

COLABORACION DEL LABORATORIO CENTRAL

ESTUDIO DE PANDEO EN LA PIEZA RECTA CARGADA DE PUNTA

Por CARLOS BENITO, Ingeniero de Caminos.

El presente artículo pone de manifiesto una vez más la gran atención que nuestro Laboratorio Central viene continuamente dedicando a todos los problemas de la Mecánica, tanto desde el punto de vista teórico como del de la experimentación.

De la teoría de Euler se saca, corrientemente, la consecuencia de que, una vez alcanzada o sobrepasada la carga crítica de pandeo, el equilibrio no es posible y la pieza ha de romperse necesariamente.

Sin embargo, la existencia de ligeros pandeos esbeltas, varias veces observada en soportes muy esbultos, en condiciones difíciles de explicar con las teorías de la elasticidad clásica y las anomalías o incorrecciones notadas en algunos trabajos sobre el tema, nos hicieron pensar en la conveniencia de estudiarlo con interés.

Desde el año 1744, en que Euler publicó su *De curvis elasticis*, muchos ilustres matemáticos se han ocupado de estudiar el pandeo de piezas de diferentes formas, recogiendo los frutos de sus trabajos en un gran número de libros y revistas técnicas.

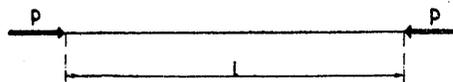
La cuestión se ha aclarado bastante desde que la escuela de Trefftz señaló la necesidad de plantearlo — como todos los problemas de inestabilidad —, separándose de la teoría elemental o clásica de la elasticidad, para considerar las deformaciones como funciones no simplemente lineales de las derivadas primeras de los corrimientos, sino como funciones de éstas y de las derivadas de orden superior.

Puede decirse que la pieza prismática recta con carga axil y enlazada por sus extremos en diferentes formas (empotramiento, articulación, etc.), es el problema más elemental que han atacado todas las teorías, y como, por otra parte, es el caso que a nosotros nos interesa en este artículo, a ella nos referiremos en lo que sigue:

De los diversos métodos que pueden usarse para enlazar los extremos de la barra con el resto de la estructura, el que se considera como fundamental, porque sirve para deducir los restantes, es el caso de la pieza con los extremos articulados, que es el que vamos a tratar aquí.

Estudiando, según la teoría clásica de Euler, las deformaciones que se producen en una barra recta delgada y elástica, de sección constante, articulada en sus extremos, sometida a compresión por la acción de fuerzas que actúan según su eje (fig. 1.^a), se ha observado que, al aumentar el valor de P , la barra

permanece recta, acortándose su longitud de acuerdo con las leyes de la elasticidad, hasta llegar a un determinado valor P_c , que llamaremos carga crítica de pandeo, a partir de la cual, el eje de la barra toma una forma curva dentro del plano que pasa por sus extremos y que contiene el eje de giro mínimo de la sección recta; si aumenta P , la curvatura de la barra aumenta rápidamente hasta alcanzar, en general, el agotamiento resistente de la pieza.

Figura 1.^a

Este es, a grandes rasgos, el proceso de pandeo de una pieza, que detallamos algo más a continuación.

Al aumentar el valor de P desde cero hasta P_c , puede ocurrir que, sin producirse la rotura de la pieza, las compresiones unitarias sean superiores al límite elástico del material, en cuyo caso la pieza pandea antes de alcanzar el valor P_c , por lo que este caso debe ser tratado con especial cuidado, aplicando las teorías de Engesser-Kármán, Timoshenko, etc., o los resultados de las experiencias de Tetmajer, Southwell u otros.

Siempre que las tensiones producidas en el material por la carga crítica de pandeo P_c sean inferiores a su límite elástico, el equilibrio ocasionado al aplicar cargas inferiores a la crítica resulta estable elásticamente con la forma recta de la pieza, y si las cargas aumentan en magnitudes apreciables, los equilibrios instantáneos que resultan para esta forma son inestables.

El valor de la carga crítica se determina por la fórmula de Euler, y multitud de experimentos confirman estas afirmaciones en líneas generales, pero si analizamos el fenómeno con valores próximos al de la carga crítica P_c , para pequeños incrementos de carga, la teoría clásica no interpreta correctamente el fenómeno.

La teoría clásica al uso sólo determina la carga

crítica de pandeo estudiando el equilibrio estable debido a otras inferiores a ella, y admite que el equilibrio estable es imposible con cargas superiores. Marguerre, en 1943, y utilizando el método energético, demostró la estabilidad del equilibrio para cargas menores de la crítica y llegó a la conclusión de que para $P = P_c$ el equilibrio seguía siendo estable y la barra tomaba una forma sinusoidal cuya flecha resultaba indeterminada.

A nuestro modesto entender, si el equilibrio resultase estable, a una carga $P = P_c$ constante le debe corresponder una deformada perfectamente determinada, incompatible con las conclusiones a que llega Marguerre, producidas, quizás, por no haber tenido en cuenta el acortamiento elástico que experimenta la barra al estar sometida a compresión, y que parecen corresponder mejor con la idea de un equilibrio indiferente. Este es un punto que trataremos de aclarar en el presente trabajo.

Para todo ello utilizaremos la siguiente notación:

$l = \overline{OA}$, longitud inicial de la barra.

Ω = su sección.

I = el momento de inercia.

$\rho = \sqrt{\frac{I}{\Omega}}$; el radio de giro mínimo de la sección transversal.

Tomando el punto fijo O como origen (fig. 2.^a), situamos un eje x coincidiendo con el de la barra, y una fuerza, P , aplicada en A y actuando en la direc-

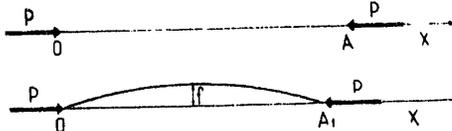


Figura 2.^a

ción del eje x . Como consecuencia de la acción de la carga P , el punto A pasará a la posición A_1 , y todos los puntos de la barra habrán sufrido unos corrimientos que descomponemos en sus dos proyecciones: una, u , según el eje x , y otra, v , normal a ella.

Para valores de f , muy pequeños en relación con l , podemos admitir, como hace Marguerre, que, para el planteamiento de las ecuaciones variacionales que más adelante establecemos, $v' = \frac{\partial v}{\partial x}$ es del mismo orden

que $\frac{f}{l}$, y que $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$ es del mismo que $\frac{f^2}{l^2}$.

Si se aplica el teorema de los movimientos virtuales al conjunto de la barra deformada y de las fuerzas exteriores P que han producido el equilibrio elástico, ha de verificarse que la primera variación de la suma

de los trabajos virtuales debe ser nula. Los trabajos virtuales se refieren tanto a los internos como a los debidos a las fuerzas exteriores, por lo que vamos a deducir la expresión de los diversos sumandos por separado.

Si hacemos $OA_1 = x_1$, para un corrimiento virtual, u , del punto A , la variación del trabajo realizado por las fuerzas exteriores P es:

$$\delta \int_0^{x_1} P u' dx. \quad [1]$$

El trabajo interno está compuesto por el debido a la compresión y el ocasionado por la flexión (*). Llamando ε la deformación por compresión según el eje de la pieza deformada, la variación del trabajo por compresión será:

$$\delta \int_0^{x_1} \frac{\sigma \Omega \varepsilon}{2} dx = \frac{E \Omega}{2} \delta \int_0^{x_1} \varepsilon^2 dx; \quad [2]$$

y designando por M el momento flector en una sección cualquiera de la barra, y por α el ángulo de curvatura por flexión, la variación del trabajo por flexión es:

$$\delta \int_0^{x_1} \frac{M}{2} \cdot \frac{d\alpha}{dx} dx = \frac{E \Omega}{2} \rho^2 \delta \int_0^{x_1} \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^2 dx. \quad [3]$$

Si suponemos que no existen fuerzas transversales, expresar que la primera variación del trabajo virtual del conjunto es nula equivale a sumar las expresiones [1], [2] y [3] e igualarlas a cero, o sea:

$$\delta \int_0^{x_1} \left[P u' + \frac{E \Omega}{2} \varepsilon^2 + \frac{E \Omega}{2} \rho^2 \left(\frac{d\alpha}{dx} \right)^2 \right] dx = 0. \quad [4]$$

Sustituyamos ε y $\frac{d\alpha}{dx}$ por sus valores en función de las derivadas sucesivas de los corrimientos u y v ; para ello tomaremos un punto cualquiera, B , de la

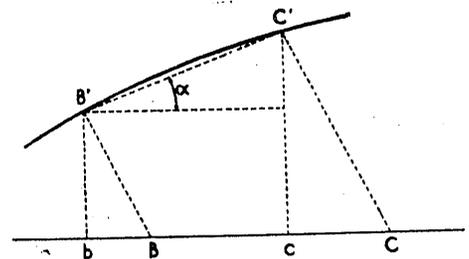


Figura 3.^a

barra sin deformar (fig. 3.^a), y otro, C , a una distancia dx del anterior. Después de aplicar la fuerza P ,

(*) Como es corriente en estos estudios, se prescinde del trabajo debido al esfuerzo cortante.

habrán pasado a la posición B' y C' , y podremos escribir:

$$\widehat{B'C'^2} = (ds)^2 = [(1 + u')^2 + v'^2] (dx)^2;$$

Hemos llamado ds a la distancia $B'C'$ en la barra deformada, la cual, en función de dx , valdrá:

$$ds = (1 + \epsilon) dx;$$

resultando, por tanto,

$$\epsilon = \sqrt{(1 + u')^2 + v'^2} - 1 = u' + \frac{v'^2}{2} - \frac{v'^4}{8} - \frac{u' v'^2}{2} + \dots$$

De la figura 3.^a también se deduce que

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{v'}{1 + u'};$$

y por tanto:

$$\frac{d\alpha}{dx} = v'' - v'' u' - v' u'' - v'^2 v'' + \dots$$

Dividiendo la expresión [4] por $\frac{E\Omega}{2}$ y sustituyendo ϵ y $\frac{d\alpha}{dx}$ por sus desarrollos hasta segundo orden, teniendo en cuenta lo expuesto anteriormente en relación con el orden de u' y v' , obtenemos:

$$\delta \int_0^{x_1} \left[\frac{2P}{E\Omega} u' + \left(u' + \frac{v'^2}{2} \right)^2 + \rho^2 v''^2 \right] dx = 0. \quad [5]$$

A la expresión subintegral la denominaremos $F(u' v' v'') dx$.

Según el cálculo de variaciones, para que se verifique

$$\delta \int_0^{x_1} F(u' v' v'') dx = 0;$$

es necesario que se cumplan las condiciones de Euler, que en este caso son:

$$\left. \begin{aligned} u'' + v' v'' &= 0 \\ - \left(u' + \frac{v'^2}{2} \right) v'' + \rho^2 v''^3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [6]$$

De la primera de estas expresiones se deduce que:

$$u' + \frac{v'^2}{2} = K; \quad [7]$$

siendo K una constante a determinar por las condiciones en los límites. Como O y x_1 son los límites de la integral de la expresión [5], debe cumplirse que:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial u''} \right]_{x=0} = 0,$$

que equivale a:

$$\left[\frac{2P}{E\Omega} + 2 \left(u' + \frac{v'^2}{2} \right) \right]_{x=0} = 0;$$

de donde se deduce que:

$$u' + \frac{v'^2}{2} = - \frac{P}{E\Omega}. \quad [8]$$

Con la [8], la segunda condición de Euler, [6], se transforma en:

$$\frac{P}{E\Omega} v'' + \rho^2 v''^3 = 0; \quad [9]$$

ecuación diferencial que nos permite conocer v .

Obtenemos v por suma de soluciones particulares, cuya forma será:

$$v = a \text{ sen } Ax + b \text{ cos } Ax + c \text{ sen } Bx + d \text{ cos } Bx; \quad [10]$$

con las condiciones en los límites:

$$v_0 = v_{x_1} = v''_0 = v''_{x_1} = 0.$$

Deduciéndose como solución general de la ecuación diferencial

$$v = f \text{ sen } Ax;$$

que debe cumplir con las condiciones impuestas por los extremos de la barra, es decir: $v_0 = v_{x_1} = 0$. Para $x = 0$ se verifica siempre que $v = 0$, independientemente de los valores finitos que puedan tener A y f , y para $x = x_1$ resulta $v = f \text{ sen } Ax_1$, lo que requiere que $f = 0$, o que $Ax_1 = n\pi$; con ello llegamos a la expresión de v , que es:

$$v = f \text{ sen } \frac{n\pi}{x_1} x, \quad [13]$$

que nos da los corrimientos normales al eje de la barra recta para un punto cualquiera de ella en función de f y de x_1 .

Existen, pues, dos soluciones capaces de producir equilibrio:

$$\begin{aligned} 1.^a \quad f &= 0; & v &= 0; \\ 2.^a \quad f &\neq 0; & v &= f \text{ sen } \frac{n\pi}{x_1} x. \end{aligned}$$

De la primera se deduce que $v = v' = v'' = 0$, y, por tanto, teniendo en cuenta la expresión [8], resulta:

$$u' = - \frac{P}{E\Omega},$$

y obtenemos la solución de acortamiento en recta.

La segunda solución nos demuestra que la barra se deforma según una senoide que estará determinada cuando conozcamos los valores de f y x_1 .

Dando a n diferentes valores, se obtienen deformadas con 1, 2, ... armónicas; nosotros estudiaremos solamente el caso de $n = 1$, que es el más interesante en Construcción.

Para relacionar x_1 con los datos del problema, sustituimos el valor de v en la expresión en derivadas parciales:

$$\frac{P}{E\Omega} v'' + \rho^2 v^{iv} = 0,$$

obtenida anteriormente, lo que nos da:

$$-\frac{P}{E\Omega} \cdot \frac{\pi^2}{x_1^2} f + \rho^2 \frac{\pi^4}{x_1^4} f = 0;$$

y como $f \neq 0$, se obtiene:

$$\frac{P}{E\Omega} = \frac{\pi^2 \rho^2}{x_1^2}; \tag{14}$$

de donde:

$$x_1 = \pi \rho \sqrt{\frac{E\Omega}{P}}, \tag{15}$$

que liga x_1 , distancia entre los extremos de la barra pandeada con la fuerza P y las características mecánicas de la pieza.

Para calcular el valor de f , flecha máxima de la deformada, expresamos que la longitud de la barra después de pandeada es igual a la longitud inicial l , disminuída en el acortamiento elástico, o sea:

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1+v'^2} dx = l + \int_0^l \epsilon ds, \tag{16}$$

en la que sustituimos v' y ϵ por sus valores ya deducidos.

De $v = f \text{ sen } \frac{\pi}{x_1} x$, se deduce v' , y según la igualdad [8] resulta $\epsilon = -\frac{P}{E\Omega}$, con lo que la expresión anterior se transforma en:

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{x_1^2} \cos^2 \frac{\pi}{x_1} x} dx = l \left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right).$$

La integral del primer miembro es elíptica de segunda clase; por ello nos conviene desarrollarla en

serie, lo que es válido porque siempre se verifica que

$$\frac{\pi^2}{x_1^2} f^2 \cos^2 \frac{\pi}{x_1} x < 1.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_1} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{x_1^2} f^2 \cos^2 \frac{\pi}{x_1} x} dx = \\ & = \int_0^{x_1} \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{x_1^2} f^2 \cos^2 \frac{\pi}{x_1} x - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi^4}{x_1^4} f^4 \cos^4 \frac{\pi}{x_1} x + \dots \right] dx = \\ & = x_1 \left[1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{\pi^2}{x_1^2} f^2 - \frac{3}{8^2} \cdot \frac{\pi^4}{x_1^4} f^4 + \dots \right]. \end{aligned}$$

Como para flechas pequeñas x_1 es del mismo orden que l , debemos interrumpir el desarrollo después del segundo término, para, de esta forma, llegar al mismo orden de magnitud que en el desarrollo de ϵ ; según esto,

$$\int_0^{x_1} \sqrt{1+v'^2} dx = x_1 \left[1 + \frac{\pi^2 f^2}{4 x_1^2} \right] = l \left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right);$$

de donde:

$$f = \frac{2 x_1}{\pi} \sqrt{\frac{l}{x_1} \left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right) - 1},$$

y sustituyendo x_1 por su valor encontrado anteriormente, se llega a:

$$f = 2\rho \sqrt{\frac{E\Omega}{P}} \sqrt{\frac{l}{\pi\rho} \sqrt{\frac{P}{E\Omega} \left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right) - 1}}, \tag{17}$$

que da el valor de f , flecha máxima de la barra pandeada, en función de los datos del problema.

Para que exista una deformada curva, el valor de f debe ser real, para lo cual es necesario que se cumpla que:

$$\frac{l}{\pi\rho} \sqrt{\frac{P}{E\Omega} \left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right) - 1} > 0;$$

de donde se deduce que:

$$\left(\frac{P}{E\Omega}\right)^3 - 2\left(\frac{P}{E\Omega}\right)^2 + \frac{P}{E\Omega} - \frac{\pi^2 \rho^2}{l^2} > 0; \tag{18}$$

por tanto, siempre que $\frac{P}{E\Omega}$ cumpla esta condición, será posible la deformada curva, además de la recta.

Como hemos probado, la deformada curva de la barra pandeada está perfectamente determinada, pues los corrimientos u y v de un punto cualquiera de ella son funciones exclusivamente de P y de las características mecánicas de la pieza, existiendo una correspondencia biunívoca entre cada deformada y la carga que la produce.

Como las expresiones encontradas para dichos corrimientos satisfacen a las condiciones variacionales de equilibrio, podemos asegurar que el equilibrio de la forma curva existe, sin que, por ahora, se prejuzgue si este equilibrio resulta estable o inestable.

Determinación de la carga crítica de pandeo.

En los párrafos anteriores se ha demostrado la posibilidad de existencia de dos formas de equilibrio completamente determinadas: una, recta, que corresponde a:

$$f=0, \quad v=0, \quad u' = -\frac{P}{E\Omega}$$

y otra, sinusoidal, en la cual:

$$v = f \operatorname{sen} \frac{\pi}{x_1} x;$$

siendo:

$$x_1 = \pi \rho \sqrt{\frac{E\Omega}{P}}$$

y:

$$f = 2\rho \sqrt{\frac{E\Omega}{P}} \sqrt{\frac{l}{\pi\rho} \sqrt{\frac{P}{E\Omega}} \left(1 - \frac{P}{E\Omega}\right) - 1}$$

Si denominamos por $\xi = \frac{l-x_1}{l}$ el acortamiento unitario medio según el eje x , obtenemos para la primera solución:

$$\xi = \frac{P}{E\Omega} \tag{19}$$

y para la otra:

$$\xi = 1 - \frac{\pi\rho}{l} \sqrt{\frac{E\Omega}{P}} \tag{20}$$

Representando ambas expresiones en unos ejes

cartesianos rectangulares (fig. 4.^a), tomando como coordenadas $\frac{P}{E\Omega}$ y ξ , se obtiene: una recta, para la deformada recta, y dos curvas simétricas respecto a la recta $\xi = 1$ y asíntóticas con dicha recta y con el eje ξ , para la otra; ambas expresiones tienen, por tanto, tres soluciones comunes que corresponden con los puntos A, B y C .

La forma de las curvas depende del factor $\frac{\rho}{l}$, que es variable con los datos del problema. Para valores de $\frac{\rho}{l}$ comprendidos entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{200}$, que incluyen todos los casos posibles en construcción, los puntos A y B están próximos a $\frac{P}{E\Omega} = 1$, y, por tanto, corresponden a sollicitaciones que producirán flechas de magnitud mucho mayor que ρ , cayendo, en consecuencia, fuera de las hipótesis admitidas en este trabajo.

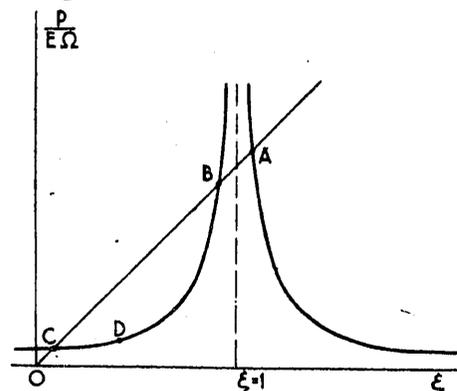


Figura 4.^a

El punto C es la única solución que nos interesa del sistema formado por las expresiones [19] y [20], de las que, eliminando ξ , se llega a la ecuación:

$$\left(\frac{P}{E\Omega}\right)^3 - 2\left(\frac{P}{E\Omega}\right)^2 + \left(\frac{P}{E\Omega}\right) - \frac{\pi^2 \rho^2}{l^2} = 0. \tag{21}$$

Esta ecuación es la misma expresión [18] que obtuvimos al limitar inferiormente el valor de P con la condición de que la flecha fuera real, y de ella se deduce que para valores de $\frac{P}{E\Omega}$ menores de $\frac{P_c}{E\Omega}$ no puede haber solución curva, porque los valores de f serían imaginarios; por tanto, hemos de eliminar de la figura 4.^a el trozo de curva que corresponde a valores de P menores de P_c , y aquellos otros que se salen fuera de las hipótesis admitidas. Así obtenemos la figura 5.^a, que interpretaremos más adelante.

Por tanto, determinaremos la carga crítica de pandeo, P_c resolviendo la ecuación [21]. Sus tres raíces son reales y corresponden a los tres puntos A , B y C de la figura 4.^a, y la menor de ellas nos da el valor de la carga crítica o de bifurcación.

En una primera aproximación, resulta para dicha raíz:

$$\frac{P_c}{E \Omega} = \frac{\pi^2 \rho^2}{l^2};$$

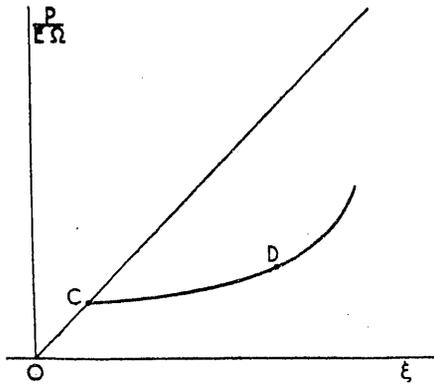


Figura 5.^a

de la que se deduce la fórmula de Euler:

$$P_c = E I \frac{\pi^2}{l^2};$$

para el caso considerado. Para valores de $\frac{\rho}{l} < \frac{1}{100}$, el error relativo que produce esta fórmula con respecto a la solución exacta, es menor de 1/100.000, por lo que puede considerarse como suficientemente aproximada; pero al aumentar el valor de $\frac{\rho}{l}$ el error aumenta en importancia, quedándose la carga crítica de Euler por debajo de la que hemos deducido, en más de 17 por 100 para $\frac{\rho}{l} = \frac{1}{10}$, por lo que consideramos de interés buscar una fórmula más aproximada a los resultados de la teoría expuesta.

Para ello resolveremos la ecuación [21] por medio de funciones circulares, lo que es posible, en nuestro caso, por verificarse siempre que:

$$\frac{\pi^2 \rho^2}{4 l^2} < \frac{1}{27};$$

ya que hemos supuesto que el máximo valor de $\frac{\rho}{l}$ será $\frac{1}{10}$.

Entonces, la raíz menor de la ecuación [21] vale:

$$\frac{P_c}{E \Omega} = \frac{2}{3} \left(1 - \cos \frac{\varphi}{3} \right); \text{ siendo: } \cos \varphi = 1 - \frac{27 \pi^2 \rho^2}{2 l^2};$$

desarrollando en serie se llega a:

$$\frac{P_c}{E \Omega} = \frac{\pi^2 \rho^2}{l^2} + 2 \frac{\pi^4 \rho^4}{l^4} + 7 \frac{\pi^6 \rho^6}{l^6} + \dots;$$

y tomando solamente los dos primeros términos, nos queda:

$$P_c = E I \frac{\pi^2}{l^2} \left[1 + 2 \frac{\pi^2 \rho^2}{l^2} \right],$$

con lo que el error relativo se reduce, respecto a la solución exacta, a menos del 1 por 100 para piezas en las que $\frac{\rho}{l} > \frac{1}{20}$.

Estados de equilibrio con cargas supracríticas.

De la figura 5.^a se deduce que para cargas crecientes desde cero hasta P_c , la única forma de equilibrio es la que se produce al acortarse la barra permaneciendo recta. Al llegar al valor de P_c se presenta un punto de bifurcación, y para valores de la fuerza mayores de P_c , las dos soluciones posibles cumplen las condiciones de equilibrio; sería necesario pasar a variaciones segundas para demostrar teóricamente cuál de ellas era estable y cuál inestable o indiferente, o en qué intervalo resulta estable cada solución; desgraciadamente, el problema matemático que se plantea al aplicar las condiciones de Legendre, Jacobi y Weierstrass a la expresión [5],

$$\int_0^{x_1} F(u', v', v'') dx,$$

para que sea mínimo, no sabemos que esté resuelto, por lo que tenemos que interpretar los resultados de la figura 5.^a en las proximidades del punto C, ayudándonos del principio de mínimo trabajo y de los resultados de la experimentación.

En la figura 5.^a, a cada acortamiento unitario ξ , mayor que ξ_c , corresponden dos estados de carga po-

sibles capaces de mantener el equilibrio: uno, representado por la forma recta, y otro, por la curva.

El equilibrio real que la pieza tiende a tomar en cada caso, será, lógicamente, el que, a igualdad de recorrido de la fuerza, se produzca con menor valor de ésta; es decir, que para cargas superiores a la crítica, la pieza tomará la forma curvada.

Para los casos estudiados, que corresponden a los valores de $\frac{\rho}{l}$ comprendidos entre $\frac{1}{10}$ y $\frac{1}{200}$, el trozo de curva CD es sensiblemente recto y paralelo al eje de alargamientos, lo que indica que, a partir de la carga crítica de pandeo, que corresponde al punto C , teóricamente la carga puede aumentar y seguir el equilibrio; pero este incremento es tan pequeño, que en la práctica la carga resulta constante.

Con este resultado creemos queda aclarada la contradicción a que llega algún autor al afirmar que al crecer la carga y alcanzar el valor de la carga crítica de pandeo P_c , permanecía constantemente igual a $P_c = \frac{EI\pi^2}{l^2}$ y la barra tomaba una forma sinusoidal indeterminada que resultaba, según él, de equilibrio estable.

Como afirmábamos al principio de este trabajo, si a una carga P_c le corresponden infinitas formas de

equilibrio, parece lógico pensar que éste ha de ser indiferente; en los resultados obtenidos anteriormente por nosotros, se demuestra que para que haya equilibrio después de pandeada la barra, teóricamente es necesario que aumente la carga, y para cada valor de ésta, el equilibrio y la deformada de la barra están determinados.

Como consecuencia del desarrollo teórico que hemos expuesto, parece posible que un pilar pandee y siga en equilibrio, resistiendo prácticamente su carga crítica siempre que se cumplan las hipótesis admitidas como fundamento del método, de las que destacamos las dos siguientes:

1.^a La carga debe coincidir perfectamente con el eje de la barra, pues un gran número de experimentos han demostrado que una pequeña excentricidad hace pandear la barra con cargas muy por debajo de la crítica.

2.^a Para que pueda existir ese equilibrio es indispensable que la flecha máxima alcanzada sea muy pequeña en relación con la longitud de la pieza, porque, si no se cumple esta premisa, además de fallar uno de los postulados del método, el fenómeno de flexión que se origina produce en la barra tensiones que sobrepasan en seguida el límite elástico del material.