ALGO SOBRE PANDEO Y ESTABILIDAD DE FIGURAS

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENÍTEZ, Ingeniero de Caminos.

El autor comenta el artículo publicado hace pocos meses por D. Carlos Benito sobre pandeo, facilitando algunas de sus demostraciones.

1. Introducción.

La lectura del interesante artículo de mi amigo y compañero Carlos Benito Hernández acerca del pandeo de piezas rectas, publicado en esta Revista en su número correspondiente al mes de enero de este año, me sugiere algunas observaciones — fruto de lecturas algo precipitadas y escasas de preparación — referentes a teorías íntimamente relacionadas con el tema tratado.

2. Variación de los trabajos virtuales.

Al establecer en el artículo que la primera variación de la suma de los trabajos virtuales (tanto los internos como los debidos a fuerzas exteriores) es nula, llega a escribir:

$$\delta \int_0^{x_1} \left[\frac{2P}{E\Omega} u' + \left(u' + \frac{v'^2}{2}\right)^2 + \rho^2 v''^2 \right] dx = 0. \qquad [5]$$

Denominaremos $F(x, u, u', v', u'', v'')$ a la expresión subintegral, en la que u y v son funciones de x.

Las condiciones de Euler, que expresan la anulación de dicha primera variación (véase, por ejemplo, "Ecuaciones diferenciales", del Sr. Marín Toyos, Madrid, 1942), son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial u''}\right) &= 0; \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial v'}\right) + \frac{d}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial v''}\right) &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Sustituyendo valores:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\frac{2P}{E\Omega} + 2\left(u' + \frac{v'^2}{2}\right)\right] &= 0; \\ -\frac{d}{dx}\left[2\left(u' + \frac{v'^2}{2}\right) v'\right] + \frac{d^2}{dx^2}(2\rho^2 v'') &= 0, \end{aligned}\right\}$$

o sea:

$$\left.\begin{aligned} u'' + v' v'' &= 0; \\ -(u'' + v' v'') v' - \left(u' + \frac{v'^2}{2}\right) v'' + \rho^2 v^{IV} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Teniendo en cuenta la primera ecuación, se simplifica la segunda, y el sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{aligned} u'' + v' v'' &= 0; \\ -\left(u' + \frac{v'^2}{2}\right) v'' + \rho^2 v^{IV} &= 0, \end{aligned}\right\}$$

que son las ecuaciones indicadas por [6] en dicho artículo. Hemos creído útil exponer el desarrollo detallado de estas ecuaciones, a pesar de ser fundamentales en el Cálculo de Variaciones.

3. Equilibrio estable e inestable.

En general, para cualquier pieza o estructura solicitada de forma cualquiera, la posición de equilibrio es estable, si una deformación *virtual* entraña un $\left\{\begin{matrix}\text{aumento}\\ \text{disminución}\end{matrix}\right\}$ de la energía elástica que ha de ser $\left\{\begin{matrix}\text{superior}\\ \text{inferior}\end{matrix}\right\}$ a $\left\{\begin{matrix}\text{la disminución}\\ \text{el aumento}\end{matrix}\right\}$ de la energía potencial debida a las fuerzas exteriores.

Esta diferencia (o sea el incremento de la energía potencial total) es la que, actuando como un resorte, hace que el sistema vuelva a la posición de equilibrio.

Ocurre lo contrario si el equilibrio es inestable. Para el cálculo de esta diferencia o balance hay que operar con términos de segundo orden y superiores en la expresión del incremento o variación de la energía, puesto que los de primer orden en la variación o deformación se contrarrestan por tratarse de posiciones iniciales de equilibrio.

4. Su expresión matemática.

Desarrollemos estas ideas y expresémoslas en forma matemática:

La energía elástica, o sea el trabajo de las fuerzas de tensión, es el producto escalar del tensor de esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ por el tensor de deformaciones, o sea:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \iiint_{vol} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \\ &\quad + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})\, dx\, dy\, dz = \\ &= \iiint_{vol} \left[G(\varepsilon^2_x + \varepsilon^2_y + \varepsilon^2_z) + \frac{\lambda \varepsilon}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{G}{2}(\gamma^2_{xy} + \gamma^2_{yz} + \gamma^2_{zx}) \right] dx\, dy\, dz; \end{aligned}$$

expresión esencial positiva que puede ponerse también en función únicamente de las tensiones

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \iiint_{vol} &\left[\frac{\sigma^2_x + \sigma^2_y + \sigma^2_z}{2E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \right. \\ &\left. + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G}(\tau^2_{xy} + \tau^2_{yz} + \tau^2_{zx}) \right] dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

(Véase, por ejemplo, "Elasticidad", Sr. Torroja, Madrid, 1945.)

El trabajo total de las fuerzas exteriores es evidentemente:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \iiint_{vol} (X u + Y v + Z w) \, d x \, d y \, d z + \\ + \frac{1}{2} \iint_{\bar{A}} (\bar{X} u + \bar{Y} v + \bar{Z} w) \, d \bar{A}.$$

Siendo $X, Y, Z, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, u, v, w$ las fuerzas y recorridos correspondientes a un estado cualquiera de equilibrio.

La energía potencial total (que es nula) es la diferencia entre ambas:

Energía potencial $= \varepsilon - \mathcal{T}$.

Como la expresión completa de la variación de la energía potencial es:

$$\delta (\varepsilon - \mathcal{T}) + \frac{1}{2} \delta^2 (\varepsilon - \mathcal{T}) + \ldots$$

La condición de equilibrio se expresa, como dijimos, por la anulación de la primera variación de la energía potencial, o sea:

$$\frac{\partial (\varepsilon - \mathcal{T})}{\partial u} \delta u + \frac{\partial (\varepsilon - \mathcal{T})}{\partial v} \partial v + \frac{\partial (\varepsilon - \mathcal{T})}{\delta w} \partial w = 0.$$

Esta ecuación es, en realidad, la que figura en el artículo citado, aplicada como caso muy particular, constituyendo la fórmula [5].

Dicha ecuación es la que nos ha proporcionado las ecuaciones [6], que, integradas (véase obra citada, Sr. Torroja, pág. 79) *nos dan la posición de equilibrio.*

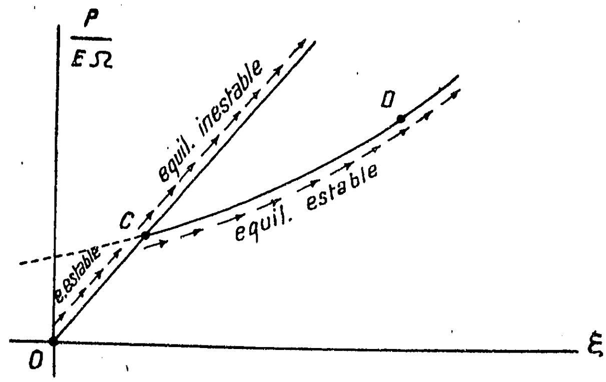
Pero es el examen de la variación segunda de $\varepsilon - \mathcal{T}$ el que proporciona la condición de estabilidad, inestabilidad o indiferencial de dicho equilibrio.

5. Caso en que la solución de estado de equilibrio no es única.

Como se viene a indicar (página 22, columna de la derecha) en el escrito aludido, pasada la carga crítica P_c existe, en realidad, la posibilidad de solución *no uniforme* de equilibrio elástico; es decir, *a partir* de tal valor, $P = P_c$, hay dos figuras de equilibrio posibles: la recta y la curva. La primera es *inestable*, y la segunda, *estable*. Poincaré fué quien, en su célebre memoria "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", introdujo el término de "Carga de bifurcación".

En dicha Memoria — que, como alguien ha dicho, es "una de las obras maestras de la Mecánica analítica" — estudia el equilibrio, estableciendo los mínimos de una función potencial de las coordenadas y de un parámetro. Obtiene curvas que son llamadas "series lineales" de equilibrio.

Si en algún punto de las mismas el determinante funcional o hessiano de la función potencial cambia de signo, la figura es de bifurcación, es decir, que las curvas siguen continuamente a una y otra parte de dicho punto. Si el hessiano se anula sin cambiar de signo, puede haber o no figuras de bifurcación. El hessiano puede anularse también en un punto de parada cuando, por lo menos, dos series lineales se confunden en un punto y no admiten prolongación.



Poincaré demostró, y esto tiene una interpretación casi exacta a nuestro caso, que "si una rama es estable al acercarse al punto de bifurcación, es inestable al alejarse de él".

Constituye la respuesta plenamente satisfactoria, al menos en teoría, a la pregunta que se plantea al final del artículo referido, sobre cuál es la solución estable y cuál la inestable.

6. Enseñanzas derivadas de estudios astronómicos.

Resulta interesante comprobar que el problema de equilibrio (estable, inestable) elástico, tiene su paralelismo en el de una masa flúida homogénea en rotación, cuyo estudio encuentra su origen en los concernientes a la figura de la Tierra, y que iniciados por Newton principalmente, continuados por Maupertius, Maclaurin, Simpson, d'Alembert, Laplace, Legendre, etcétera, y ya más entrado el siglo XIX, por Jacobi, Liouville, Mathiessen, Mme. Kowalewsky, Poincaré, Thomson y Tait, Tchebycheff, Liapounoff, etc., prosiguen en nuestros días. Todos los matemáticos, físicos y hombres de ciencia de altura, se ocuparon de este tema (véase la obra de Todhunter "History of the Theories of Attraction and of the figure of the Earth"), que aunque se refiere a la forma de los astros, su solución entraña un profundo avance de la Mecánica analítica con aplicación indudable en Elasticidad, Hidrodinámica, etc. No hay duda que del conocimiento de los elipsoides de equilibrio de Maclaurin, Jacobi y Roche, del profundo estudio de las llamadas figuras piriformes de Darwin, y de la extensión que Liapounoff y Humbert hacen para el cálculo del equilibrio de figuras de órdenes más elevados que las de Poincaré, se pueden sacar conclusiones de carácter muy general con aplicación a diversos problemas constructivos.