:

$$M(x) = \frac{1}{2} p x \left( \frac{2l}{3} - x \right) - \frac{3m x}{2l};$$

el ángulo de deformación en este tramo, para  $x = l$ :

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{-2}{EI l} \int_0^l \xi \left[ \frac{1}{2} p \xi \left( \frac{2l}{3} - \xi \right) - \frac{3m \xi}{2l} \right] d\xi = \\ &= \frac{8l}{27EI} \left( -\frac{p l^2}{18} + m \right). \end{aligned}$$

La ley de momentos en el tramo derecho es:

$$M_1(x) = \frac{1}{2} p x (l - x) - m_1;$$

el ángulo de deformación para  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{2EI l} \int_0^l (l - \xi) \left[ \frac{1}{2} p x (l - x) - m_1 \right] d\xi = \\ &= \frac{l}{2EI} \left( \frac{p l^2}{24} - \frac{m_1}{2} \right). \end{aligned}$$

El ángulo de deformación en la cabeza superior del pilar es:

$$\theta_3 = \frac{3l(m - m_1)}{16EI};$$

Como se ha de verificar que  $\theta_1 = \theta_3$  y  $\theta_2 = \theta_3$ , resultan las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{8l}{27EI} \left( -\frac{p l^2}{18} + m \right) = \frac{3l(m - m_1)}{16EI} \\ \frac{l}{2EI} \left( \frac{p l^2}{24} - \frac{m_1}{2} \right) = \frac{3l(m - m_1)}{16EI} \end{cases} \begin{cases} m = 0,101 p l^2 \\ m_1 = 0,030 p l^2 \end{cases}$$

Conocidos estos valores, el problema está resuelto, pues las variaciones de los momentos flectores en el tramo izquierdo y en el tramo central serán, respectivamente:

$$M_1(x) = \frac{1}{2} p x \left( \frac{2l}{3} - x \right) - \frac{0,101 p l^2 x}{\frac{2}{3} l} =$$

$$= \frac{p x}{6} (1,091 l - 3 x);$$

$$M_2(x) = \frac{1}{2} p x (l - x) - 0,030 p l^2 =$$

$$= p \left[ \frac{x(l-x)}{2} - 0,030 l^2 \right].$$

La variación de momentos en el pilar es una recta; en la cabeza superior, el valor es  $-0,101 p l^2 + 0,030 p l^2 = -0,071 p l^2$ ; y en la inferior vale  $+0,0355 p l^2$ . En la figura 10 se representan estos momentos.

Con estos ejemplos se ve claramente que la aplicación de la función de Green a las estructuras reticulares puede ser útil, y en ellos se ve que sigue en-

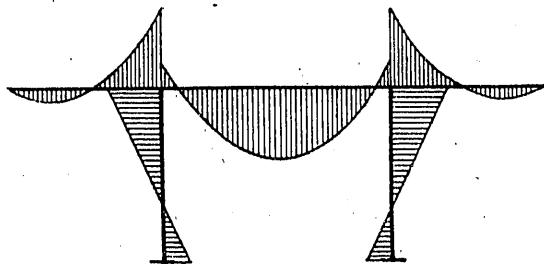


Figura 10.

contrándose la uniformidad, ya puesta de manifiesto en los casos estudiados en el artículo anterior.

\* \* \*

El tema no está agotado; puede dar mayores frutos; si logro llegar a ellos, los conocerán los lectores de la REVISTA que sientan interés por estas cuestiones.