

# CALCULO RAPIDO DE LAS VIGAS CONTINUAS

Por JOSE MARIN TOYOS, Ingeniero de Caminos.

*Presenta el autor un método rápido para el cálculo de vigas continuas, basado en los estudios y procedimientos de los ilustres Ingenieros franceses M. Caquot y M. Reimbert, que aplica a un ejemplo, poniendo de manifiesto la utilidad del procedimiento.*

El cálculo exacto de las vigas continuas con arreglo a las teorías de la Elasticidad, resulta de una laboriosidad muchas veces incompatible con el tiempo de que se dispone para su estudio; pero, además, este cálculo teórico no responde exactamente a las condiciones en que la viga se encuentra, y los resultados a que se llega son erróneos; si se quiere alcanzar en el cálculo la máxima fidelidad, entonces el trabajo que requiere es prácticamente inabordable. Así ocurre, en primer lugar, con las condiciones de los apoyos, que no responden, en general, al concepto teórico de los mismos, pues en la mayor parte de los casos existe un cierto grado de empotramiento que, al no tenerse en cuenta, altera la variación de los momentos flectores, dando valores superiores a los reales para los momentos negativos, lo que no tiene más importancia que la económica, e inferiores los positivos, lo que puede comprometer la resistencia de la viga. En el caso de vigas de hormigón armado, de sección aparente constante, si no se tiene en cuenta la variación que produce en el momento de inercia la presencia variable del hierro, la exactitud no se logra, y si se toma en consideración este detalle, el cálculo puede considerarse como irrealizable en la práctica.

Fundándose en estas consideraciones el ilustre Ingeniero francés M. Caquot, hizo un estudio de las vigas continuas partiendo de la de dos tramos y llegando hasta la de infinito número de ellos, en el que, además, tuvo en cuenta las circunstancias de orden práctico que hemos apuntado, y llegó a establecer las fórmulas siguientes para el cálculo de los momentos flectores en los apoyos de las vigas continuas:

$$\mu_l = K \frac{P_l \lambda_l^2}{\lambda_d + \lambda_l}; \quad \mu_d = K \frac{P_d \lambda_d^2}{\lambda_d + \lambda_l};$$

en las que:

$\mu_l$  = momento a la izquierda del apoyo.

$\mu_d$  = momento a la derecha del apoyo.

$P_l$  = carga concentrada en el tramo izquierdo.

$P_d$  = carga concentrada en el tramo derecho.

$\lambda_l$  = luz virtual del tramo izquierdo, igual a 0,8 de la luz real  $l_l$ , si el extremo opuesto no es apoyo libre, e igual a  $l_l$ , si lo es.

$\lambda_d$  = luz virtual del tramo derecho, igual a 0,8  $l_d$ , si el apoyo opuesto no es libre; igual a  $l_d$ , si lo es.

El coeficiente  $K$  lo estableció Caquot por una escala funcional que da su valor por el de la abscisa unitaria de la carga  $P$ .

Las fórmulas propuestas no son rigurosamente exactas, pero ya se ha visto que tampoco es fácil llegar a la exactitud con el cálculo teórico; presentan la indudable ventaja de la economía de tiempo que reportan y tienen la garantía de que M. Caquot las viene utilizando en sus proyectos desde el año 1918, y de haberlas sometido a numerosas comprobaciones experimentales, lo que hace que puedan emplearse con toda seguridad.

Otro Ingeniero francés, M. Reimbert, al estudiar el procedimiento de Caquot, dedujo que la escala gráfica para determinar el coeficiente  $K$  responde a la función de la parábola cúbica:

$$K = \frac{1}{2,125} \frac{x}{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \left(2 - \frac{x}{\lambda}\right),$$

en la que  $x$  es la abscisa de la carga, medida siempre desde el apoyo que se estudia; si hacemos  $\xi = \frac{x}{\lambda}$ ;

las fórmulas que dan los momentos parciales en los apoyos son:

$$\mu_l = \frac{1}{2,125} \xi_l (1 - \xi_l) (2 - \xi_l) \frac{P_l \lambda_l^2}{\lambda_d + \lambda_l}; \quad [1]$$

$$\mu_d = \frac{1}{2,125} \xi_d (1 - \xi_d) (2 - \xi_d) \frac{P_d \lambda_d^2}{\lambda_d + \lambda_l}. \quad [2]$$

Es evidente que si los dos tramos contiguos al apoyo están cargados con  $P_l$  y  $P_d$ , respectivamente, el momento en el apoyo será:

$$M = \frac{1}{2,125 (\lambda_d + \lambda_l)} \left[ \xi_l (1 - \xi_l) (2 - \xi_l) P_l \lambda_l^2 + \xi_d (1 - \xi_d) (2 - \xi_d) P_d \lambda_d^2 \right].$$

De esta expresión, para el caso de cargas concentradas, pueden deducirse los casos particulares; así, por ejemplo, si los tramos tienen la misma luz virtual  $\lambda_l = \lambda_d = \lambda$ :

$$M = \frac{\lambda}{4,25} \left[ \xi_l (1 - \xi_l) (2 - \xi_l) P_l + \xi_d (1 - \xi_d) (2 - \xi_d) P_d \right];$$

si las cargas fuesen iguales,  $P_i = P_d = P$ :

$$M = \frac{P\lambda}{4,25} [\xi_i (1 - \xi_i) (2 - \xi_i) + \xi_d (1 - \xi_d) (2 - \xi_d)];$$

si las cargas estuviesen simétricamente colocadas respecto al apoyo  $\xi_i = \xi_d = \xi$ :

$$M = \frac{P\lambda}{2,125} \xi (1 - \xi) (2 - \xi);$$

por último, si la viga fuese de dos tramos iguales y la carga  $P$  estuviese situada en el centro de cada uno,

$$\xi = \frac{1}{2};$$

$$M = \frac{3Pl}{17}.$$

Si consideramos cargado con la fuerza unidad sólo uno de los tramos, el valor del momento en el apoyo será:

$$M_i = \frac{1}{2,125} \xi_i (1 - \xi_i) (2 - \xi_i) \frac{\lambda_i^2}{\lambda_d + \lambda_i};$$

$$M_d = \frac{1}{2,125} \xi_d (1 - \xi_d) (2 - \xi_d) \frac{\lambda_d^2}{\lambda_d + \lambda_i};$$

y si tomamos a  $\xi$  como variable, las expresiones anteriores representan las ecuaciones de la línea de influencia del momento flector en el apoyo que se estudia: la primera, cuando la fuerza unidad recorre el tramo izquierdo, y la segunda, cuando lo hace por el derecho.

Estas ecuaciones tienen un máximo para el valor de la abscisa:

$$\xi_i = \xi_d = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,423,$$

y los valores máximos son:

$$M_i = \frac{\sqrt{3}}{9,5625} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_d + \lambda_i}; \quad M_d = \frac{\sqrt{3}}{9,5625} \frac{\lambda_d^2}{\lambda_d + \lambda_i}.$$

Los valores de los coeficientes de las líneas de influencia son:

$\xi$	$y$	$\xi$	$y$
0	0	0,5	0,1765
0,1	0,0805	0,6	0,1531
0,2	0,1355	0,7	0,1285
0,3	0,1680	0,8	0,0903
0,4	0,1807	0,9	0,0466
0,423	0,1811	1,0	0

los que hay que multiplicar por  $\frac{\lambda_i^2}{\lambda_d + \lambda_i}$  para la rama

izquierda y por  $\frac{\lambda_d^2}{\lambda_d + \lambda_i}$  para la rama derecha.

Las líneas de influencia en los tres casos que pueden presentarse se representan en la figura 1.<sup>a</sup>, y de ellas se deduce que el valor máximo que adquiere el momento flector en un apoyo cualquiera de una viga

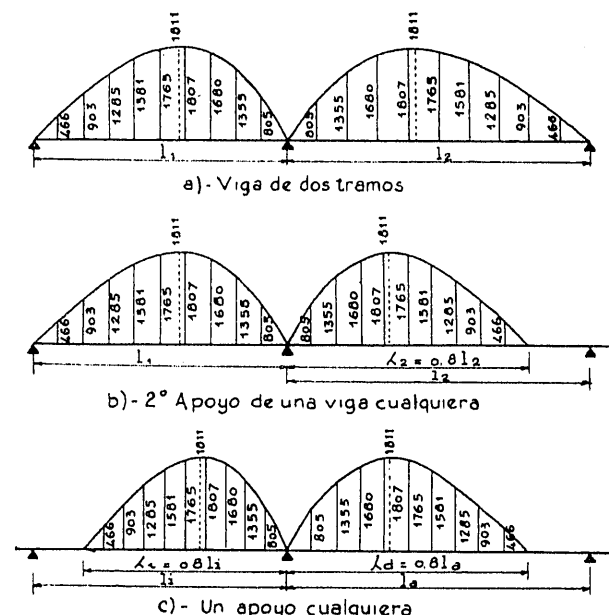


Fig. 1.<sup>a</sup> — Líneas de influencia del momento en los apoyos.

continua, cuando una fuerza,  $P$ , recorre el tramo izquierdo o el derecho, es, respectivamente:

$$M_i = 0,1811 \frac{P\lambda_i^2}{\lambda_d + \lambda_i}; \quad M_d = 0,1811 \frac{P\lambda_d^2}{\lambda_d + \lambda_i};$$

y si los tramos son iguales:

$$M = 0,1811 P\lambda.$$

Si la carga en los tramos es repartida obedeciendo a una ley de variación  $p_i(x)$  ó  $p_d(x)$ , basta sustituir en las expresiones [1] y [2]  $P$  por  $p\lambda(\xi)d\xi$ , e integrar entre las abscisas unitarias en que se extiende la carga, y si es en todo el tramo, entre 0 y 1, y resulta:

$$\mu_i = \frac{\lambda_i^2}{2,125(\lambda_d + \lambda_i)} \int_0^1 \xi_i (1 - \xi_i) (2 - \xi_i) p_i(\xi) d\xi;$$

$$\mu_d = \frac{\lambda_d^2}{2,125(\lambda_d + \lambda_i)} \int_0^1 \xi_d (1 - \xi_d) (2 - \xi_d) p_d(\xi) d\xi.$$

Cuando la carga esté uniformemente repartida en todo el tramo,  $p$  será constante, y se obtiene:

$$\mu_i = \frac{p\lambda_i^2}{8,5(\lambda_d + \lambda_i)}; \quad \mu_d = \frac{p\lambda_d^2}{8,5(\lambda_d + \lambda_i)}.$$

Con los dos tramos cargados, el momento en el apoyo común es:

$$M = \frac{p_i \lambda_i^2 l_i + p_d \lambda_d^3}{8,5 (\lambda_d + \lambda_i)};$$

si tuviesen la misma carga unitaria,  $p$ :

$$M = \frac{p}{8,5} (\lambda_i^2 - \lambda_i \lambda_d + \lambda_d^2);$$

y si se tratase de una viga de dos tramos iguales:

$$M = \frac{p l^2}{8,5}.$$

Apoyo 2:

$$\lambda_i = 6,00; \quad \lambda_d = 0,8 + 8 = 6,4; \quad p = 450;$$

$$\mu_i = \frac{450 \times 6,00^3}{8,5 (6,4 + 6)} = 922 \text{ m./Kg.};$$

$$\xi_d = \frac{2,00}{6,4} = \frac{1}{3,2}; \quad P = 2000;$$

$$\mu_d = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{1}{3,2} \cdot \frac{2,2}{3,2} \cdot \frac{5,4}{3,2} \cdot \frac{2000 \times 6,4^2}{6,4 + 6} = 1127 \text{ m./Kg.}$$

$$M_2 = 922 + 1127 = 2049 \text{ m./Kg.}$$

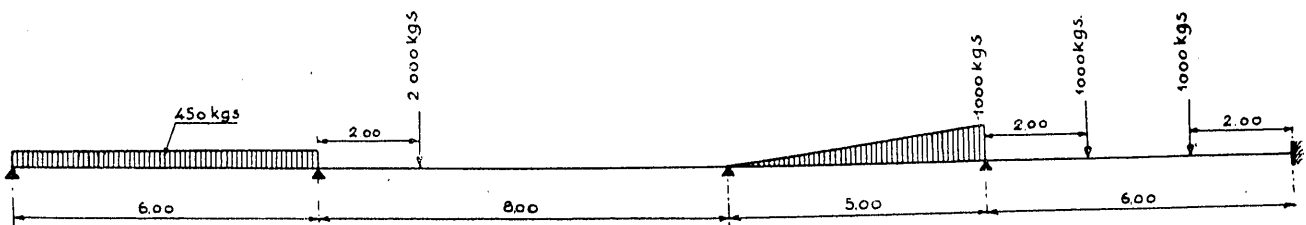


Fig. 2.<sup>a</sup> — Esquema de la viga.

En el caso de que uno de los tramos extremos esté empotrado, se puede considerar un tramo virtual a la izquierda y hacer, en las fórmulas correspondientes, de  $\mu_d$ ,  $\lambda_i = 0$ , con lo que resulta:

Para carga concentrada:

$$M = \frac{Pl}{2,656} \xi (1 - \xi) (2 - \xi).$$

Para carga repartida:

$$M = \frac{l^2}{5,188} \int_0^1 \xi (1 - \xi) (2 - \xi) p(\xi) d\xi.$$

Para carga uniforme:

$$M = \frac{p l^2}{13,281}.$$

EJEMPLO:

Hagamos, como aplicación de lo anterior, el cálculo de los momentos flectores de la viga de cuatro tramos que se indica en la figura 2.<sup>a</sup>, para ver la rapidez con que se obtiene y, siquiera sea mentalmente, recuérdese a lo que daría lugar de seguir los procedimientos clásicos:

Apoyo 1:

$$M_1 = 0.$$

Apoyo 3:

$$\lambda_i = 6,40; \quad \xi_i = \frac{6}{6,4} = \frac{3}{3,2}; \quad \lambda_d = 5,00 \times 0,8 = 4,00;$$

$$\mu_i = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{3}{3,2} \cdot \frac{0,2}{3,2} \cdot \frac{3,4}{3,2} \cdot \frac{2000 \times 6,4^2}{6,4 + 4,0} = 590 \text{ m./Kg.};$$

$$p_d(\xi) = 1000 \frac{\xi}{4} = 1000 \xi;$$

$$\mu_d = \frac{4,00^3}{2,125 (6,4 + 4,0)} \int_0^1 \xi (1 - \xi) (2 - \xi) \cdot 1000 \xi \cdot d\xi = 272 \text{ m./Kg.};$$

$$M_3 = 590 + 272 = 862 \text{ m./Kg.}$$

Apoyo 4:

$$\lambda_i = 4,00; \quad \lambda_d = 6,00 \times 0,8 = 4,80; \quad p_i(\xi) = 1000 (1 - \xi);$$

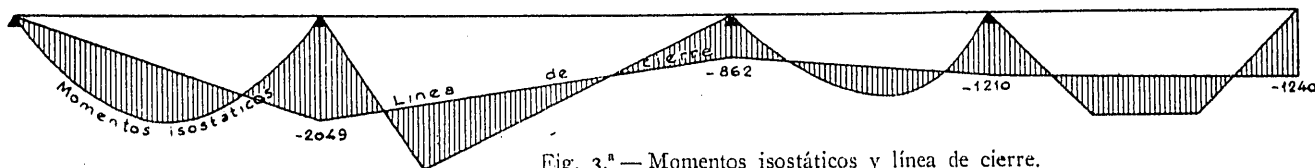
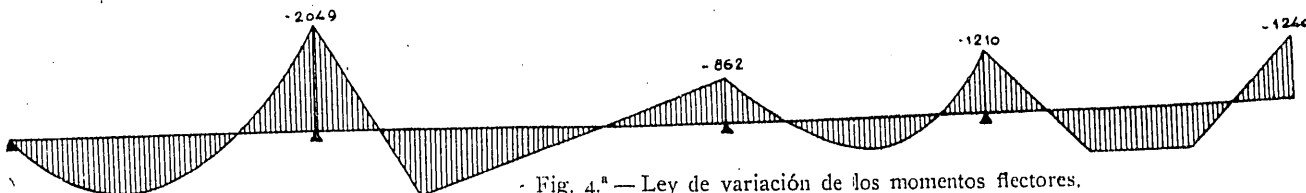
$$\mu_i = \frac{4,00^3}{2,125 (4,0 + 4,8)} \int_0^1 \xi (1 - \xi) (2 - \xi) \cdot 1000 (1 - \xi) d\xi = 536 \text{ m./Kg.};$$

$$\xi_d = \frac{2,00}{4,8} = \frac{1}{2,4}; \quad \xi'_d = \frac{4,00}{4,8} = \frac{1}{1,2}; \quad P = P' = 1000 \text{ Kg.}$$

$$\mu_d = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{1}{2,4} \cdot \frac{1,4}{2,4} \cdot \frac{3,8}{2,4} \cdot \frac{1000 \times 4,80^2}{4,0 + 4,8} = 474 \text{ m./Kg.};$$

$$\mu'_d = \frac{1}{2,125} \cdot \frac{1}{1,2} \cdot \frac{0,2}{1,2} \cdot \frac{1,4}{1,2} \cdot \frac{1000 \times 4,80^2}{4,0 + 4,8} = 200 \text{ m./Kg.};$$

$$M_4 = 536 + 474 + 200 = 1210 \text{ m./Kg.}$$

Fig. 3.<sup>a</sup> — Momentos isostáticos y línea de cierre.Fig. 4.<sup>a</sup> — Ley de variación de los momentos flectores.

Apoyo 5:

$$\xi = \frac{4,00}{4,80} = \frac{1}{1,2}; \quad \xi' = \frac{2,00}{4,80} = \frac{1}{2,4};$$

$$M_5 = \frac{1000 \times 6}{2,056} \left[ \frac{1}{1,2} \cdot \frac{0,2}{1,2} \cdot \frac{1,4}{1,2} + \frac{1}{2,4} \cdot \frac{1,4}{2,4} \cdot \frac{3,8}{2,4} \right] = 1240 \text{ m./Kg.}$$

Conocidos los momentos en los apoyos, las dificultades están vencidas y el problema virtualmente resuelto; sin embargo, lo completaremos. Los momentos isostáticos en los tramos son:

Tramo 1.º:

$$M = 225x(6-x).$$

Tramo 2.º:

$$M_{\text{máx}} = \frac{2000 \times 6}{8} \times 2 = 3000 \text{ m./Kg.}$$

Tramo 3.º:

$$M = \frac{500x}{3} \left( 5 - \frac{x^2}{5} \right).$$

Tramo 4.º:

$$M_{\text{máx}} = 1000 \times 2 = 2000 \text{ m./Kg.}$$

Conocidos los momentos en los apoyos, tampoco presenta dificultad la obtención de los esfuerzos cortantes, como se ve a continuación:

Tramo 1.º:

$$E = 225(6-2x) - \frac{2049}{6} = 1158,5 - 450x.$$

Tramo 2.º:

$$\text{De } x=0 \text{ a } x=2: E = 1500 - \frac{862 - 2049}{8} = 1648 \text{ Kg.}$$

$$\text{De } x=2 \text{ a } x=8: E = -500 - \frac{862 - 2049}{8} = -352 \text{ Kg.}$$

Tramo 3.º:

$$E = \frac{500}{3} \left( 5 - \frac{3x^2}{5} \right) - \frac{1210 - 862}{5} = \frac{11456}{15} - 100x^2.$$

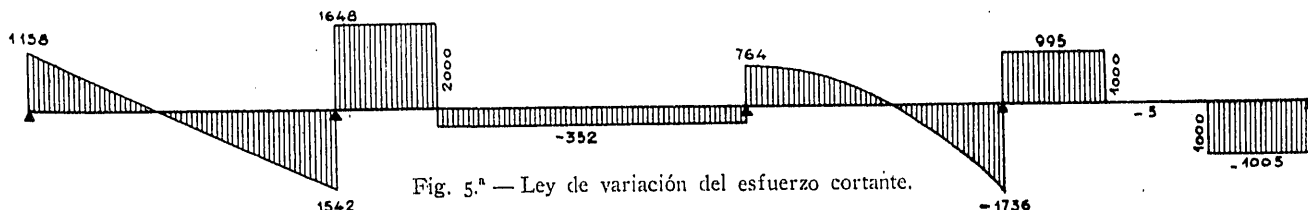
Tramo 4.º:

$$\text{De } x=0 \text{ a } x=2: E = 1000 - \frac{1240 - 1210}{6} = 995 \text{ Kg.}$$

$$\text{De } x=2 \text{ a } x=4: E = - \frac{1240 - 1210}{6} = -5 \text{ Kg.}$$

$$\text{De } x=4 \text{ a } x=6: E = -1000 = \frac{1240 - 1210}{6} = -1005 \text{ Kg.}$$

En la figura 5.<sup>a</sup> se representa esta variación de los esfuerzos cortantes en cada uno de los tramos de la viga.

Fig. 5.<sup>a</sup> — Ley de variación del esfuerzo cortante.

En la figura 3.<sup>a</sup> se han representado los momentos isostáticos y las líneas de cierre de los hiperestáticos, y la figura 4.<sup>a</sup> representa la suma algebraica de ambos, que es, en definitiva, la variación del momento flector en cada tramo.

La utilidad del procedimiento, es indudable; la exactitud que proporciona, comparable a la del cálculo preciso, y el tiempo que ahorra es muy estimable para dedicarlo a otros menesteres en esta época, que puede caracterizarse por la prisa.