UN EDIFICIO Y UN METODO DE CALCULO

Por MIGUEL GARCIA ORTEGA y ANGEL DEL CAMPO, Ingenieros de Caminos.

La aplicación del método de cálculo de García Ortega a un caso concreto, que presentamos en nuestro número anterior, concluye en el presente artículo. Al final anuncian los autores que se está construyendo una máquina que resuelve muy rápidamente los problemas de cálculo de estructuras.

(Conclusión.)

Cuando —como en los diferentes casos ya señalados para este edificio— es preciso considerar traslaciones verticales en los nudos, el cálculo se conduce de una manera análoga al caso en que los desplazamientos fuesen horizontales. Los cuadros-fórmula del libro pueden utilizarse sin más que ordenar numéricamente los nudos de la estructura por columnas en vez de por filas, y sustituir por las verticales las componentes horizontales de las reacciones de empotramiento perfecto.

No obstante, y aun a trueque de dedicarnos a completar esta parte del libro de García Ortega, vamos a aprovechar la ocasión para exponer una forma más sencilla de efectuar el cálculo cuando se consideran traslaciones en los nudos. Se basa en simplificar las ecuaciones de las z, formando un sistema equivalente más sencillo, lo cual conduce a una pequeña variación en los cuadros-fórmula.

Las ecuaciones correspondientes a $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ son, respectivamente (1):

$$z_1 \sum_a^b f'_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_a^b X_{\theta_i} = 0 \quad \begin{cases} b = m \\ a = 1 \end{cases}$$

$$-z_1 \sum_a^b f'_{i-m} + z_2 \sum_a^b f'_i - \sum_a^b \varphi_{i-m/i}\,\theta_{i-m} - \sum_a^b \varphi_{i/i-m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_a^b X_{\theta_i} = 0 \quad \begin{cases} b = 2m \\ a = m+1 \end{cases}$$

$$-z_2 \sum_a^b f'_{i-m} + z_3 \sum_a^b f'_i - \sum_a^b \varphi_{i-m/i}\,\theta_{i-m} - \sum_a^b \varphi_{i/i-m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_a^b X_{\theta_i} = 0 \quad \begin{cases} b = 3m \\ a = 2m+1 \end{cases}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$-z_{h-3} \sum_a^b f'_{i-m} + z_{h-2} \sum_a^b f'_i - \sum_a^b \varphi_{i-m/i}\,\theta_{i-m} - \sum_a^b \varphi_{i/i-m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_a^b X_{\theta_i} = 0 \quad \begin{cases} b = (h-2)\,m \\ a = (h-3)\,m+1 \end{cases}$$

$$-z_{h-2} \sum_a^b f'_{i-m} + z_{h-1} \sum_a^b f'_i - \sum_a^b \varphi_{i-m/i}\,\theta_{i-m} - \sum_a^b \varphi_{i/i-m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_a^b X_{\theta_i} = 0 \quad \begin{cases} b = (h-1)\,m \\ a = (h-2)\,m+1 \end{cases}$$

$$-z_{h-1} \sum_a^b f'_{i-m} + z_n \sum_a^b f'_i - \sum_a^b \varphi_{i-m/i}\,\theta_{i-m} - \sum_a^b \varphi_{i/i-m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_a^b X_{\theta_i} = 0 \quad \begin{cases} b = h\,m \\ a = (h-1)\,m+1 \end{cases}$$

Si se tiene en cuenta que $\sum_p^{p'} P_i = \sum_{p+q}^{p'+q} P_{i-q}$, el sistema anterior es equivalente al que sigue, obtenido sus-

(1) *Cálculo de Estructuras reticulares*, García Ortega, página 136.

tituyendo la ecuación n-sima por la que resulta de sumar miembro a miembro las n primeras:

$$z_1 \sum_a^b f'_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_1^m Xe_i = 0 \left\{ \begin{matrix} b=m \\ a=1 \end{matrix}\right.$$

$$z_2 \sum_a^b f'_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_1^{2m} Xe_i = 0 \left\{ \begin{matrix} b=2m \\ a=m+1 \end{matrix}\right.$$

$$z_3 \sum_a^b f'_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_1^{3m} Xe_i = 0 \left\{ \begin{matrix} b=3m \\ a=2m+1 \end{matrix}\right.$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z_{h-2} \sum_a^b f'_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_1^{(h-2)m} Xe_i = 0 \left\{ \begin{matrix} b=(h-2)m \\ a=(h-3)m+1 \end{matrix}\right.$$

$$z_{h-1} \sum_a^b f'_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_1^{(h-1)m} Xe_i = 0 \left\{ \begin{matrix} b=(h-1)m \\ a=(h-2)m+1 \end{matrix}\right.$$

$$z_h \sum_a^b f'_i + \sum_a^b \varphi_{i/i+m}\,\theta_i + \sum_a^b \varphi_{i+m/i}\,\theta_{i+m} + \sum_1^{hm} Xe_i = 0 \left\{ \begin{matrix} b=hm \\ a=(h-1)m+1 \end{matrix}\right.$$

sistema más sencillo que el anterior.

La correspondencia entre incógnitas y ecuaciones será ahora la siguiente:

Incógnitas	Ecuaciones
θ_1	$Md_1 + Me_1 = 0$
θ_2	$Md_2 + Me_2 = 0$
$\vdots$	$\vdots$
θ_m	$Md_m + Me_m = 0$
z_1	$\sum_1^m Xd_i + \sum_1^m Xe_i = 0$
θ_{m+1}	$Md_{m+1} + Me_{m+1} = 0$
θ_{m+2}	$Md_{m+2} + Me_{m+2} = 0$
$\vdots$	$\vdots$
θ_{2m}	$Md_{2m} + Me_{2m} = 0$
z_2	$\sum_1^{2m} Xd_i + \sum_1^{2m} Xe_i = 0$
θ_{2m+1}	$Md_{2m+1} + Me_{2m+1} = 0$
θ_{2m+2}	$Md_{2m+2} + Me_{2m+2} = 0$
$\vdots$	$\vdots$
θ_{3m}	$Md_{3m} + Me_{3m} = 0$
z_3	$\sum_1^{3m} Xd_i + \sum_1^{3m} Xe_i = 0$
$\vdots$	$\vdots$

Y los cuadros para la determinación de las z serán los que damos en la página siguiente.

Se reduce todo, por consiguiente, a sustituir por éstos los cuadros números 28 y 30 del libro.

La fotografía del edificio, tomada desde ángulo distinto y esquematizada en la figura 4.ª, muestra algunas de las estructuras calculadas que, encontrándose situadas dos a dos en planos perpendiculares, se hallan ligadas entre sí. (También ocurre este caso entre las 8 y D, aunque no se aprecia en la figura.)

Su cálculo no puede hacerse como si fuesen independientes, sino que es preciso tener en cuenta los esfuerzos que cada una trasmite a la otra y recibe de ella. Estos casos los hemos resuelto mediante la aplicación del procedimiento de García Ortega a las estructuras en el espacio, que el autor está desarrollando para generalizar su procedimiento.

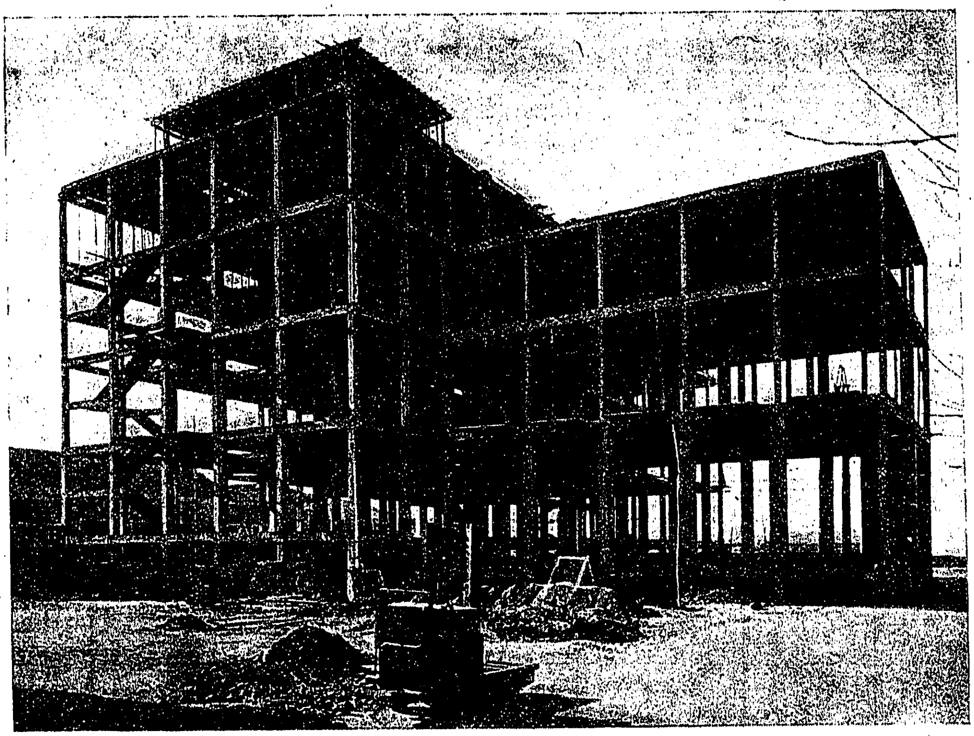
Si se consideran en una barra los momentos de inercia de las secciones normales al eje, respecto a la intersección con el plano normal al de la estructura que pasa por el eje, se obtienen los valores conocidos designados por k, c, φ y f; si se consideran respecto a la intersección con el plano de la estructura, se obtienen valores análogos que designamos por k', c', φ' y f'. Además, representamos por k'' y c'' las características de significación análoga a las de k y c, o k' y c', pero referidas a los momentos o giros que tienen como eje el de la barra; es decir, que k'' y c'' representan los momentos de torsión que se producen en un extremo para giros-unidad en el mismo extremo o en el otro, respectivamente.

Determinación de las "z" en función de las reacciones de empotramiento.

	Fila 1		…	Fila h		…		Z_h	Fila h+1		…	
	θ_1 $\mathring{M}_{e_1}$	…	…	$\theta_{(h-1)m+1}$ $\mathring{M}_{e(h-1)m+1}$	$\theta_{(h-1)m+2}$ $\mathring{M}_{e(h-1)m+2}$	…	θ_{hm} $\mathring{M}_{e\,hm}$	$\sum^{hm} \mathring{X}_{e_i}$	θ_{hm+1} $\mathring{M}_{e\,hm+1}$	θ_{hm+2} $\mathring{M}_{e\,hm+2}$	…	$\theta_{(h+1)m}$ $\mathring{M}_{e(h+1)m}$
$\sum_1^{hm} X_{d_i} =$				$\varphi_{(h-1)m+1/hm+1}$	$\varphi_{(h-1)m+2/hm+2}$	…	$\varphi_{hm/(h+1)m}$	$\sum_{(h-1)m+1}^{hm} f'_i$	$\varphi_{hm+1/(h-1)m+1}$	$\varphi_{hm+2/(h-1)m+2}$	…	$\varphi_{(h+1)m/hm}$
$\varphi_{(h-1)m+1/hm+1}\,\theta'_{(h-1)m+1} =$	$\bullet$	…	…	$\bullet$	$\times$ $\}$ suma $P_{(h-1)m+2}$		$\times$	$\times$	$\times$			
$P_{(h-1)m+2}\,\theta'_{(h-1)m+2} =$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$	…	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$ $\}$ suma P_{hm}	$\vdots$ $\}$ suma P'_i	$\vdots$	$\vdots$		
$P_{hm}\,\theta'_{hm} =$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\times$	$\times$	$\times$	…	
Sumas $\times\left(-\frac{1}{P_h}\right)$	$\bullet$	…	…	$\bullet$	$\bullet$	…	$\bullet$		$\times$	$\times$		$\times$
$z'_h =$	$\bullet$	…	…	$\bullet$	$\circ$	…	$\bullet$	$-\frac{1}{P_i}$	P_{hm+1}	P_{hm+2}	…	$P_{(h+1)m}$
$P_{hm+1}\,\theta_{hm+1} =$	$\bullet$	…	…	$\bullet$	$\bullet$	…	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	…	$\bullet$
$P_{hm+2}\,\theta_{hm+2} =$	$\bullet$	…	…	$\bullet$	$\bullet$	…	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	…	$\bullet$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$P_{(h+1)m}\,\theta_{(h+1)m} =$	$\bullet$	…	…	$\bullet$	$\bullet$	…	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	…	$\bullet$
Sumas $z_h =$	$\bullet$			$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$	$\bullet$		$\bullet$

Determinación de las "z" numericamente

	Términos conocidos	Fila h		…		Z_h	Fila h+1		…	
		$\theta_{(h-1)m+1}$	$\theta_{(h-1)m+2}$	…	θ_{hm}		θ_{hm+1}	θ_{hm+2}	…	$\theta_{(h+1)m}$
$\sum_1^{hm}(X_{d_i}+X_{e_i}) =$	$\sum_1^{hm} X_{e_i}$	$\varphi_{(h-1)m+1/hm+1}$	$\varphi_{(h-1)m+2/hm+2}$	…	$\varphi_{hm/(h+1)m}$	$\sum_{(h-1)m+1}^{hm} f'_i$	$\varphi_{hm+1/(h-1)m+1}$	$\varphi_{hm+2/(h-1)m+2}$	…	$\varphi_{(h+1)m/hm}$
$\varphi_{(h-1)m+1/hm+1}\,\theta'_{(h-1)m+1} =$	$\bullet$		$\times$	…	$\times$	$\times$	$\times$			
$P_{(h-1)m+2}\,\theta'_{(h-1)m+2} =$	$\bullet$			…	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$		
$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
$P_{hm}\,\theta_{hm} =$	$\bullet$					$\times$	$\times$	$\times$	…	
Sumas $\times\left(-\frac{1}{P_h}\right)$	$\bullet$						$\times$	$\times$	…	$\times$
$z'_h =$	$\bullet$						P_{hm+1}	P_{hm+2}	…	$P_{(h+1)m}$
$P_{hm+1}\,\theta_{hm+1} =$	$\bullet$									
$P_{hm+2}\,\theta_{hm+2} =$	$\bullet$									
$\vdots$	$\vdots$									
$P_{(h+1)m}\,\theta_{(h+1)m} =$	$\bullet$									
Suma $z_h =$	$\bullet$									



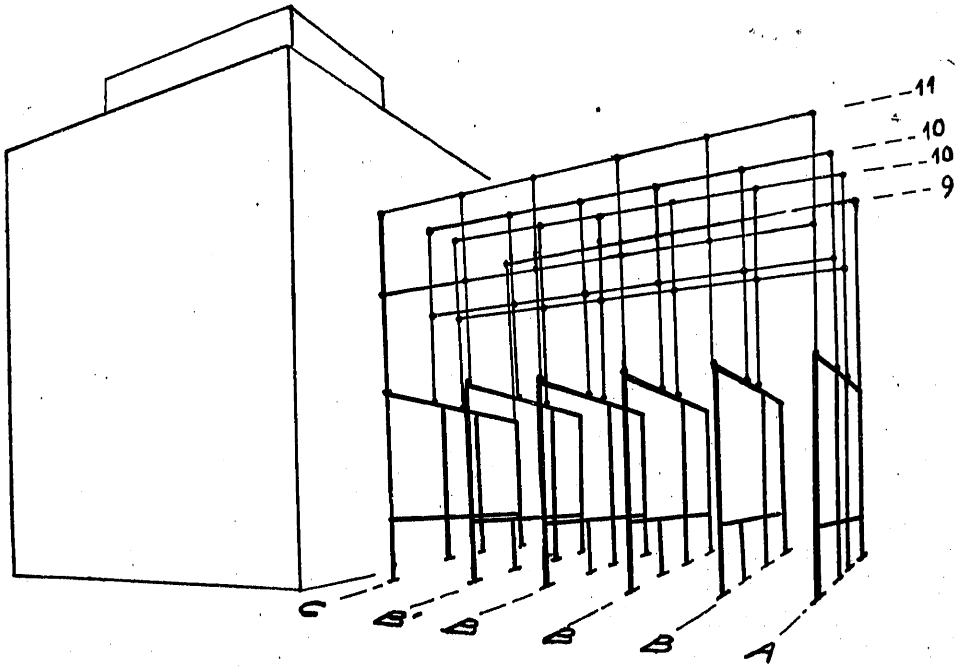


Figura 4.ª

Sean las estructuras I y II (fig. 5.ª), situadas en planos normales entre sí y con el nudo o común. El cálculo de la estructura I, si se prescinde de la influencia de la II, se efectúa por el procedimiento correspondiente a estructuras planas, siendo las ecuaciones de equilibrio del nudo o:

$$\Sigma\, \mathfrak{M}_{o/i} + (\mathfrak{M}_o)_I = 0$$
$$\Sigma\, \mathfrak{X}_{o/i} + (\mathfrak{X}_o)_I = 0$$
$$\Sigma\, \mathfrak{Y}_{o/i} + (\mathfrak{Y}_o)_I = 0$$

representando por $(\mathfrak{M}_o)_I$, $(\mathfrak{X}_o)_I$ e $(\mathfrak{Y}_{o/i})_I$ las reacciones correspondientes a las cargas de la estructura I.

Pero como el coeficiente de θ_o en $\Sigma\, \mathfrak{M}_{o/i}$ es K_o; si el de x_o en $\Sigma\, \mathfrak{X}_{o/i}$ lo representamos por A_x, y el de y_o en $\Sigma\, \mathfrak{Y}_{o/i}$ por A_y, siendo A_x y A_y valores que se obtienen fácilmente (ob. cit., págs. 39 y 80), resulta:

$$\Sigma\, \mathfrak{M}_{o/i} = K_o\, \theta_o + R_m$$
$$\Sigma\, \mathfrak{X}_{o/i} = A_x\, x_o + R_x$$
$$\Sigma\, \mathfrak{Y}_{o/i} = A_y\, y_o + R_y$$

representando por R_m, R_x y R_y las sumas de los restantes términos de $\Sigma\, \mathfrak{M}_{o/i}$, $\Sigma\, \mathfrak{X}_{o/i}$ y $\Sigma\, \mathfrak{Y}_{o/i}$, respectivamente.

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio del nudo o pueden escribirse así:

$$\left.\begin{aligned} K_o\, \theta_o + R_m + (\mathfrak{M}_o)_I &= 0 \\ A_x\, x_o + R_x + (\mathfrak{X}_o)_I &= 0 \\ A_y\, y_o + R_y + (\mathfrak{Y}_o)_I &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

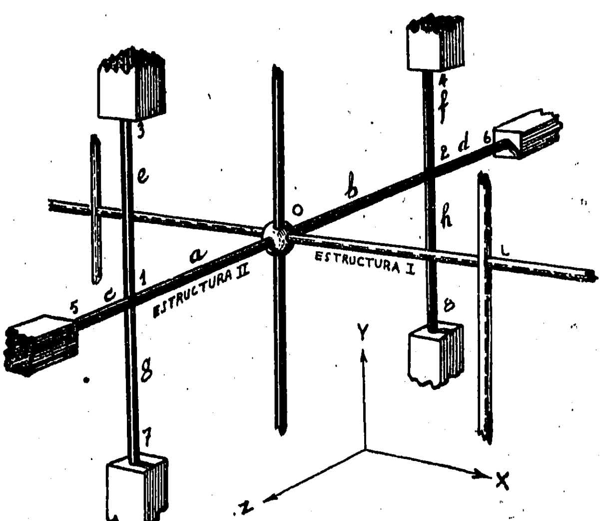


Figura 5.ª

siendo R_m independiente de θ_o, R_x independiente de x_0 y R_y, independiente de y_0. Por otra parte, si se tiene en cuenta la influencia de la estructura II, las ecuaciones de equilibrio del nudo o, correspondientes a los momentos según el eje de las Z y a los esfuerzos según los de las X y las Y, resultan ser las siguientes, al aplicar el procedimiento de García Ortega a las estructuras en el espacio:

$$\left.\begin{aligned} &K_o\, \theta_o + R_m + k''_a\, \theta_o + k''_b\, \theta_o + c''_a\, \theta_1 + c''_b\, \theta_2 + \\ &\quad + (\mathfrak{M}_o)_I + (\mathfrak{M}''_o)_{II} = 0; \\ &A_x\, x_o + R_x + (f'_a + f'_b)\, x_o + (\mathfrak{X}_o)_I + \\ &\quad + (\mathfrak{X}_o)_{II} = 0; \\ &A_y\, y_o + R_y + (f_a + f_b)\, y_o + (\mathfrak{Y}_o)_I + \\ &\quad + (\mathfrak{Y}_o)_{II} = 0; \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

donde $(\mathfrak{M}''_o)_{II}$, $(\mathfrak{X}_o)_{II}$ e $(\mathfrak{Y}_o)_{II}$ son las reacciones correspondientes a las cargas de la estructura II.

Prescindiendo del efecto producido por los nudos de esta última estructura que están separados del o por más de una barra, pues, en general, ejercen poca influencia sobre la estructura I (equivale a suponer dichos nudos empotrados), las ecuaciones de equilibrio en los nudos 1 y 2 correspondientes a los momentos según el eje de las Z, son:

$$(k''_a + k''_c + k'_e + k'_g)\, \theta_1 + c''_a\, \theta_o = \mathfrak{M}''_1$$

$$(k''_b + k''_d + k'_f + k'_h)\, \theta_2 + c''_b\, \theta_o = \mathfrak{M}''_2$$

representando por M''_1 y M''_2 los momentos de torsión que producen las cargas que actúan en la estructura II sobre los nudos 1 y 2, respectivamente. De estas ecuaciones deducimos:

$$\theta_1 = -\frac{c''_a}{k''_a + k''_c + k'_e + k'_g}\,\theta_o + \frac{\mathfrak{M}''_1}{k''_a + k''_c + k'_e + k'_g}$$

$$\theta_2 = -\frac{c''_b}{k''_b + k''_d + k'_f + k'_h}\,\theta_o + \frac{\mathfrak{M}''_2}{k''_b + k''_d + k'_f + k'_h}$$

Valores que, sustituídos en el sistema [2], suponiendo además que

$$(\mathfrak{M}_o)_I + (\mathfrak{M}''_o)_{II} = \mathfrak{M}_o,$$
$$(\mathfrak{X}_o)_I + (\mathfrak{X}_o)_{II} = \mathfrak{X}_o$$
$$\text{e } (\mathfrak{Y}_o)_I + (\mathfrak{Y}_o)_{II} = \mathfrak{Y}_o$$

permite escribirlo así:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(K_o + k''_a + k''_b - \frac{c''_a}{k''_a+k''_c+k'_e+k'_g} - \frac{c''_b}{k''_b+k''_d+k'_f+k'_h}\right)\theta_o + \\
&+ R_m + \mathfrak{M}_o + \frac{c''_a}{k''_a+k''_c+k'_e+k'_g}\,\mathfrak{M}''_1 + \frac{c''_b}{k''_b+k''_d+k'_f+k'_h}\,\mathfrak{M}''_2 = 0; \\
&(A_x + f'_a + f'_b)\, x_o + R_x + \mathfrak{X}_o = 0; \qquad (A_y + f_a + f_b)\, y_o + R_y + \mathfrak{Y}_o = 0.
\end{aligned}\right\} \quad [3]$$

Comparando los sistemas [1] y [3], resulta que la estructura I puede calcularse como si estuviera aislada, sin más que sustituir en las ecuaciones de equilibrio del nudo o:

$$K_o \quad \text{por } K_o + k''_a + k''_b - \frac{c''_a}{k''_a+k''_c+k'_e+k'_g} - \frac{c''_b}{k''_b+k''_d+k'_f+k'_h}$$

$$A_x \quad \text{por } A_x + f'_a + f'_b$$

$$A_y \quad \text{por } A_y + f_a + f_b$$

$$(\mathfrak{M}_o)_1 \text{ por } \quad \mathfrak{M}_o + \frac{c''_a}{k''_a+k''_c+k'_e+k'_g} - \frac{c''_b}{k''_b+k''_d+k'_f+k'_h}$$

$$(\mathfrak{Y}_o)_1 \text{ por } \mathfrak{X}_o \qquad (\mathfrak{Y}_o)_1 \text{ por } \mathfrak{Y}_o\,.$$

En las piezas de sección constante, rectangular, de dimensiones a y b y luz L, puede tomarse (E. Torroja, *Elasticidad*, pág. 171):

$$k'' = -c'' = \frac{G}{L}a^3 b\left(0{,}33 - 0{,}22\frac{a}{b} + 0{,}03\left(\frac{a}{b}\right)^2\right)$$

siendo $a < b$, y si se adopta para G el valor $G = \dfrac{E}{2{,}32}$

(A. Peña, *Hormigón armado*, pág. 81), resulta:

$$k'' = -c'' = \frac{E}{2{,}32}\,\frac{a^3 b}{L}\left(0{,}33 - 0{,}22\frac{a}{b} + 0{,}03\left(\frac{a}{b}\right)^2\right).$$

Además, en nuestro caso y en la mayor parte, las cargas propias de una estructura no producen en ella momentos de torsión, por lo que se verifica entonces que

$$(\mathfrak{M}''_o)_{11} = \mathfrak{M}''_1 = \mathfrak{M}''_2 = 0,$$

y las sustituciones a realizar, teniendo en cuenta que $c'' = -k''$, son:

$$K_o \text{ por } K_o + k''_a\frac{k''_c+k'_e+k'_g}{k''_a+k''_c+k'_e+k'_g} + k''_b\frac{k''_d+k'_f+k'_h}{k''_b+k''_d+k'_f+k'_h}$$

$$A_x \quad \text{por } A_x + f'_a + f'_b \qquad (\mathfrak{X}_o)_1 \text{ por } \mathfrak{X}_o$$

$$A_y \quad \text{por } A_y + f_a + f_b \qquad (\mathfrak{Y}_o)_1 \text{ por } \mathfrak{Y}_o\,.$$

Terminamos con esto el presente trabajo, en el que hemos expuesto ejemplos y complementos teóricos al procedimiento de cálculo de estructuras de García Ortega, seleccionando y adaptando los que hemos juzgado más adecuados entre los realizados para el edificio mencionado. Falta por decir que el personal auxiliar dedicado al cálculo de los *cuadros*, una vez familiarizado con su mecanismo, realiza su trabajo sin esfuerzos mentales y con facilidad. Desde luego que en las estructuras de gran número de nudos el cálculo resulta forzosamente largo y más trabajoso; pero si ello pudiese prevenir en contra, al calculista que trate de iniciarse en el procedimiento sepa que actualmente se está construyendo, en los talleres de nuestro compañero Sr. Fernández Bollo, la máquina eléctrica que, con patente en España y en los principales países extranjeros, a nombre de García Ortega, resuelve el problema del cálculo de estructuras muy sencillamente y con extraordinaria rapidez.