Nuevas fórmulas para determinar las cargas en los firmes de hormigón de las pistas de los aeropuertos,

por H. M. Westergaard

(De *Proceedings de la A. S. C. E.*, mayo 1947.)

Síntesis.

Las cargas o esfuerzos que vamos a investigar son producidos por fuerzas que se transmiten como presiones a través de la huella oblonga de los neumáticos de los aparatos de aterrizaje. Se considerarán tres posiciones de estas fuerzas: La primera, a considerable distancia de cualquier borde o junta en el interior del área de una placa del firme; la segunda es cerca de un borde o una junta que no tenga capacidad para transferir esfuerzos, pero a distancia apreciable del vértice de cualquier ángulo de la placa; la tercera posición es cerca de una junta que transmita cargas, pero a distancia apreciable de cualquier vértice. Se darán fórmulas para determinar los esfuerzos y deformaciones causados por tales cargas. No consideraremos la cuarta posición, inmediata a un vértice, para la que se producen importantes tracciones en la parte alta de la placa.

El contorno de la huella es una curva que varía entre una elipse y su rectángulo circunscrito, pero, por lo pronto, la consideraremos como una elipse más o menos alargada, y la presión distribuída uniformemente en toda el área. Se deducen fórmulas específicas para este caso, pero también pueden deducirse las correspondientes a otras formas, partiendo de las expresiones generales, incluso en el caso de doble neumático.

Las fórmulas básicas para los esfuerzos bajo fuerzas aplicadas en el interior del área de una placa, han sido publicadas, pero las correspondientes a los otros dos casos son resultado de nuevas deducciones.

Notación.

P....... = Carga transmitida a través del neumático a la placa del firme.

a, b.... = Semiejes de la elipse que representa la huella del neumático. Si está cerca de un borde o junta, a es el semieje paralelo al borde o junta. Tanto a como b pueden ser el semieje mayor, lo que depende de que la junta sea longitudinal ó transversal.

x, y.... = Coordenadas rectangulares horizontales. El eje x está en la dirección del semieje a.

r, θ..... = Coordenadas polares correspondientes.

z....... = Deformación.

z_e ..... = Deformación en un borde o junta que no tenga capacidad de transmisión.

z_j , z'_j = Deformaciones de la línea de una junta a ambos lados de la junta cuando ésta tiene capacidad de transmitir.

σ_x , σ_y = Esfuerzos de tracción en el fondo de la placa en las direcciones x e y, lejos de los bordes o juntas.

σ_e .... = Esfuerzos de tracción en el fondo de una placa, a los dos lados de la junta cuando ésta no tiene ninguna capacidad de transmisión.

h........ = Espesor de la placa, supuesto constante.

E....... = Módulo de elasticidad, que se supone constante.

μ .... = Coeficiente de Poisson.

k........ = Módulo de reacción del apoyo. Se supone constante, medible en libras por pulgada cúbica y definiendo la reacción bajo la placa por unidad de área como kz.

l........ = Radio de rigidez relativa, definido como

$$l^4 = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2) k}.$$

A menos que se advierta otra cosa, se utilizan logaritmos naturales.

Hipótesis.

Se admiten las siguientes hipótesis: 1) La placa es elástica y su coeficiente de elasticidad, así como su módulo de Poisson, son constantes. 2) El espesor h es constante. 3) La reacción del apoyo sobre la placa es una presión vertical igual, por unidad de área, a una constante que es k veces la deformación z. El apoyo es uniforme y está en todas partes en contacto con la placa. La constante k es llamada coeficiente de reacción del apoyo y es medible en libras por pulgada cuadrada.

Admitimos, en fin, y no sin gran vacilación, que, como cifra media, tanto el largo como el ancho de la huella, son mayores que el espesor de la placa. De este modo las fórmulas pueden ser usadas sin correcciones debidas a la concentración de esfuerzos, lo cual debe ser tenido en cuenta en los problemas correspondientes de firmes de carreteras.

Exposición de las fórmulas.

A. Esfuerzos y deformaciones en el interior del área de una placa.

Caso 1.º La carga total P se distribuye uniformemente sobre el área de la elipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \qquad [2]$$

Los principales esfuerzos de tracción σ_x y σ_y en las direcciones x e y en el fondo de la placa en el centro de la carga pueden calcularse por una de las siguientes fórmulas:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=\frac{3.P}{8\pi h^2}\left[(1+\mu)\log\frac{E h^3}{k\left(\frac{a+b}{2}\right)^4}\mp 2(1-\mu)\frac{a-b}{a+b}\right]; \qquad [3]$$

o por la equivalente:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=\frac{P}{h^2}\left[0{,}275(1+\mu)\log_{10}\frac{E h^3}{k\left(\frac{a+b}{2}\right)^4}\mp 0{,}239(1-\mu)\frac{a-b}{a+b}\right]. \qquad [4]$$

La deformación en cualquier punto (x,y) dentro o cerca del área cargada, puede ser calculada por la siguiente fórmula:

$$z=\frac{P}{8kl^2}\left[1-\frac{a^2+b^2+4x^2+4y^2}{16\pi l^2}\log\frac{E h^3}{k\left(\frac{a+b}{2}\right)^4}-\frac{a^2+4ab+b^2}{16\pi l^3}+\frac{(a-b)(x^2-y^2)}{2\pi l^2(a+b)}\right], \qquad [5]$$

en la que l está definido por la ecuación [1], o también por la fórmula:

$$z=\frac{P}{4}\sqrt{\frac{3(1-\mu^2)}{E h^3 k}}-\frac{0{,}275(1-\mu^2)P}{E h^3}\left[\frac{a^2+b^2}{4}+x^2+y^2\right]\log_{10}\frac{E h^3}{k\left(\frac{a+b}{2}\right)^4}-\frac{0{,}239(1-\mu^2)P}{E h^3}\left[\frac{a^2+4ab+b^2}{8}+\frac{a-b}{a+b}(-x^2+y^2)\right]. \qquad [6]$$

Caso 2.º La carga es aplicada de nuevo en el interior del área de la placa, a considerable distancia de cualquier borde o junta, pero la carga tiene un tipo más general de distribución. P, está distribuído sobre cualquier área A que tiene ambos ejes x e y de simetría. Puede ser la huella de un neumático simple o doble.

Los principales esfuerzos σ_x y σ_y en el fondo de la placa, bajo el centro de la carga, pueden calcularse por la fórmula siguiente:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\end{matrix}\right\}=\frac{3P}{2\pi h^2}\left[(1+\mu)(K+0.1159)\pm\frac{1-\mu}{2}S\right]. \qquad [7]$$

En donde K y S son coeficientes de área definidos por las ecuaciones siguientes:

$$K=-\frac{1}{A}\int dA\log\frac{r}{l}. \qquad [8]$$

$$S=-\frac{1}{A}\int dA\cos 2\theta. \qquad [9]$$

La deformación, en cualquier punto (x,y) de la carga o sus cercanías, puede ser calculada por la fórmula

$$z=\frac{P}{8kl^2}-\frac{P}{8\pi k l^4}\left[\frac{1}{A}\int r^2\,dA\log\frac{l}{r}+\frac{1{,}1159}{A}\int r^2\,dA+(K+0{,}1159)(x^2+y^2)+\frac{1}{2}S(x^2-y^2)\right] \qquad [10]$$

B. Esfuerzos y deformaciones en un borde o en una junta que no tiene capacidad de transmitir cargas.

Caso 3.º El eje x está a lo largo de la junta. La carga total P está distribuída uniformemente sobre el área de la elipse, que es tangente al borde o junta y tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1. \qquad [11]$$

Los esfuerzos de tracción en el fondo a lo largo del borde o junta, directamente bajo el punto de tangencia de la elipse, pueden computarse por la fórmula:

$$\sigma_e=\frac{3(1+\mu)P}{\pi(3+\mu)h^2}\left[\log\frac{E h^3}{100k\left(\frac{a+b}{2}\right)^4}+1{,}84-\frac{4}{3}\mu+(1+\mu)\frac{a-b}{a+b}+2(1-\mu)\frac{ab}{(a+b)^2}+1{,}18(1+2\mu)\frac{b}{l}\right]; \qquad [12]$$

o por su equivalente

$$\sigma_e = \frac{2{,}2\,(1+\mu)\,P}{(3+\mu)\,h^2}\log_{10}\frac{E\,h^3}{100\,k\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4} +$$

$$+\frac{3\,(1+\mu)\,P}{\pi\,(3+\mu)\,h^2}\left[1{,}84-\frac{4}{3}\mu+(1+\mu)\frac{a-b}{a+b}+\right.$$

$$\left.+2\,(1-\mu)\frac{a\,b}{(a+b)^2}+1{,}18\,(1+2\,\mu)\frac{b}{l}\right]. \qquad [13]$$

La deformación en cualquier punto del eje de simetría perpendicular al borde o junta y a una distancia moderada y del mismo, puede evaluarse aproximadamente por la fórmula

$$z = \frac{P\sqrt{2+1{,}2\,\mu}}{\sqrt{E\,h^3\,k}}\left[1-(0{,}76+0{,}4\,\mu)\frac{b}{l}\right]\times$$

$$\times\left[1-(0{,}76+0{,}4\,\mu)\frac{y}{l}\right]. \qquad [14]$$

Esta fórmula es sólo aproximada y en ella se prescinde de los términos de segundo grado en y, a o b.

Caso 4.º — La carga actúa como en el caso 3.º, pero se distribuye sobre el área de media elipse.

Los esfuerzos de tracción en el fondo de la placa a lo largo del borde o junta bajo el centro de la elipse, pueden calcularse por la siguiente fórmula:

$$\sigma_e = \frac{2{,}2\,(1+\mu)\,P}{(3+\mu)\,h^2}\log_{10}\frac{E\,h^3}{100\,k\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^4} +$$

$$+\frac{3\,(1+\mu)\,P}{\pi\,(3+\mu)\,h^2}\left[3{,}84-\frac{4}{3}\mu-(1-\mu)\frac{a-b}{a+b}+\right.$$

$$\left.+\ 0{,}5\,(1+2\,\mu)\frac{b}{l}\right]. \qquad [15]$$

La deformación en el centro de la elipse o en otro punto cualquiera en el eje de simetría a distancia moderada y del borde o junta, puede evaluarse por la fórmula aproximada

$$z = \frac{P\sqrt{2+1{,}2\,\mu}}{\sqrt{E\,h^3\,k}}\left[1-(0{,}323+0{,}17\,\mu)\frac{b}{l}\right]\times$$

$$\times\left[1-(0{,}76+0{,}4\,\mu)\frac{y}{l}\right]. \qquad [16]$$

Caso 5.º La carga actúa como en los casos 3.º y 4.º; pero como en el 2.º tiene un tipo más general de distribución, uniformemente sobre un área A, en la que el eje y es de simetría; en tanto el x está a lo largo del borde o junta.

Los esfuerzos de tracción en el fondo de la placa, a lo largo del borde o junta, en el punto $x = y = 0$, pueden calcularse por la fórmula:

$$\sigma_e = \frac{3\,(1+\mu)\,P}{\pi\,(3+\mu)\,h^2}\left[4\,K-0{,}28-\frac{4}{3}\mu-\mu^2+\right.$$

$$\left.+\,(1-\mu)\,S+1{,}18\,(1+2\,\mu)\frac{\bar{y}}{l}\right]; \qquad [17]$$

en donde $\bar{y}$ es la distancia del borde o junta al centro de gravedad de la carga.

La deformación será, aproximadamente:

$$z = \frac{P\sqrt{2+1{,}2\,\mu}}{\sqrt{E\,h^3\,k}}\left[1-(0{,}76+0{,}4\,\mu)\frac{\bar{y}}{l}\right]\times$$

$$\times\left[1-(0{,}76+0{,}4\,\mu)\frac{y}{l}\right]. \qquad [18]$$

C) Esfuerzos y deformaciones en una junta que tiene alguna capacidad de transmisión de cargas.

Caso 6.º La carga actúa sobre la junta y está parcialmente a cada lado. El coeficiente de transmisión es j, que varía entre 0 y 1. $j = 1$ representa el 100 por 100 de eficiencia.

Las deformaciones estarán ligadas por la siguiente relación aproximada:

$$z_j - z'_j = (1-j)\,(z_e - z'_e). \qquad [19]$$

Con estas hipótesis, los esfuerzos de tracción en el fondo de las dos placas, a lo largo de la junta, pueden ser calculados por las fórmulas:

$$\sigma_j = \left(1-\frac{1}{2}j\right)\sigma_e + \frac{1}{2}\,j\,\sigma'_e, \qquad [20]$$

y

$$\sigma'_j = \frac{1}{2}\,j\,\sigma_e + \left(1-\frac{1}{2}j\right)\sigma'_e; \qquad [21]$$

en donde σ_e y σ'_e son los esfuerzos correspondientes que pudieran producirse si la junta no tuviera capacidad de transmisión. Esto depende de la distribución de las cargas y pueden ser calculados por las ecuaciones [13], [15] y [17].

De modo parecido, las deformaciones de las dos placas en la junta pueden ser computadas por las fórmulas:

$$z_j = \left(1-\frac{1}{2}j\right)z_e + \frac{1}{2}\,j\,z'_e, \qquad [22]$$

y

$$z'_j = \frac{1}{2}\,j\,z_e + \left(1-\frac{1}{2}j\right)z'_e. \qquad [23]$$

Se observará que las ecuaciones [22] y [23] responden a la [19].

D. D.-A. M.