

# EXPLICACION DE DOS PARADOJAS ELASTICAS

Por JOSE MARIN TOYOS, Ingeniero de Caminos.

*Presenta el autor dos casos de estructuras en las que la aplicación de métodos distintos conduce a resultados diferentes, debido, como era de esperar tratándose de matemáticas, a que la aplicación de uno de ellos no era corriente por no coincidir las hipótesis del método con las del caso concreto.*

Consideremos un pórtico equilátero, de igual momento de inercia, sometido al par  $\frac{14Fl}{15}$  que actúa en el centro del dintel, y a la fuerza  $F$  situada sobre el pilar izquierdo (fig. 1.<sup>a</sup>).

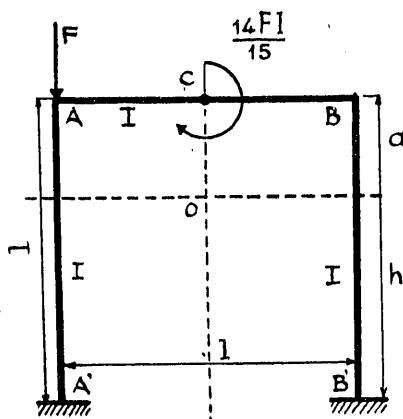


Figura 1.<sup>a</sup>

Hagamos su análisis siguiendo el método de Müller-Breslau, y se obtiene inmediatamente:

$$h = \frac{2l}{3}; \quad a = \frac{l}{3}; \quad r = 1.$$

$$\int_0^l r dl = 3l; \quad \int_0^l r x^2 dl = \frac{7l^3}{12}; \quad \int_0^l r y^2 dl = \frac{l^3}{3};$$

$$\int_0^l m r dl = -\frac{Fl^2}{10}; \quad \int_0^l m r x dl = 0; \quad \int_0^l m r y dl = 0;$$

$$m_0 = \frac{Fl}{30}; \quad X = 0; \quad Y = 0;$$

$$M_A = M_{A'} = \frac{Fl}{30}; \quad M_B = M_{B'} = -\frac{Fl}{30}; \quad M_C = \begin{cases} -\frac{14Fl}{30} \\ +\frac{14Fl}{30} \end{cases}$$

por lo tanto, la ley de variación del momento flector es la que se indica en la figura 2.<sup>a</sup>.

Hagamos el análisis del mismo pórtico utilizando las masas elásticas, y con igual sencillez se obtiene:

$$0 < x < \frac{l}{2}; \quad M_i = -\frac{14Fx}{15};$$

$$\frac{l}{2} < x < l; \quad M_i = \frac{14F(l-x)}{15};$$

$$P = \frac{7Fl}{180}; \quad Q = -\frac{7Fl}{180}; \quad e = e' = \frac{4El}{l};$$

$$-\frac{m'}{4} = \frac{7Fl}{180} + \frac{m}{6} + \frac{m'}{3} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} -\frac{m'}{4} \\ -\frac{m}{4} \end{matrix}} \right\} m = \frac{7Fl}{75};$$

$$-\frac{m}{4} = -\frac{7Fl}{180} + \frac{m}{3} + \frac{m'}{6} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} -\frac{m'}{4} \\ -\frac{m}{4} \end{matrix}} \right\} m' = -\frac{7Fl}{75};$$

$$M_{A'} = -\frac{7Fl}{150}; \quad M_A = \frac{7Fl}{75};$$

$$M_B = -\frac{7Fl}{75}; \quad M_{B'} = \frac{7Fl}{150};$$

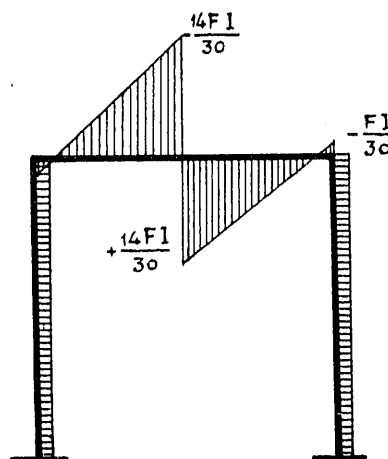


Figura 2.<sup>a</sup>

en consecuencia, la ley de momentos en el pórtico es la representada en la figura 3.<sup>a</sup>.

Como puede observarse, las figuras 2.<sup>a</sup> y 3.<sup>a</sup> no se parecen en nada, y las dos son la representación

del reparto de momentos flectores de un mismo pórtico, sometido al mismo régimen de cargas. Esto, sin duda, constituye una paradoja, y, como todas, ha de tener una explicación.

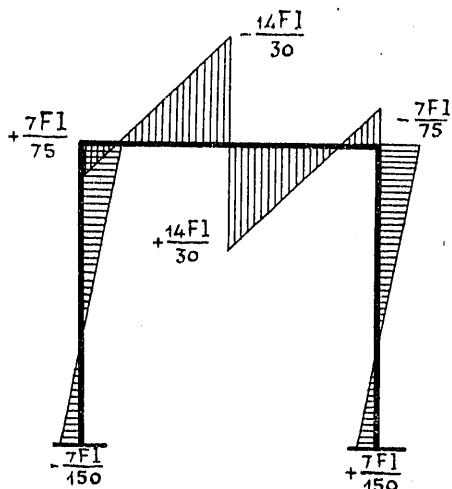


Figura 3.ª

La explicación de esta paradoja no es otra que el procedimiento de las masas elásticas hace para su empleo la petición de principio de que los nudos no sufren más deformaciones que las angulares y no admite, como consecuencia, las deformaciones lineales. Como en el pórtico estudiado existen desplazamientos transversales, que no se tienen en cuenta, de ahí nace la disparidad aparente entre los resultados obtenidos por el método de Müller-Breslau, con los que se logran utilizando las masas elásticas. Prueba de ello es que en la figura 2.ª no existen esfuerzos transversales en los pilares, y en cambio en la 3.ª en cada uno de ellos aparecen por valor de

$$\frac{\frac{7Fl}{75} + \frac{7Fl}{75}}{l} = \frac{7F}{50};$$

cuya resultante es  $\frac{7Fl}{25}$ , que tiende a producir un desplazamiento transversal. Resulta, pues, que la figura 2.ª está en equilibrio, mientras que la 3.ª está sometida a una fuerza horizontal, no equilibrada, cuyo valor es el indicado anteriormente. Por lo tanto, ambas figuras no son comparables porque no están en las mismas condiciones.

Para que no haya lugar a dudas, analicemos el mismo pórtico, teniendo en cuenta los desplazamientos transversales que experimentan los pilares como consecuencia de las cargas que actúan sobre el dintel, a los que llamaremos  $h$ , y que son iguales en los dos pilares, pues de lo contrario éste estaría contraído o dilatado, lo que no es admisible por despreciar los esfuerzos normales.

En el nudo  $A$ , la sección del dintel girará por la acción de las cargas y por la de los momentos  $m$  y  $m'$ , desconocidos, que aparecen en sus extremos; estos giros son:

$$\tau_1 = -\frac{7Fl^3}{180} \times \frac{1}{lEI} = -\frac{7Fl^2}{180EI};$$

$$\tau_2 = \frac{l}{6EI} (2m + m');$$

luego el giro total de la sección del dintel es:

$$\theta_d = -\frac{7Fl^2}{180EI} + \frac{l}{6EI} (2m + m');$$

en el mismo nudo, la sección superior del pilar gira también por dos causas: la que produce el momento  $m$  y la debida al desplazamiento  $h$ , cuyos valores son:

$$\tau_3 = -\frac{ml}{4EI}; \quad \tau_4 = \frac{3h}{2l};$$

y el giro total de la sección es:

$$\theta_p = -\frac{ml}{4EI} + \frac{3h}{2l}.$$

Los ángulos  $\theta_d$  y  $\theta_p$  han de ser iguales, lo que nos da la ecuación

$$-\frac{7Fl^2}{180EI} + \frac{l}{6EI} (2m + m') = -\frac{ml}{4EI} + \frac{3h}{2l},$$

que, simplificada, se reduce a

$$7m + 2m' = \frac{18EIh}{l^2} + \frac{7Fl}{15}. \quad [1]$$

Repetimos los razonamientos para el nudo  $B$ , y se obtiene que el giro total de la sección del dintel es:

$$\theta'_d = -\frac{7Fl^2}{180EI} - \frac{l}{6EI} (m + 2m');$$

y el de la sección superior del pilar:

$$\theta'_p = \frac{m'l}{4EI} + \frac{3h}{2l};$$

como  $\theta'_d = \theta'_p$ , resulta la ecuación

$$-\frac{7Fl^2}{180EI} - \frac{l}{6EI} (m + 2m') = \frac{m'l}{4EI} + \frac{3h}{2l},$$

que, después de simplificada, es:

$$-2m - 7m' = \frac{18EIh}{l^2} + \frac{7Fl}{15}. \quad [2]$$

El esfuerzo transversal que da lugar al desplazamiento  $h$  en el pilar izquierdo es:

$$H = \frac{3EIh}{l^3} + \frac{3m}{2l}; \quad [3]$$

y el semejante en el pilar derecho:

$$H' = \frac{3EIh}{l^3} - \frac{3m'}{2l}; \quad [4]$$

y como no existe ninguna fuerza exterior horizontal, la condición de equilibrio es:

$$\frac{3EIh}{l^3} + \frac{3m}{2l} + \frac{3EIh}{l^3} - \frac{3m'}{2l} = 0;$$

de donde deducimos que:

$$h = \frac{l^2(m' - m)}{4EI}.$$

Ponemos este valor en las ecuaciones [1] y [2] y, después de simplificar, resulta:

$$\left. \begin{aligned} 23m - 5m' &= \frac{14Fl}{15} \\ 5m - 23m' &= \frac{14Fl}{15} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m &= \frac{Fl}{30} \\ m' &= -\frac{Fl}{30} \end{aligned}$$

con estos valores se deducen los de  $h$  y los correspondientes a los esfuerzos transversales en los pilares, que son los siguientes:

$$\begin{aligned} h &= \frac{l^2}{4EI} \left( -\frac{Fl}{30} - \frac{Fl}{30} \right) = -\frac{Fl^3}{60EI}; \\ H &= -\frac{3EI}{l^3} \cdot \frac{Fl^3}{60EI} + \frac{3}{2l} \cdot \frac{Fl}{30} = 0; \\ H' &= -\frac{3EI}{l^3} \cdot \frac{Fl^3}{60EI} + \frac{3}{2l} \cdot \frac{Fl}{30} = 0; \end{aligned}$$

lo que nos dice que los pilares no están sometidos a ningún esfuerzo transversal y, por lo tanto, el régimen de flexión es uniforme, resultando en definitiva:

$$M_A = M_A = \frac{Fl}{30}; \quad M_B = M_{B'} = -\frac{Fl}{30};$$

es decir, que se obtienen exactamente los mismos valores para los momentos flectores que se obtuvieron al hacer el análisis por el método de Müller-Breslau.

Si el pórtico en cuestión se construyese con arreglo al cálculo que proporciona el método de las masas elásticas, se colocarían los hierros con arreglo al diagrama de tracciones de la figura 4.<sup>a</sup>, que no es correcto, como hemos visto, sino que debe ser el representado en la figura 5.<sup>a</sup>, y daría lugar a la ruina de la obra, porque los pilares se romperían en el tercio inferior por au-

sencia de hierro en las zonas de tracciones, aunque lo hubiese, innecesariamente, en la zona de compresiones.

Este ejemplo, intencionadamente buscado, da idea de la importancia que, en ocasiones, tienen los despla-

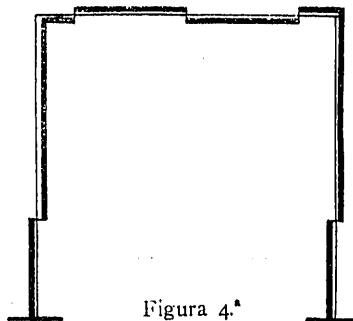


Figura 4.<sup>a</sup>

zamientos transversales, aunque en muchas otras sean despreciables, y pone en evidencia la necesidad de investigarlos cuando en el análisis se emplee el método de las masas elásticas y la estructura y sus cargas no sean simétricas; conocida su importancia, el analista puede juzgar si es posible despreciarlos con tranquili-

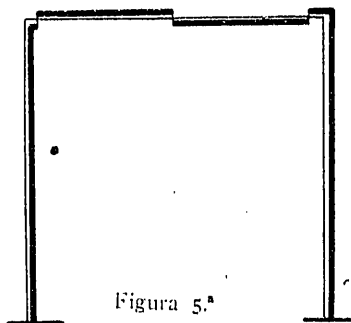


Figura 5.<sup>a</sup>

dad o, por el contrario, debe tomarlos en consideración y continuar el análisis para llegar a la correcta determinación de los momentos flectores.

\*\*\*

Estudiemos ahora el pórtico de la figura 6.<sup>a</sup>, haciendo su análisis por el método de Müller-Breslau, y tenemos:

$$h = \frac{3l}{8}; \quad a = \frac{l}{8}; \quad r = 1;$$

$$\int_0^l r dl = 2l; \quad \int_0^l r y^2 dl = \frac{5l^3}{96}; \quad \int_0^l r x^2 dl = \frac{l^3}{3};$$

$$\int_0^l m_l r dl = -\frac{5Fl^2}{9}; \quad \int_0^l m_l r y dl = \frac{Fl^3}{72};$$

$$\int_0^l m_l r x dl = -\frac{37Fl^3}{162}.$$

Como en  $A'$  existe una articulación,  $M_{A'} = 0$ , y, por lo tanto,

$$m_0 + \frac{3lX}{8} - \frac{lY}{2} = 0; \quad m_0 = \frac{lY}{2} - \frac{3lX}{8};$$

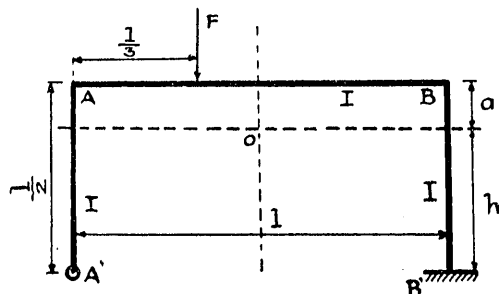


Figura 6.<sup>a</sup>

y la ley general de los momentos en el pórtico será:

$$M = m_i + \frac{lY}{2} - \frac{3lX}{8} + Yx - Xy = m_i + \left(\frac{l}{2} + x\right)Y - \left(\frac{3l}{8} + y\right)X;$$

las derivadas parciales respecto a  $X$  e  $Y$  son:

$$\frac{dM}{dX} = -\left(\frac{3l}{8} + y\right); \quad \frac{dM}{dY} = \frac{l}{2} + x;$$

y las ecuaciones de condición que permiten determinar  $X$  e  $Y$  son:

$$\int_0^l \left[ m_i + \left(\frac{l}{2} + x\right)Y - \left(\frac{3l}{8} + y\right)X \right] \left(\frac{3l}{8} + y\right) dl = 0;$$

$$\int_0^l \left[ m_i + \left(\frac{l}{2} + x\right)Y - \left(\frac{3l}{8} + y\right)X \right] \left(\frac{l}{2} + x\right) dl = 0;$$

efectuando operaciones y simplificando, resulta:

$$\left. \begin{aligned} 27Y - 24X &= 14F \\ 20Y - 9X &= \frac{238F}{27} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} X &= \frac{16F}{79} \\ Y &= \frac{1490F}{2133} \end{aligned};$$

Conocidas estas reacciones, se obtienen los siguientes momentos flectores:

$$M_{A'} = 0; \quad M_A = -\frac{8Fl}{79}; \quad M_B = -\frac{148Fl}{2133};$$

$$M_{B'} = \frac{68Fl}{2133}; \quad M_F = \frac{842Fl}{6399}.$$

La sección del dintel en el nudo  $A$  habrá experi-

mentado un giro producido por los momentos isostáticos y por los hiperestáticos  $M_A$ ,  $M_B$ , cuyo valor es:

$$\theta = \frac{(m_i)}{EI l} + \frac{l}{6EI} (2M_A + M_B);$$

$$(m_i) = \int_0^l m_i (l-x) dx = \frac{5Fl^3}{81};$$

$$\theta = \frac{5Fl^3}{81EI} - \frac{l}{6EI} \left( \frac{16Fl}{79} + \frac{148Fl}{2133} \right) = \frac{35Fl^3}{2133EI};$$

de igual manera, la sección del dintel en el nudo  $B$  habrá girado:

$$\theta' = -\frac{(m_i)}{EI l} - \frac{l}{6EI} (M_A + 2M_B);$$

$$(m_i) = \int_0^l m_i x dx = \frac{4Fl^3}{81};$$

$$\theta' = -\frac{4Fl^3}{81EI} + \frac{l}{6EI} \left( \frac{8Fl}{79} + \frac{296Fl}{2133} \right) = -\frac{20Fl^3}{2133EI};$$

y, como por definición, masa elástica es la relación entre el momento aplicado y el giro que produce las masas elásticas en  $A$  y  $B$  serán, respectivamente:

$$e = \frac{m}{\theta} = \frac{-8Fl}{\frac{35Fl^3}{2133EI}} = -\frac{6,17EI}{l};$$

$$e' = \frac{-148Fl}{\frac{20Fl^3}{2133EI}} = +\frac{7,40EI}{l}.$$

Si iniciásemos el análisis del mismo pórtico por el procedimiento de las masas elásticas, empezaríamos por establecer que:

$$e = -\frac{3EI}{\frac{l}{2}} = -\frac{6EI}{l}; \quad e' = \frac{4EI}{\frac{l}{2}} = \frac{8EI}{l};$$

y los dos valores son discordantes con los obtenidos directamente, lo que constituye la segunda paradoja.

La explicación de ésta es la misma que la de la anterior: por no ser simétrica la estructura, ni su carga, existen desplazamientos transversales que, por principio, no tiene en cuenta el método de las masas elásticas, lo que da lugar a los valores diferentes con que aparecen las masas elásticas calculadas.

Para ver claramente la influencia de los desplazamientos transversales iguales para los dos pilares, y que llamaremos  $h$ , tenemos que el pilar izquierdo ha-

brá experimentado un giro producido por el momento  $M_A$  y otro por el desplazamiento  $h$ , cuyos valores, teniendo en cuenta que está articulado en la base, son:

$$-\frac{M_A l}{3EI} = -\frac{M_A l}{6EI}; \quad \frac{h}{\frac{l}{2}} = \frac{2h}{l}; \quad \theta = -\frac{M_A l}{6EI} + \frac{2h}{l};$$

y como el momento es  $M_A$ , la masa elástica en la coronación de este pilar es:

$$e = \frac{M_A}{-\frac{M_A l}{6EI} + \frac{2h}{l}}; \quad [5]$$

de la misma manera, en el pilar derecho los giros son:

$$\frac{M_B l}{4EI} = \frac{M_B l}{8EI}; \quad \frac{3h}{2\frac{l}{2}} = \frac{3h}{l}; \quad \theta' = \frac{M_B l}{8EI} + \frac{3h}{l};$$

y la masa elástica correspondiente es:

$$e' = \frac{M_B}{\frac{M_B l}{8EI} + \frac{3h}{l}}. \quad [6]$$

Se ve que si en las expresiones [5] y [6] no existe  $h$  o no se toma en cuenta su valor, que es la petición de principio del método de las masas elásticas, al hacer  $h = 0$  resultan:

$$e = \frac{6EI}{l}; \quad e' = \frac{8EI}{l};$$

y también se ve que las masas elásticas son valores eminentemente variables, puesto que dependen de los momentos flectores que, a su vez, varían con las cargas, y que únicamente toman un valor constante cuando  $h = 0$ .

Para determinar el valor  $h$ , tenemos que establecer la condición de equilibrio de las acciones horizontales que actúan en las coronaciones de los pilares; estas fuerzas horizontales son, en los pilares derecho e izquierdo, respectivamente:

$$\frac{3EIh}{8} - \frac{3}{2} \frac{M_B}{\frac{l}{2}} = \frac{24EIh}{l^3} - \frac{3M_B}{l}; \quad \frac{M_A}{\frac{l}{2}} = \frac{2M_A}{l};$$

y como no existen fuerzas horizontales exteriores, la condición de equilibrio es:

$$\frac{24EIh}{l^3} - \frac{3M_B}{l} + \frac{2M_A}{l} = 0; \quad h = \frac{l^3}{24EI} (3M_B - 2M_A);$$

sustituyendo este valor en las expresiones [5] y [6], se tiene:

$$e = \frac{12EI}{l} \frac{M_A}{-4M_A + 3M_B} = \frac{12EI}{l} \frac{-\frac{8}{79}Fl}{+\frac{32Fl}{79} - \frac{148Fl}{711}} = -\frac{6,17EI}{l};$$

$$e' = \frac{4EI}{l} \frac{M_B}{2M_B - M_A} = \frac{4EI}{l} \frac{-\frac{148Fl}{2133}}{-\frac{296Fl}{2133} + \frac{8Fl}{79}} = +\frac{7,40EI}{l};$$

es decir, que llegamos exactamente a los mismos resultados obtenidos al calcular directamente las masas elásticas, con lo que la paradoja está explicada.

El método de Cross, en su primera parte, hace la misma petición de principio que el de las masas elásticas: admitir que los nudos no sufren más que deformaciones angulares y, por lo tanto, los resultados obtenidos son los mismos; pero en aquél se continúa el análisis con las etapas III y IV, para tener en cuenta los efectos de los desplazamientos, si existen, a menos que su importancia permita despreciarlos con tranquilidad.

Hagamos, como comprobación de lo anterior, el análisis del primer ejemplo por el método de Cross, y como el par que actúa en el centro del dintel constituye una carga antisimétrica y la estructura es simétrica, se obtienen directamente los momentos en los nudos por la expresión (\*):

$$M_A = \frac{1}{2} (\mu + \mu') \frac{1}{1 + (1 + \beta)K},$$

en la que:

$$\mu = \mu' = \text{momentos de empotramiento perfecto} = \frac{7Fl}{30}$$

$\beta$  = factor de transmisión en el dintel = 0,5.

$K$  = coeficiente de rigidez del dintel, cuando en los pilares es 1, = 1.

Y aplicando estos valores, se tiene:

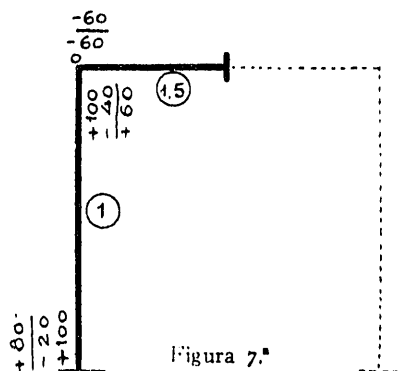
$$M_A = \frac{1}{2} \left( \frac{7Fl}{30} + \frac{7Fl}{30} \right) \frac{1}{1 + 1,5} = \frac{7Fl}{75};$$

$$M_B = -M_A = -\frac{7Fl}{75};$$

valores idénticos a los que proporcionó el método de

(\*) Fernández Casado: *Cálculo de estructuras reticulares*, 3.ª edición, pág. 112.

las masas elásticas. Continuemos el análisis para tener en cuenta los desplazamientos; aplicamos momentos  $+100$  en las extremidades de los pilares y hacemos la distribución con las simplificaciones a que da lugar la simetría de la estructura y la antimetría de la carga,



y se obtienen los resultados que aparecen en la figura 7.ª; planteamos la ecuación de los desplazamientos, teniendo en cuenta la figura 3.ª:

$$2 \left( \frac{7Fl}{75} + \frac{7Fl}{150} \right) = (80 + 60) \alpha; \quad \alpha = \frac{Fl}{1000};$$

y, por lo tanto, la corrección en el nudo  $A$  será  $-\frac{60Fl}{1000} = -\frac{3Fl}{50}$ , y en la base  $A'$ ,  $+\frac{80Fl}{1000} = \frac{2Fl}{25}$ ;

y los momentos definitivos son:

$$M_{A'} = -\frac{7Fl}{150} + \frac{2Fl}{25} = \frac{Fl}{30};$$

$$M_A = +\frac{7Fl}{75} - \frac{3Fl}{50} = \frac{Fl}{30};$$

$$M_{B'} = \frac{7Fl}{150} - \frac{2Fl}{25} = -\frac{Fl}{30};$$

$$M_B = -\frac{7Fl}{75} + \frac{3Fl}{50} = -\frac{Fl}{30};$$

valores también idénticos a los obtenidos en el análisis completo con las masas elásticas.

Del estudio y explicación de las dos paradojas planteadas, se pueden deducir consecuencias interesantes que, aunque no constituyan ningún descubrimiento, se han puesto de relieve con toda la fuerza que las comparaciones proporcionan:

1.ª El procedimiento de análisis de estructuras por medio de las masas elásticas es correcto y definitivo cuando aquéllas y sus cargas sean simétricas.

2.ª Si las estructuras y sus cargas no son simétricas, el método de las masas elásticas proporciona resultados defectuosos porque no tiene en cuenta los efectos de los desplazamientos transversales que en este caso se producen, resultando entonces equivalente al método de Cross en su primera parte (etapas I y II), pues ambos imponen como condición previa la no existencia de deformaciones lineales en los nudos.

3.ª Los valores de las masas elásticas en los extremos de piezas sin carga que tienen los extremos opuestos, articulados o empotrados, son  $\frac{3EI}{l}$  y  $\frac{4EI}{l}$ , respec-

tivamente, sólo en el caso de estructuras y cargas simétricas; en los demás, tales valores son variables y dependen precisamente de los momentos incógnitos en los nudos.

4.ª Cuando se analice una estructura asimétrica por el método de las masas elásticas, debe investigarse la importancia que alcanzan los esfuerzos transversales, y si no son despreciables, debe continuarse el análisis para tener en cuenta sus efectos, corregir debidamente los momentos primitivos y establecer el equilibrio de la estructura. El primer ejemplo estudiado pone claramente de manifiesto que si no se tienen en cuenta estos efectos, sobrevendría la ruina de la estructura.