

NUEVOS ESTUDIOS SOBRE EL "IMPACTO"

Por DOMINGO MENDIZABAL FERNANDEZ, Ingeniero de Caminos.

Como dice el autor en los primeros párrafos, es de gran interés dar cuenta a nuestros lectores de los interesantes estudios realizados en el extranjero sobre el tema del epígrafe, cuyo conocimiento nos llega con retraso a causa de la guerra; de ahí que al recibir y estudiar las últimas publicaciones, haya redactado el presente trabajo, que dividimos en dos artículos, y cuya primera parte nos es grato publicar a continuación.

Cuantos con asiduidad leen la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, recordarán he publicado en muy diversas ocasiones distintos estudios sobre el "impacto" en los tramos metálicos, primeramente, para ferrocarriles, y posteriormente y a causa de las importantes sobrecargas que circulan por las carreteras y con grandes velocidades, también para los tramos metálicos situados en éstas.

He procurado no perder de vista en ningún momento los muy interesantes estudios que constantemente se han realizado en el extranjero sobre tema tan atrayente, pero la comunicación fué interrumpida, primeramente, durante nuestra Gloriosa Cruzada, y posteriormente, por la guerra mundial; pero una vez terminados períodos tan azarosos, se ha restablecido aquélla, por lo menos en parte, aunque todavía y por otras razones no se esté en completa libertad de obtener libros y revistas profesionales que permitan darse cuenta de los considerables adelantos que en esta aplicación técnica, como en otras varias, se han realizado en el extranjero.

Considero por ello en extremo necesario dar cuenta a los lectores de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de los más modernos estudios conocidos sobre este tema, así como de las modernas orientaciones seguidas para la deducción de consecuencias prácticas que faciliten el cálculo de los esfuerzos producidos por la circulación rápida de las sobrecargas.

Para dar idea de la importancia que se da a este tema en el extranjero, indicaré que en el A. R. E. A. (*), en los E. E. U. U., está constituido y trabaja sin interrupción el "Comité del Impacto".

Análogamente, en Inglaterra se preparan tales trabajos en el "Departamento de Investigaciones Científicas de la Industria", donde existe un "Comité especial para el estudio de los esfuerzos producidos en los tramos metálicos".

Se han publicado tres muy interesantes obras, que yo conozca, con copiosos estudios, que son las siguientes:

Impact Railway Steel Bridges, de J. B. Hunley.

(*) A. R. E. A. = "Americans Railway Engineering Association".

A. Mathematical Treatise on Vibrations in Railway Bridges, por C. E. Inglis.

Impact on Railway Bridges, por Ch. Lowney.

Puede comprobarse por esta, tal vez incompleta, relación, la importancia que de un modo justificado se da a estas interesantes disciplinas del cálculo de los tramos metálicos.

Existe acuerdo entre los autores que han estudiado estos esfuerzos en considerar cuáles son las diferentes causas que producen el impacto.

Así aparecen las siguientes:

1. Movimientos de balanceo de los ejes acoplados y posición de los correspondientes contrapesos.
2. Irregularidades en la vía.
3. Irregularidades en las ruedas.
4. Excentricidades en las ruedas.
5. Rapidez en la aplicación de las sobrecargas.
6. Efectos de las flechas registrados en las vigas principales y elementos del piso.
7. Oscilación vertical de los vehículos según la posición y características de los muelles.

Muy especialmente, como se sabe, las causas 1, 5 y 6, son las que producen mayores efectos.

Puede decirse que hasta el comienzo de estos estudios que anteriormente se relacionan, las fórmulas y coeficientes deducidos para el cálculo del impacto fueron obtenidos de un modo empírico, fruto de experiencias y mediciones prácticas más o menos acertadas, pero los especialistas indicados han fundado sus trabajos, naturalmente que acompañados de experiencias y ensayos reales, en estudios de alta matemática, llegándose a cálculos con verdadera garantía, especialmente utilizando las teorías de las vibraciones, frecuencias, aceleraciones y flechas.

La aspiración es llegar a fórmulas sencillas, aplicables con la mayor exactitud al cálculo del impacto, con mayor precisión que las generalmente utilizadas en las diversas instrucciones vigentes, que al tener, como es lógico, carácter general, se aleja tal precisión al tratarse de tramos y sobrecargas de características diferentes.

En los estudios que se examinarán se establecen bases como ya se ha indicado para un estudio matemático exacto, estudio, por lo tanto, que responderá

a las muy diversas características de las locomotoras y tramos, apreciándose existe aproximación práctica muy grande, que casi llega a coincidencia entre los resultados de dichos estudios teóricos, y las experiencias reales, lo que permite considerar tales estudios y complicados cálculos, suficientemente exactos. Ahora bien: existe el inconveniente de que todo ello se aplica a un solo tramo y a un solo tipo de locomotora.

¿Convendrá insistir y generalizar?

Evidentemente debe responderse afirmativamente.

En los estudios teóricos realizados se da la importancia que merece, como ya se ha indicado, a los efectos de los contrapesos que alternativamente atacan a la vía en una u otra rueda de cada eje acoplado, y a través de ésta sobre el tramo que se considera, produciendo el efecto, que en inglés se denomina *hammer blow*, que se traduce y así denominaremos "martilleo".

Se considera, como también se ha indicado, como causa muy importante productora del impacto, la flecha producida en el tramo, a la que anteriormente a estos estudios no se le concedía importancia, estableciéndose, como consecuencia principal de estas flechas, la adición de la fuerza centrífuga vertical correspondiente.

Antes de penetrar en los estudios teóricos que ya he anunciado, y que se aspira coincidan con los resultados prácticos obtenidos, considero importante repre-

Las tres curvas correspondientes a los ensayos realizados en 1911, 1918 y 1935, por la A. R. E. A., tienen disposición bastante semejante y con criterio que podría decirse coincidente con el que fué base para el estudio y redacción de la Instrucción española; es decir, de un coeficiente máximo para las luces pequeñas y fuertes reducciones hasta anularse para luces importantes.

En esta figura y en todas las que posteriormente se representen y en cuantas se aludirá, la representación se hace en medidas inglesas, así como también los resultados numéricos que serán objeto de comentario, pues resultaría un trabajo considerable la reducción de aquéllas al sistema métrico, que obligaría a rehacer por completo las numerosas figuras que se insertan.

Ahora bien: se presenta una evidente anomalía en las dos curvas correspondientes a los ensayos del Comité británico con coeficientes de aumento para luces intermedias, alcanzándose el máximo para luces de 48 y 150 pies, respectivamente.

Desarrollo teórico.

Pasemos ya a examinar las teorías de Inglis, que hoy son las más aceptadas para estos cálculos, por haber sido comprobados ampliamente todos sus asertos.

Inglis ha utilizado principalmente para sus cálculos y experiencias, bien un eje aislado, que produce efectos semejantes a los de una locomotora real también empleada, o un grupo de cinco ejes en condiciones semejantes.

Sería deseable aislar, para mejor conocimiento de los efectos producidos, las diferentes causas que influyen en el impacto, como son el paso de las sobrecargas, el martilleo, peso del tramo, frecuencia de éste y la velocidad.

En la teoría de Inglis se admiten los siguientes principios:

- 1.º El tramo es una viga apoyada en sus extremos, de sección y momento de inercia constante.
- 2.º La flecha central del tramo se considera como un índice del esfuerzo a que está sometido.
- 3.º La flecha central, velocidad y aceleración se determinan para todas las posiciones de la locomotora, sirviendo como punto de referencia el extremo izquierdo de las vigas.

4.º La locomotora se considera como una serie de ruedas independientes con sus cargas y separaciones iguales a las de los ejes de aquélla.

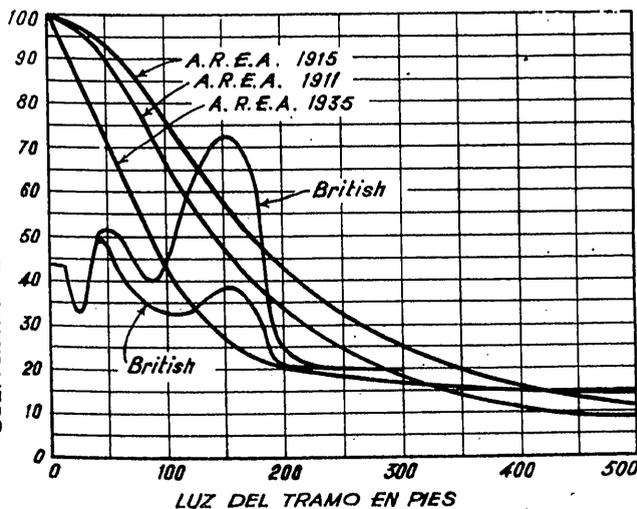


Figura 1.ª

sentar gráficamente las curvas correspondientes derivadas de los diversos ensayos prácticos realizados por aquellas entidades, los que pueden apreciarse en la figura 1.ª.

Se utilizarán las siguientes notaciones:

- P = Peso de una rueda.
- p = Peso uniforme en libras por pie del tramo.
- F = Esfuerzo transmitido por una rueda al carril.
- K = Módulo del tramo, o sea el número de libras que, actuando en el centro, producen una flecha de una pulgada.
- L = Luz teórica del tramo.
- m = Masa por pie del tramo.
- $m. p. h.$ = Millas por hora.
- $r. p. s.$ = Revoluciones por segundo.
- x_p = Distancia al extremo izquierdo del tramo de una rueda P .
- F_B = Flecha en un punto B .
- v_B = Velocidades del punto B .
- v_p = Componente horizontal de la velocidad de una rueda.
- v = Velocidad en el centro del tramo.
- a = Aceleración en el centro del tramo.
- a_B = Aceleración en el punto B .
- C = Circunferencia exterior de una rueda acoplada.
- f_{ct} = Flecha total central.
- f_{cpp} = Flecha central producida por la carga permanente.
- f_{cm} = Flecha central producida por el martilleo.
- f_c = Flecha central producida por la sobrecarga como estática.
- f_{cmt} = Efectos producidos en la flecha central por la aceleración de la masa del tramo.
- f_{cmt} = Efectos producidos en la flecha central por la aceleración de la locomotora.
- M = Martilleo.
- n_0 = Frecuencia del tramo descargado.
- n'_0 = Frecuencia del tramo cargado.
- n_b = Coeficiente de frenado del tramo cargado.
- f_B = Flecha en el punto B .
- v_B = Velocidad en el punto B .
- a_B = Aceleración en el punto B .
- f_p = Flecha producida por una rueda P .
- v_{vp} = Componente vertical de la velocidad de una rueda P .
- a_{vp} = Componente vertical de la aceleración de una rueda P .

Al exponer las notaciones que han de emplearse aparece la n_b como *coeficiente de frenado del tramo cargado*, concepto completamente nuevo y acerca del cual, y por su suma importancia, he de hacer algunas

consideraciones, que estimo conveniente intercalar antes de comenzar el estudio y desarrollo de los métodos que han de exponerse para llegar al cálculo del efecto del impacto.

Corresponde este concepto al mayor o menor tiempo en que subsisten las oscilaciones de aquél después del paso de las sobrecargas dinámicas y en función de la deficiente elasticidad del tramo.

Para tramos de luces grandes el coeficiente de frenado es pequeño, pudiendo persistir las oscilaciones un largo período, pero en los tramos pequeños es tan intenso que es muy difícil percibir aquellas que como residuos puedan subsistir.

Se ha representado por la fórmula

$$4 \cdot \pi \cdot n_b \cdot m \cdot v,$$

la resistencia de un tramo por unidad de longitud al movimiento vertical producido por las sobrecargas, siendo v la velocidad vertical; m , la masa por unidad de longitud, y n_b , el coeficiente que define el frenado del tramo.

Además de esta resistencia distribuida a lo largo del tramo, existe otra influencia en el frenado debida a la existencia de la vía y su continuidad en la explotación, que produce unas resistencias angulares en los extremos, siendo ésta pequeña en los tramos grandes y grande en los tramos pequeños.

También se expone la resistencia al frenado por la fórmula

$$K \cdot \frac{df}{dt} \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{L};$$

y el momento flector producido en una sección será, por lo tanto:

$$\frac{L^2}{\pi^2} \cdot K \cdot \frac{df}{dt} \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{L};$$

El efecto de la continuidad de la vía que ha de sumarse al anterior es proporcional a la relación de las deformaciones angulares en los extremos del tramo, y se expresa en la forma:

$$\mu = \frac{\pi}{L} \cdot \frac{df}{dt}.$$

Combinando las dos expresiones anteriormente expuestas, correspondientes a las dos causas del frenado, se tiene:

$$\left(\frac{L^2}{\pi^2} \cdot K \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{L} + \mu \cdot \frac{\pi}{L} \right) \frac{df}{dt};$$

Para deducir de ello la flecha, y sin inconveniente con un pequeño error, se puede sustituir la expresión

$$\mu \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{df}{dt};$$

por su componente primaria armónica, o sea:

$$\frac{4\mu}{L} \cdot \frac{df}{dt} \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{L};$$

transformándose aquella fórmula en

$$\frac{L^2}{\pi^2} \left(K + \mu \frac{4\pi^2}{L^3} \right) \frac{df}{dt} \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x}{L}$$

que es el momento flector de una resistencia frenada

$$\left(K + \mu \frac{4\pi^2}{L^3} \right) \cdot v,$$

por unidad de longitud del tramo.

Si se transforma la expresión de esta resistencia en la forma anteriormente expuesta, o sea, $4 \cdot \pi \cdot n_b \cdot m \cdot v$, tendremos:

$$n_b = \frac{1}{4\pi m} \left(K + \mu \frac{4\pi^2}{L^3} \right),$$

pudiendo representar n_b en forma general, o sea:

$$n_b = \frac{L}{M_G} \cdot \left(a + \frac{b}{L^3} \right).$$

En esta expresión se comprueba la indicación antes hecha de la diferencia de este frenado en los tramos grandes y pequeños, puesto que el segundo término del paréntesis es muy pequeño para los tramos grandes.

La experiencia señala como coeficientes adecuados para la fórmula anterior, los que se indican en la siguiente:

$$n_b = \frac{L}{M_G} \left(0,12 + \frac{0,63 + 10^6}{L^3} \right),$$

que puede aplicarse para casi todas las luces normalmente empleadas, apreciándose en el siguiente cuadro los valores de n_b y la componente de la deformación residual calculada por la fórmula

$$\rho = e - \frac{2 \cdot \pi \cdot n_b}{n_0}$$

En las dos figuras 2.^a y 3.^a se indican las representaciones gráficas de las dos fórmulas anteriores.

$L = \text{luz (pies)}$	n_b	$\rho = e - \frac{2 \cdot \pi \cdot n_b}{n_0}$
40	3,986	0,082
60	1,176	0,394
80	0,510	0,625
100	0,277	0,750
120	0,175	0,819
140	0,123	0,857
160	0,094	0,879
180	0,077	0,892
200	0,065	0,900
220	0,058	0,904
240	0,053	0,905
260	0,049	0,905
280	0,045	0,902
300	0,043	0,898

En las dos figuras 2.^a y 3.^a se indican las representaciones gráficas de las dos fórmulas anteriores.

Estudio de las flechas.

Pasemos ahora al estudio de las flechas que se producen en el tramo.

Es bien sabido que las flechas que se van produciendo en los diversos puntos del tramo pueden representarse por una senoide, cuya ecuación adopta una forma semejante a la siguiente:

$$f_B = f_{ct} \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L},$$

Las siguientes ecuaciones definen el movimiento vertical del centro del tramo:

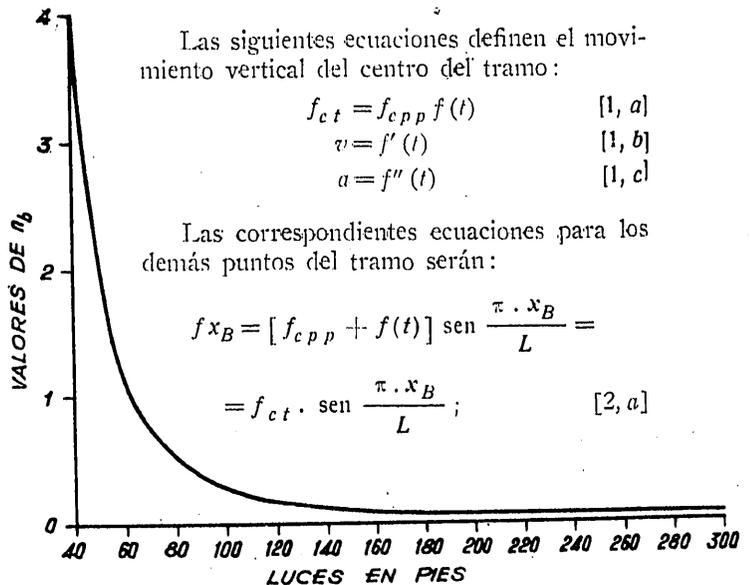
$$f_{ct} = f_{c p p} f(t) \quad [1, a]$$

$$v = f'(t) \quad [1, b]$$

$$a = f''(t) \quad [1, c]$$

Las correspondientes ecuaciones para los demás puntos del tramo serán:

$$f_{x_B} = [f_{c p p} + f(t)] \text{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L} = f_{ct} \cdot \text{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L}; \quad [2, a]$$



$$n_b = \frac{L}{M_G} \left(0,12 + \frac{0,63 + 10^6}{L^3} \right)$$

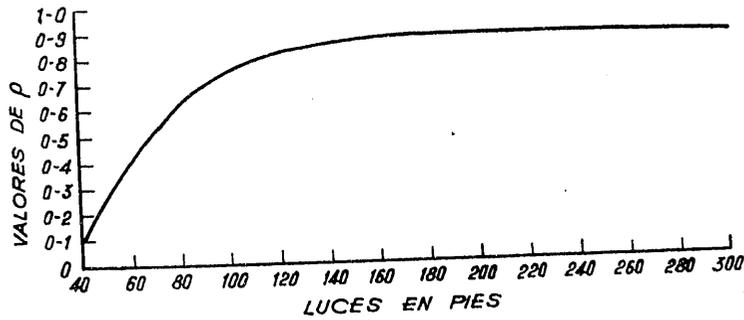
Figura 2.^a

$$v_{x_B} = f'(t) \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L} = v \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L} \quad [2, b]$$

$$a_{x_B} = f''(t) \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L} = a \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L} \quad [2, c]$$

estática es igual a la de la flecha central total y a la producida por la sobrecarga estática.

El movimiento vertical del centro del tramo durante el paso de una o varias ruedas permite deter-



$\rho = e^{-\frac{2\pi n_b}{n_0}}$
Figura 3.^a

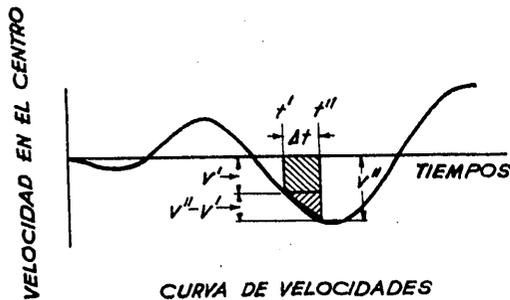
Las ecuaciones del movimiento de las ruedas de la locomotora son:

$$f_{pB} = [f_{c p p} + f(t)] \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_p}{L} = f_{ct} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_p}{L} \quad [3, a]$$

$$v_{p v B} = v \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_p}{L} + f_{ct} \frac{\pi}{L} \cdot v_h \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_p}{L} \quad [3, b]$$

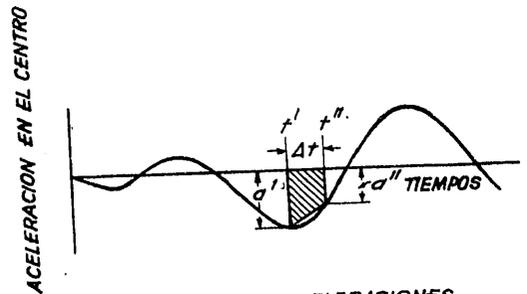
$$a_{p v B} = a'' \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_p}{L} + 2 \cdot v'' \frac{\pi}{L} \cdot x'_p \cdot \cos \frac{\pi \cdot x_p}{L} - f''_{ct} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot x_p^2 \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_p}{2} \quad [3, c]$$

minar el esfuerzo debido al impacto en relación con el producido por las sobrecargas estáticas.



CURVA DE VELOCIDADES

Figura 4.^a



CURVA DE ACELERACIONES

Figura 5.^a

Supongamos que f'_{ct} , v' y a' son las flechas, velocidades y aceleraciones en el centro, en un tiempo t' y f''_{ct} , v'' y a'' en el tiempo t'' , con separación de $\Delta \cdot t$, infinitamente pequeño.

Si examinamos las figuras 4.^a y 5.^a, en las que se representan las curvas de tiempos y velocidades y tiempos y aceleraciones, en cada una de ellas, respectivamente, como se sabe que en aquella el área inferior al eje de los tiempos corresponde, por definición, al cambio de desplazamiento, tendremos:

$$f'_{ct} - f'_{ct} = v' \cdot \Delta t (v'' - v') \frac{\Delta t}{2} \quad [4]$$

La relación entre el total esfuerzo (sobrecarga dinámica e impacto) y el producido por la sobrecarga

Asimismo, análogamente, la superficie inferior en la curva de aceleraciones y tiempo es también, por

definición, igual al cambio de velocidades, e igualmente tendremos:

$$v'' - v' = a' \frac{\Delta t}{2} + a'' \frac{\Delta t}{2} \quad [5]$$

De ambas fórmulas se deduce:

$$f''_{ct} = f'_{ct} + v' \cdot \Delta t + a' \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + a'' \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \quad [6]$$

La influencia en la flecha total central de la aceleración vertical de la masa del tramo puede considerarse como si tal efecto estuviese distribuido de un modo uniforme en toda la longitud de la misma y en dirección opuesta a la aceleración.

La aceleración del tramo en un punto situado a una distancia x_B del extremo izquierdo del mismo, que se considera como origen de coordenadas, está dada por la fórmula [2, c] anteriormente expuesta.

La flecha central del tramo, en un instante determinado, está formada por la suma de los siguientes términos, por cada una de las flechas parciales siguientes, producidas por las causas que se expresan, de acuerdo con las notaciones anteriormente reseñadas:

- 1.º Carga permanente..... $f_{c p p}$
- 2.º Sobrecarga estática..... $f_{c s}$
- 3.º Martilleo..... $f_{c m}$
- 4.º Aceleración de la masa del tramo... $f_{c m t}$
- 5.º Idem de la locomotora..... $f_{c m l}$

Nada nuevo puede decirse respecto al modo de producirse las cuatro primeras flechas. Si conviene indicar que la flecha derivada de la aceleración de la locomotora, en parte es debida a su movimiento vertical, que depende de la calidad y funcionamiento de sus muelles, y es función del movimiento de éstos, aunque no sea causa única de dicho movimiento, debiendo discriminarse el que se produce de un modo libre o frenado.

En la aceleración vertical influyen grandemente los esfuerzos transmitidos por las ruedas sobre los carriles, según aparece en la figura 6.ª, de la que se deduce:

$$P - F = \frac{P}{g} a_{v p} \quad \text{ó} \quad F = P - \frac{P}{g} a_{v p}$$

La flecha central, debida a la presión transmitida por las ruedas, se obtiene por medio del teorema de Maxwell; si se toma como sobrecarga $-\frac{P}{g} \cdot a_{v p}$,

la flecha central observada en el punto x_P , será para cada una:

$$\left(-\frac{P}{K} \cdot \frac{a_{v p}}{g} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_P}{2} \right)$$

y, en su consecuencia, el efecto de la aceleración de la masa de la locomotora sobre dicha flecha central se determina con la siguiente ecuación:

$$f_{c m l} = -\Sigma \frac{P}{K} \cdot \frac{a_{v p}}{g} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_P}{L}$$

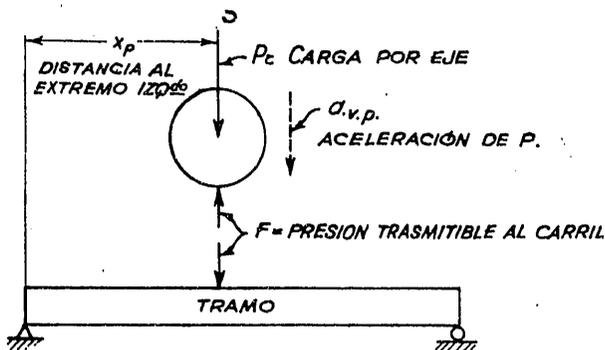


Figura 6.ª

La carga uniforme repartida debida a la aceleración, se deduce de la siguiente ecuación por pie lineal:

$$-\frac{w}{g} \cdot a \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{2}$$

siendo $-\frac{w}{g}$ la masa por unidad de longitud del tramo, pudiendo producir una flecha central igual a $\frac{48 \cdot w \cdot L \cdot a}{\pi^4 \cdot K \cdot g}$ y siendo $\frac{48}{\pi^4}$ aproximadamente igual al 50 por 100 del efecto de la aceleración del tramo, por lo que

$$f_{c m t} = -\frac{1}{2} \frac{w \cdot L}{K} \cdot \frac{a}{g}$$

sumando los cinco términos que integran la flecha total central, tendremos:

$$f_{c t} = f_{c p p} + f_{c s} + f_{c m} - \Sigma \frac{P}{K} \cdot \frac{a_{v c}}{g} \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_B}{L} - \frac{1}{2} \frac{w \cdot L}{K} \cdot \frac{a}{g} \quad [7]$$

Combinando las tres ecuaciones expuestas [6], [7] y [3, c], eliminando $f_{c t}$ en las dos primeras y sustituyendo el valor de $-a_{v p} B$ en la [7], se llega, después de muy complejas operaciones, a la verdadera fórmula fundamental siguiente, que al expresar la flecha total en función de todos los factores que en

ella pueden intervenir, puede servir, dada la relación que existe entre la flecha y los esfuerzos, para valorar el coeficiente de impacto que se busca.

$$a'' \left[\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 - \left(\frac{c \cdot \pi}{32 \cdot L} \right)^2 A'' + A' + \frac{1}{2} \frac{w \cdot L}{K} \cdot \frac{1}{g} + \left(\frac{c \cdot \pi}{16 \cdot L} \right) B'' \right] = f_{c p p} + f_{c s} + f_{c n} - f_{c t} \left[1 - \frac{\pi^2}{L^2} (x'_p)^2 \cdot A'' \right] - v' \left[\Delta t - \Delta t \frac{\pi^2}{L^2} (x'_p)^2 A'' - 2 \frac{\pi}{L} \cdot x'_p \cdot B'' \right] - a' \left[\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 - \left(\frac{c \cdot \pi}{32 \cdot L} \right)^2 A'' + \frac{c \cdot \pi}{16 \cdot L} B'' \right], \quad [8]$$

Como consecuencia de todo ello, muy frecuentemente $\Delta t = \frac{1}{16} = \frac{1}{r.p.s}$ segundos y $x'_p = C$ veces r. p. s., unidad de longitud por segundo, siendo como se ha indicado, r. p. s. el número de revoluciones por segundo de la rueda acoplada y C la longitud de su circunferencia.

Escogiendo Δt en función de r. p. s., los demás términos de la ecuación son independientes de la velocidad y dependen únicamente de las condiciones y características del tramo y de la locomotora.

Para comprobar en la práctica si los valores obtenidos con estas fórmulas corresponden a la realidad, procede realizar los oportunos cálculos y mediciones,

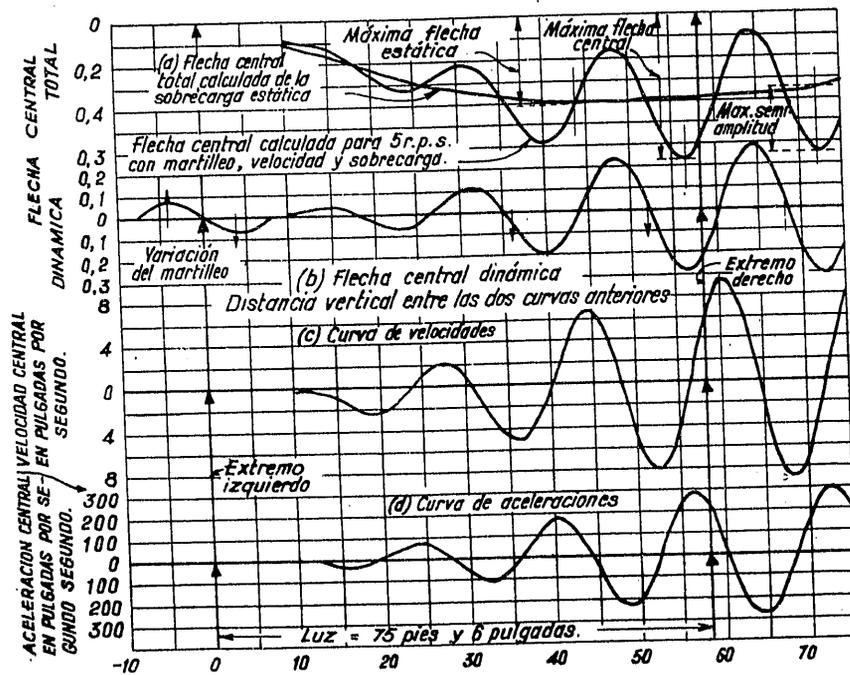


Figura 7.^a

en la cual, y para abreviar, se representa por las siguientes letras las fórmulas que se exponen:

$$A = \Sigma \frac{P}{K} \cdot \frac{1}{g} \operatorname{sen}^{-2} \frac{\pi \cdot x_p}{L} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{P}{K} \cdot \frac{1}{g} \left(1 - \cos 2 \cdot \frac{\pi \cdot x_p}{L} \right). \quad [9]$$

$$B = \Sigma \frac{P}{K} \cdot \frac{1}{g} \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi \cdot x_p}{L} \cos \frac{\pi \cdot x_p}{L} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{P}{K} \cdot \frac{1}{g} \operatorname{sen} 2 \frac{\pi \cdot x_p}{L}. \quad [10]$$

haciendo avanzar la locomotora desde el extremo izquierdo del tramo con la cual se hagan las experiencias, y cuyas características se hayan utilizado en las fórmulas anteriormente insertas, deduciendo los valores de a , v y f para cada posición de aquella, mediante las fórmulas [5]; [6] y [8]; es muy frecuente, como ya se ha dicho, que los avances se hagan por periodos de una longitud de $\frac{1}{16}$ de C , siendo ésta la longitud del desarrollo de la llanta de las ruedas acopladas.

Si Δt es el intervalo de tiempo que corresponde a cada avance, tendremos:

$$\Delta t = \frac{1}{16} \times \frac{1}{r.p.s.},$$

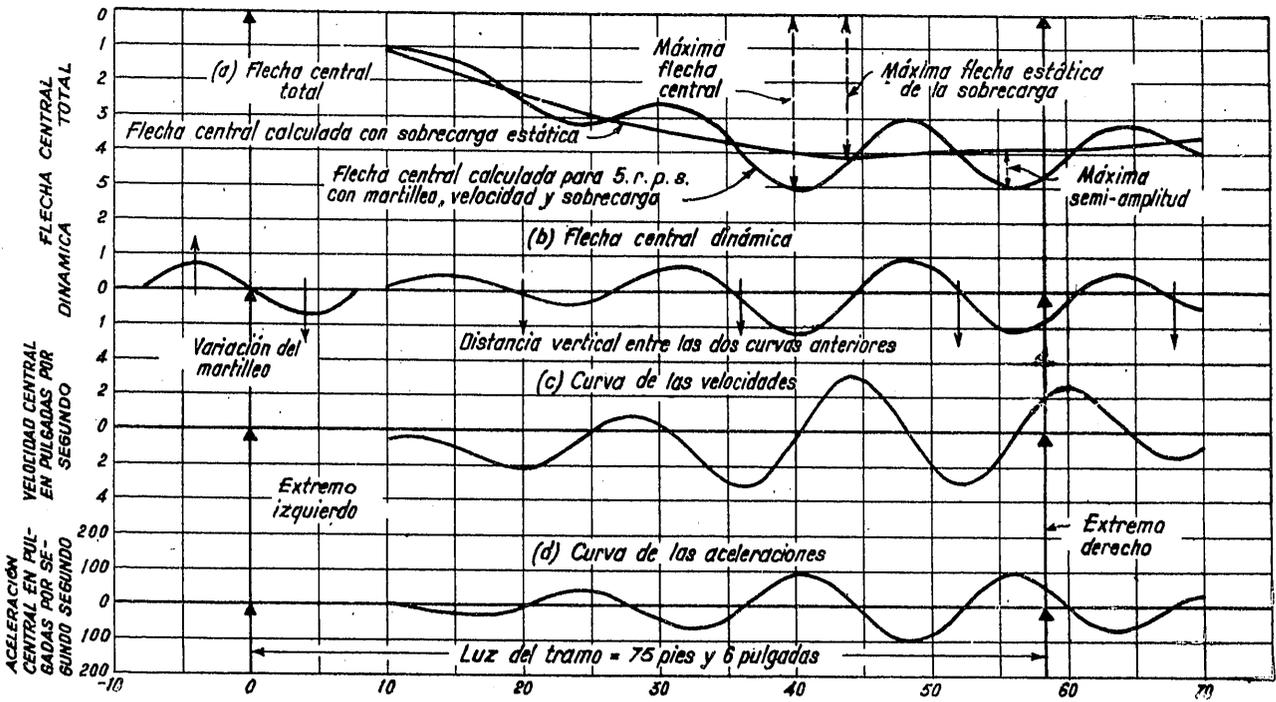


Figura 8.^a

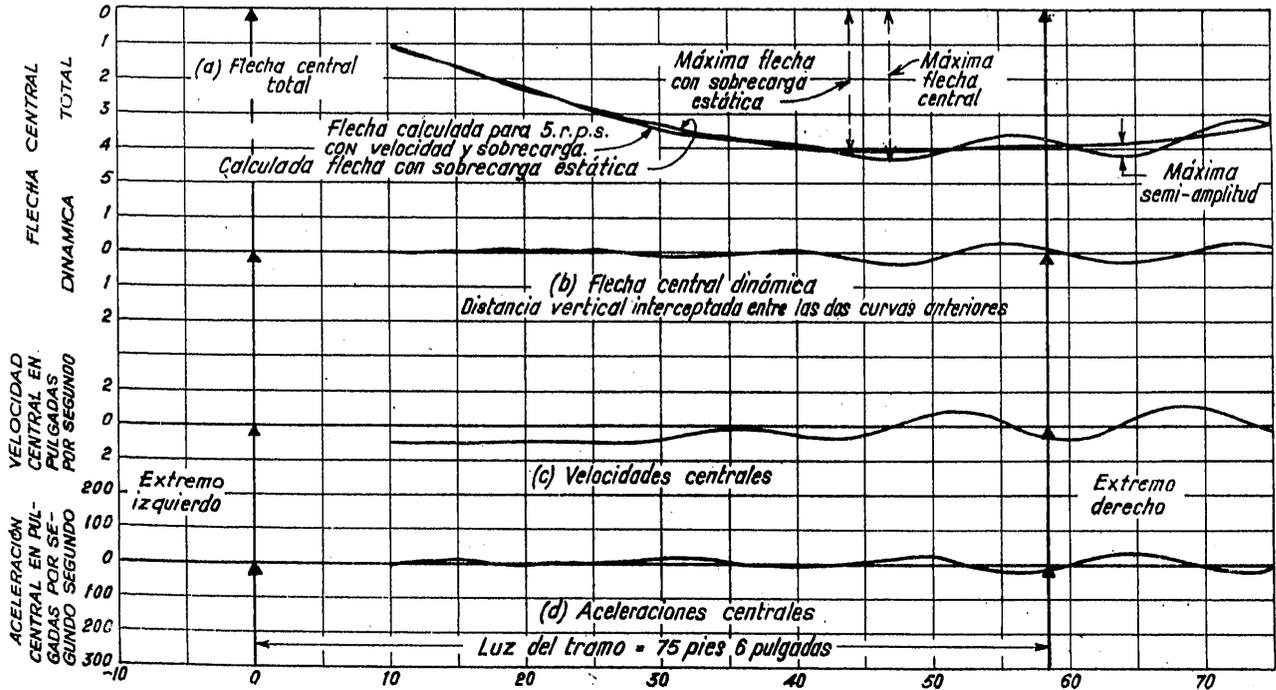


Figura 9.^a

que representa la velocidad que se escoge para cada experiencia.

Si a' , v' y f' se conocen para una posición de la locomotora para un tiempo t' , para un tiempo t'' con el intervalo Δt podríamos deducir a'' , v'' y f'' mediante la utilización de las fórmulas [5], [6] y [8].

Se puede iniciar el estudio colocando una rueda de la locomotora en el extremo izquierdo del tramo, siendo para esta posición $a' = 0$, $v' = 0$ y $f' = f_{c p p}$, siendo estos tres los valores iniciales de estos factores.

Moviendo la locomotora con avances del valor indicado, por la fórmula [8] se conoce el valor de a , y conocido éste, se determinan los valores de v y f por las fórmulas [5] y [6], y utilizando estos valores como correspondientes al final del primer avance o comienzo del segundo, se determinan igualmente los correspondientes al final de este último.

La locomotora se mueve en el tramo de izquierda a derecha, determinándose su posición por la distancia del punto de referencia al extremo izquierdo de aquél, utilizándose como medida de distancia, como ya se ha dicho, el $\frac{1}{16}$ de la circunferencia de la rueda acoplada, siendo el punto que se define el correspondiente a la primera rueda de este grupo.

El valor total del martilleo se divide entre las tres ruedas acopladas de la locomotora utilizada y se determina no sólo por la posición de la misma sino también por la posición angular de los contrapesos, cuando el punto de referencia coincide con el extremo izquierdo, medida en el sentido de la aguja de un reloj sobre una horizontal trazada por el eje de la rueda.

Se considera la fase angular como nula cuando el primer eje está situado en el indicado extremo iz-

quierdo del tramo, considerando el martillero también como cero, aumentando al entrar en el tramo los demás ejes acoplados.

En la figura 7.^a se dibujan, en la parte superior, las dos curvas correspondientes a las flechas centrales, al variar la posición de las ruedas de la locomotora con movimiento de izquierda a derecha, calculándose por el procedimiento de avances sucesivos ya descrito, con la sobrecarga estática, en una, y en la otra, con el efecto dinámico con velocidad de 5 r. p. s. y el martilleo, sin considerar frenado el tramo, correspondiendo la misma flecha central, en la primera, a la posición del primer eje correspondiente entre los 43 a 50 pies, y para la segunda curva, a los 56 pies.

En la curva dibujada inferiormente a aquéllas, se representan las separaciones verticales entre las dos anteriores, o sea, en realidad, el aumento de la flecha central motivado por la velocidad y martilleo, apareciendo la máxima separación cuando aquel eje está situado a los 65 pies del origen.

Son interesantes también las deducciones que se pueden hacer a la vista de las figuras 8.^a y 9.^a, en las que se representan análogas curvas, pero para casos distintos; en la figura 8.^a, con tramo frenado, y en la 9.^a, sin frenado y sin martilleo.

En aquéllas, las máximas flechas centrales corresponden a las posiciones de 44 y 40 pies, respectivamente, y en la segunda, a los 44 y 47 pies.

Las flechas máximas dinámicas, en los tres casos, alcanzan los valores de 0,7, 0,5 y 0,43 pulgadas, y las flechas máximas estáticas, respectivamente, 0,4 y 0,43 pulgadas, con diferencias de casi un 43 por 100 con las dinámicas, como es lógico, más acentuadas en el caso del tramo no frenado y con martilleo.

(Continuará.)