CONSIDERACIONES ACERCA DE PENDIENTES Y DESAGÜES DE CUBIERTAS Y PAVIMENTOS

Por MIGUEL A. HACAR BENITEZ, Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor un riguroso estudio teórico del tema que sirve de título a este trabajo, y llega a conclusiones de interés, demostrando la poca atención que en la práctica suele dedicarse a tan sencillo como importante asunto.

1. Generalidades.

Constantemente, ya sea en la construcción de cualquier tipo de pavimento, de cubierta, de azotea, etcétera, se presenta al proyectista la elección de pendientes que, facilitando el corrimiento de las aguas de lluvia, la lleven a los desagües.

Son numerosos los casos, y de ello ejemplos tenemos en todas partes, en que el agua forma charcos debido a no tener pendiente suficiente. Otras veces, aunque se han elegido bien las pendientes máximas (las de las limas), no se ha estudiado la distribución de las mismas en todo el piso.

Por ello vamos a estudiar el problema desde el punto de vista teórico, introduciendo ciertas simplificaciones.

2. Planteamiento del problema.

El movimiento de un cuerpo sometido a la acción de la gravedad y obligado a moverse sobre una superficie, puede plantearse analíticamente del modo siguiente, en que suponemos no hay rozamientos.

Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de la superficie referida a unos ejes cartesianos trirrectangulares.

En un punto (x, y, z) de la misma, el móvil experimentará un desplazamiento que está contenido, en primera aproximación, en el plano tangente a la superficie en dicho punto.

Si, como de costumbre, designamos por:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{y} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

como los cosenos directores de la normal al plano tangente son proporcionales a $-p$, $-q$, $+1$, las proyecciones de las fuerzas exteriores (gravedad y reacción de la superficie, en sentido de su normal, por suponer no existen rozamientos, son (fig. 1.ª):

Las ecuaciones fundamentales de la dinámica resultan ser:

$$\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= -mg\frac{p}{1+p^2+q^2}; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= -mg\frac{q}{1+p^2+q^2}; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= -mg + \frac{mg}{1+p^2+q^2}. \end{aligned}\right.$$

Como p y q son funciones sólo de x e y, simplificando las dos primeras ecuaciones obtenemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \varphi_1(x, y); \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \varphi_2(x, y), \end{aligned}\right\}$$

en que φ_1, φ_2 son funciones conocidas de x, y. Las soluciones de este sistema son las proyecciones de las trayectorias sobre el plano XOY. Las cuatro constantes de integración, x_0, y_0, $\frac{dx_0}{dt_0}$, $\frac{dy_0}{dt_0}$, vienen dadas por la posición y la velocidad en un instante dado que puede o no tomarse como inicial.

Si hay rozamiento, las ecuaciones diferenciales toman forma algo más complicada. (Véase nota bibliográfica (1) al final de este artículo.)

El movimiento de un flúido sobre la superficie es más complejo. La velocidad depende de la altura de la lámina y de la rugosidad del fondo. Además, puede haber expansión lateral, efecto de remanso o resalto, etc., etc. (4). Pero al objeto de simplificar y para abordar el problema en su forma más elemental, suponemos que: Las pendientes son suaves, por lo que el flúido lleva velocidad pequeña prácticamen-

Proyección sobre el eje	x	y	z
Fuerza gravitatoria	0	0	$-mg$
Reacción de la superficie.	$-mg\frac{p}{1+p^2+q^2}$	$-mg\frac{q}{1+p^2+q^2}$	$+\frac{mg}{1+p^2+q^2}$

te uniforme, yendo todas las partículas por sus líneas de máxima pendiente, sin desviarse transversalmente de esta trayectoria.

dividiendo por x, y, se integran inmediatamente y obtenemos:

$$b^2 \log y - a^2 \log x = \text{const} = \log k;$$

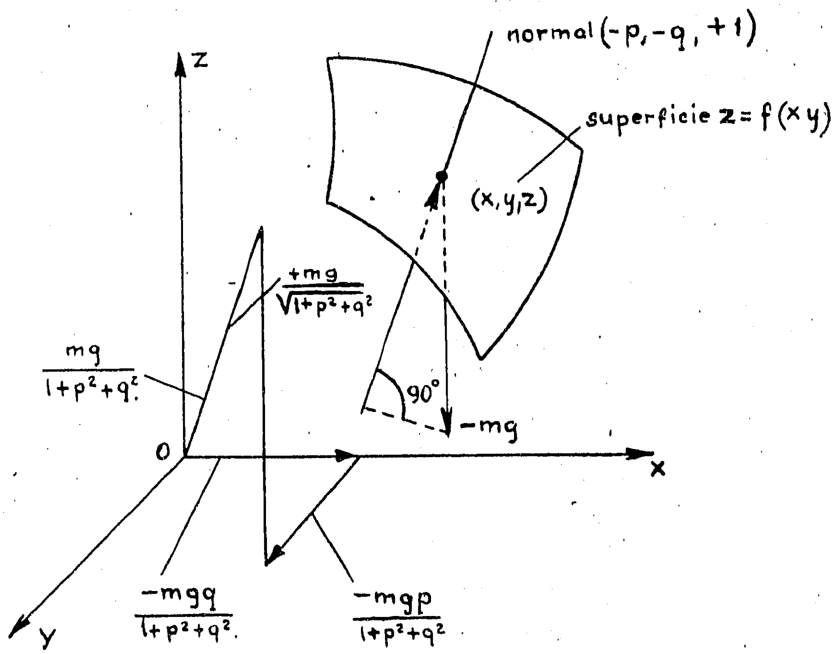

Figura 1.ª

3. Determinación de las líneas de máxima pendiente.

Estas líneas son analíticamente fáciles de obtener (2), teniendo en cuenta que son ortogonales a las líneas de nivel, o sea, a las secciones de la superficie considerada por planos paralelos al $x\,y$ que suponemos horizontal.

a) Elipsoide.

Por ejemplo, en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

las líneas de nivel tienen por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h,$$

en que h es una constante; su ecuación diferencial es:

$$\frac{x\,d\,x}{a^2} + \frac{y\,d\,y}{b^2} = 0;$$

o sea:

$$b^2 \times d\,y - a^2 y\,d\,x = 0;$$

de donde se deduce:

$$y^{b^2} = k\,x^{a^2}.$$

Poniendo $\frac{a^2}{b^2} = g$, y modificando la constante, $y = K\,x^g \ldots$, que son parábolas.

Si $a = b$, el elipsoide es de revolución, y como es evidente, resultan líneas rectas.

b) Paraboloide.

Si se trata del paraboloide $z = p\,\frac{y}{x}$, la ecuación de sus líneas de nivel es $y = m\,x$; son rectas que parten del origen. Por esta razón, las trayectorias, en proyección, son círculos. En el espacio son curvas de cuarto orden.

c) Conoides.

Por la misma razón, las líneas de máxima pendiente de un conoide recto con respecto a un plano horizontal perpendicular a su directriz, se proyectan según círculos.

d) Superficies de revolución.

En las superficies de revolución, las líneas de nivel y de máxima pendiente son evidentemente los paralelos y los meridianos, respectivamente.

4. El paraboloide hiperbólico de eje vertical.

La superficie de gran número de cubiertas (3) y pavimentos, se compone de paraboloides hiperbólicos cuyos planos directores son verticales y perpendiculares entre sí. Los replanteos de estas superficies son muy sencillos, pues basta trazar, como líneas maestras, dos generatrices de un sistema, y luego, con cuerdas o "tirantas" que se apoyen en ambas a intervalos iguales, se define la superficie. Así se hacen los solados de azoteas, los depósitos con el fondo en pendiente, etc.

Si se trata de una superficie rectangular en que sus bordes deseamos sean horizontales, como tal es el caso de una cubierta que apoya en muros de la misma altura, o del piso de una nave con un desagüe en su centro (fig. 2.ª), la distribución de las líneas de máxima pendiente es inmediata.

Sea el rectángulo de lados $2a \times 2b$. La cota máxima en su centro designémosla por c. La ecuación del paraboloide, en los ejes de la figura, tiene por ecuación (fig. 3.ª):

$$z = c\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\;\frac{y}{b}\right).$$

Las "limas" tienen por pendiente $\frac{c}{a}$ y $\frac{c}{b}$.

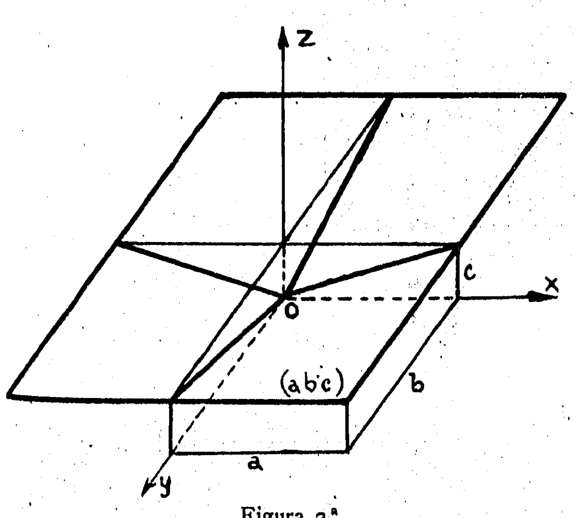

Figura 2.ª

Si las designamos por λ_1, λ_2, respectivamente, dicha ecuación se transforma en

$$z = \lambda_1 x + \lambda_2 y - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c} x y.$$

La ecuación del pl. tg. a la superficie en un punto (x, y), es la siguiente, pues:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c\,(b-y)}{a\,b}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\,(a-x)}{a\,b};$$

$$z - z_1 = c\,\frac{b-y_1}{a\,b}(x-x_1) + c\,\frac{a-x_1}{a\,b}(y-y_1).$$

La intersección de este plano con el horizontal $z = z_1$ da una recta de coeficiente angular $-\frac{b-y_1}{a-x_1}$.

La perpendicular a esta línea, situada en dicho plano horizontal, es la proyección de la línea de máxima pendiente. Por ello, la ecuación diferencial que las define es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{b-y};$$

o sea:

$$(x-a)\,dx - (y-b)\,dy = 0.$$

Integrando, tenemos:

$$(x-a)^2\;(y-b)^2 = \pm\, c^2 \quad \text{(fig. 4.ª)};$$

siendo c una constante de integración.

Estas curvas representan una serie de hipérbolas equiláteras y sus conjugadas. Entre ellas correrá el agua, según las hipótesis hechas, como si fuesen pequeños canales independientes entre sí.

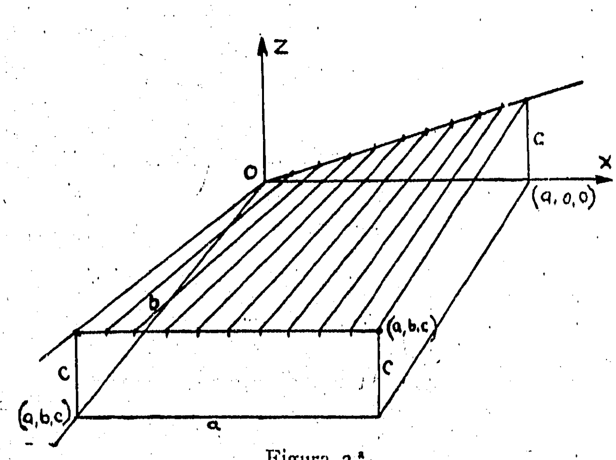

Figura 3.ª

te uniforme, yendo todas las partículas por sus líneas de máxima pendiente, sin desviarse transversalmente de esta trayectoria.

dividiendo por x, y, se integran inmediatamente y obtenemos:

$$b^2 \log y - a^2 \log x = \text{const} = \log k;$$

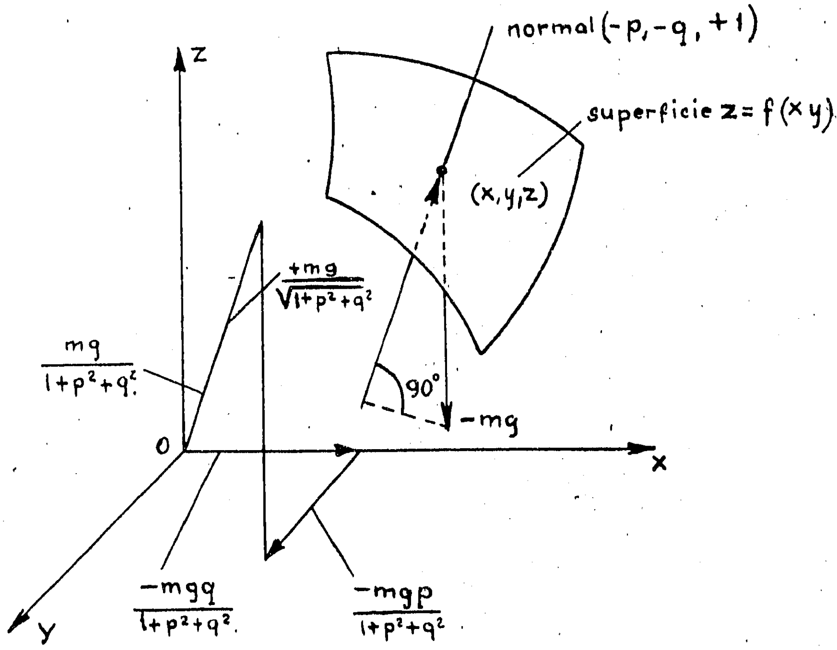

Figura 1.ª

3. Determinación de las líneas de máxima pendiente.

Estas líneas son analíticamente fáciles de obtener (2), teniendo en cuenta que son ortogonales a las líneas de nivel, o sea, a las secciones de la superficie considerada por planos paralelos al $x\,y$ que suponemos horizontal.

a) *Elipsoide.*

Por ejemplo, en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

las líneas de nivel tienen por ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h,$$

en que h es una constante; su ecuación diferencial es:

$$\frac{x\,d\,x}{a^2} + \frac{y\,d\,y}{b^2} = 0;$$

o sea:

$$b^2 \times d\,y - a^2\,y\,d\,x = 0;$$

de donde se deduce:

$$y^{b^2} = k\,x^{a^2}.$$

Poniendo $\frac{a^2}{b^2} = g$, y modificando la constante, $y = K\,x^g\ldots$, que son parábolas.

Si $a = b$, el elipsoide es de revolución, y como es evidente, resultan líneas rectas.

b) *Paraboloide.*

Si se trata del paraboloide $z = p\,\frac{y}{x}$, la ecuación de sus líneas de nivel es $y = m\,x$; son rectas que parten del origen. Por esta razón, las trayectorias, en proyección, son círculos. En el espacio son curvas de cuarto orden.

c) *Conoides.*

Por la misma razón, las líneas de máxima pendiente de un conoide recto con respecto a un plano horizontal perpendicular a su directriz, se proyectan según círculos.

d) Superficies de revolución.

En las superficies de revolución, las líneas de nivel y de máxima pendiente son evidentemente los paralelos y los meridianos, respectivamente.

4. El paraboloide hiperbólico de eje vertical.

La superficie de gran número de cubiertas (3) y pavimentos, se compone de paraboloides hiperbólicos cuyos planos directores son verticales y perpendiculares entre sí. Los replanteos de estas superficies son muy sencillos, pues basta trazar, como líneas maestras, dos generatrices de un sistema, y luego, con cuerdas o "tirantas" que se apoyen en ambas a intervalos iguales, se define la superficie. Así se hacen los solados de azoteas, los depósitos con el fondo en pendiente, etc.

Si se trata de una superficie rectangular en que sus bordes deseamos sean horizontales, como tal es el caso de una cubierta que apoya en muros de la misma altura, o del piso de una nave con un desagüe en su centro (fig. 2.ª), la distribución de las líneas de máxima pendiente es inmediata.

Sea el rectángulo de lados $2a \times 2b$. La cota máxima en su centro designémosla por c. La ecuación del paraboloide, en los ejes de la figura, tiene por ecuación (fig. 3.ª):

$$z = c\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{x}{a}\,\frac{y}{b}\right).$$

Las "limas" tienen por pendiente $\frac{c}{a}$ y $\frac{c}{b}$.

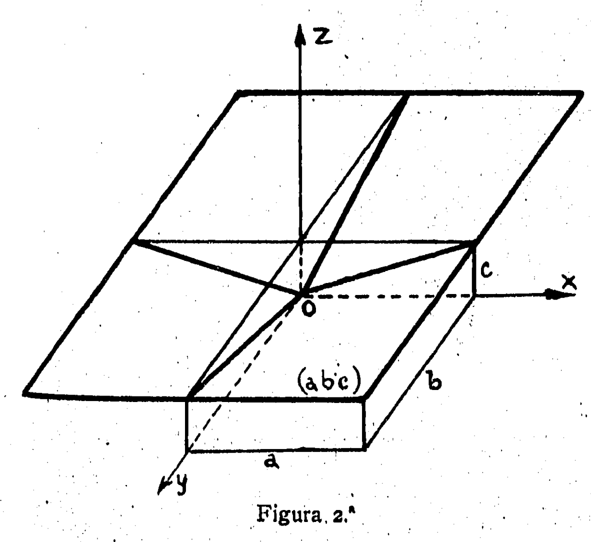

Figura 2.ª

Si las designamos por λ_1, λ_2, respectivamente, dicha ecuación se transforma en

$$z = \lambda_1 x + \lambda_2 y - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{c} x y.$$

La ecuación del pl. tg. a la superficie en un punto (x, y), es la siguiente, pues:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c\,(b-y)}{a\,b}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\,(a-x)}{a\,b};$$

$$z - z_1 = c\,\frac{b-y_1}{a\,b}(x-x_1) + c\,\frac{a-x_1}{a\,b}(y-y_1).$$

La intersección de este plano con el horizontal $z = z_1$ da una recta de coeficiente angular $-\frac{b-y_1}{a-x_1}$.

La perpendicular a esta línea, situada en dicho plano horizontal, es la proyección de la línea de máxima pendiente. Por ello, la ecuación diferencial que las define es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a-x}{b-y};$$

o sea:

$$(x-a)\,dx - (y-b)\,dy = 0.$$

Integrando, tenemos:

$$(x-a)^2\,(y-b)^2 = \pm c^2 \quad \text{(fig. 4.ª)};$$

siendo c una constante de integración.

Estas curvas representan una serie de hipérbolas equiláteras y sus conjugadas. Entre ellas correrá el agua, según las hipótesis hechas, como si fuesen pequeños canales independientes entre sí.

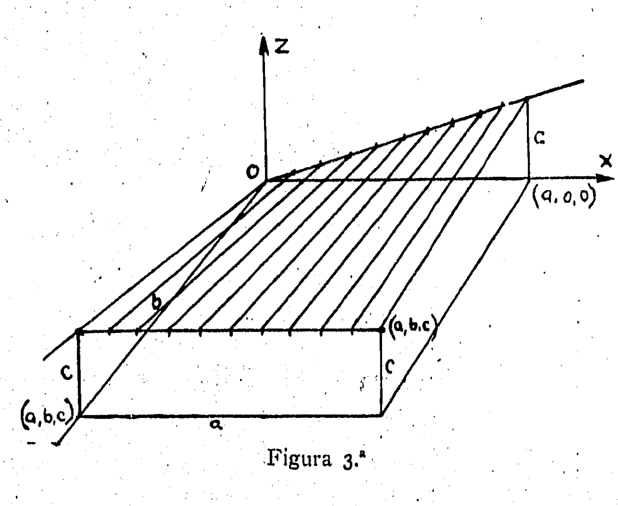

Figura 3.ª

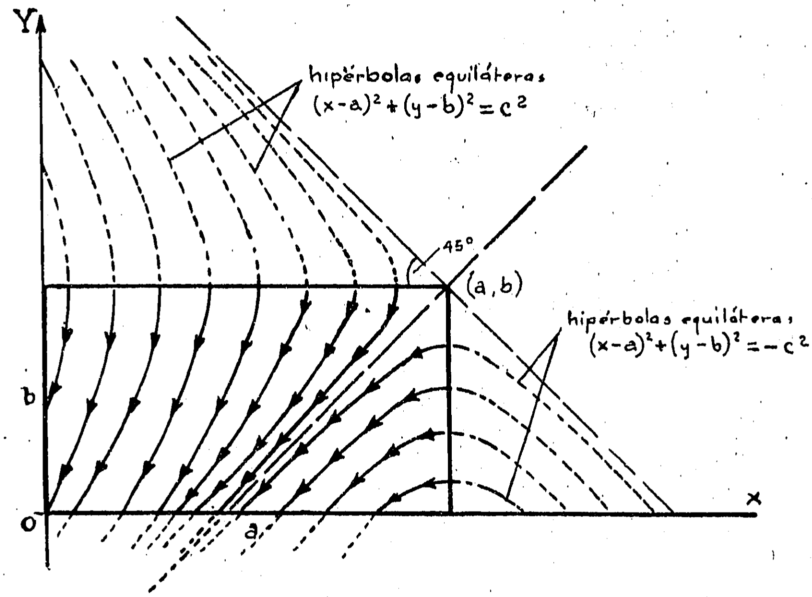

Figura 4.ª

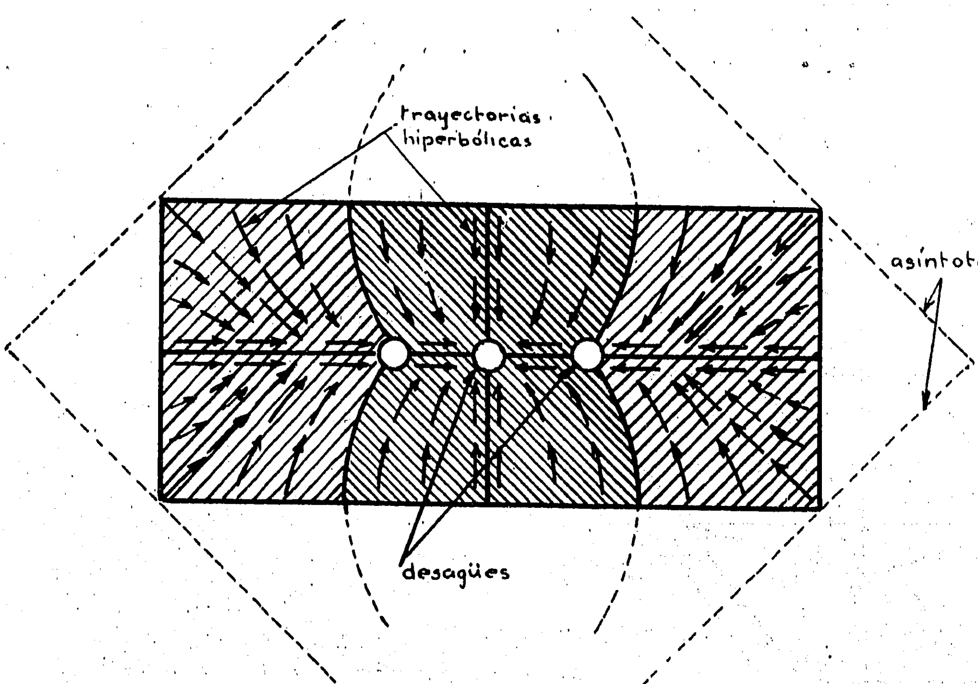

Figura 5.ª

5. Distribución de las arquetas de desagüe.

Si deseamos poner, para recoger el agua de lluvia, tres arquetas para que desagüen el mismo caudal, su disposición debe ser tal que las zonas de las que recojan agua, o sea sus cuencas, tengan igual superficie en planta (fig. 5.ª).

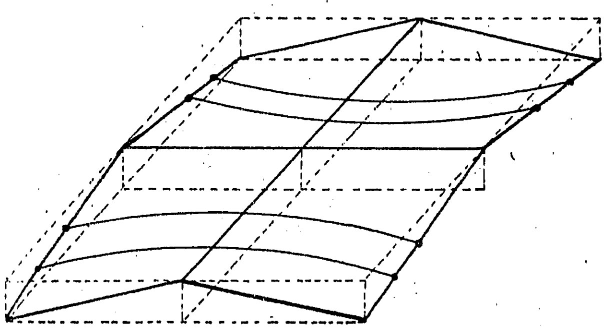

Figura 6.ª

Si se trata de una cubierta cuyas limastesas o líneas de separación de cuencas son horizontales y deseamos recoger el agua con cuatro bajantes situados en los ángulos y otros cuatro en cada uno de los lados mayores (fig. 6.ª), debemos procurar que las áreas $S_1, S_2, S_3, \ldots$, sean lo más iguales posible (fig. 7.ª).

6. Distribución de los puntos de igual pendiente máxima.

Vamos ahora a determinar el lugar geométrico de los puntos que tienen la misma pendiente máxima:

Como el ángulo que dicha línea de máxima pendiente forma con el plano horizontal XOY es el mismo que el que la normal al plano tangente forma con el eje OZ; si le llamamos γ, como la ecuación del plano tangente es la anteriormente deducida, estará determinado por:

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(c\,\dfrac{b-y_1}{a\,b}\right)^2+\left(c\,\dfrac{a-x_1}{a\,b}\right)^2}},$$

si γ es contante:

$$(x-a)^2+(y-b)^2 = R^2; \qquad [1]$$

donde:

$$R = \frac{a\,b}{c}\operatorname{tg}\gamma. \qquad [2]$$

Es decir que, según [1], la proyección horizontal de las líneas de igual pendiente máxima son círculos de centro en (a, b) (fig. 8.ª), y según [2], dichas pendientes, o sea $\operatorname{tg}\gamma$, son proporcionales a su distancia a dicho punto (a, b), que es el vértice del paraboloide. Refiramos la ecuación del paraboloide a dicho punto, efectuando una traslación paralela de los ejes coordenados. Basta poner en la ecuación del mismo, en vez de x, y, z, $x+a$, $y+b$, $z+c$, con lo que queda:

$$z+c = c\left(\frac{x+a}{a}+\frac{y+b}{b}-\frac{(x+a)\,(y+b)}{a\,b}\right);$$

simplificando:

$$z = -\frac{c\,x\,y}{a\,b} = -\frac{\lambda_1\,\lambda_2}{c}\,x\,y;$$

fórmula muy sencilla, de la que podríamos también haber partido.

Las líneas lugar geométrico de los puntos de

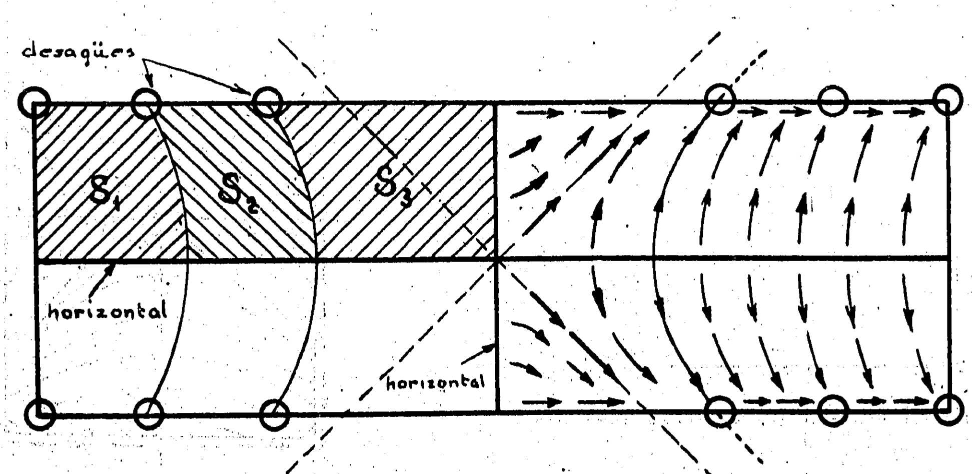

Figura 7.ª

igual pendiente nos indican los sitios de encharcamiento o sequedad, según sea dicha pendiente.

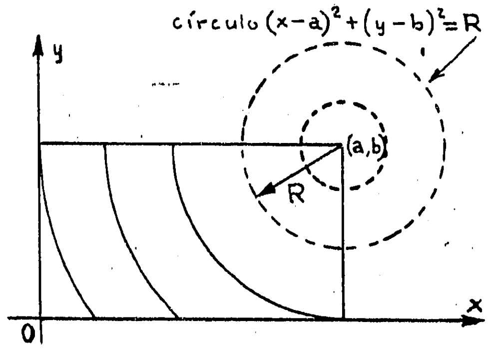

Figura 8.ª

Los bajantes de un tejado deben estar previstos para poder desaguar un número de litros por segundo igual al que resulte de multiplicar los metros cuadrados de la cuenca que lo alimenta por los milímetros de lluvia por segundo correspondientes al mayor aguacero registrado. El diámetro de estos bajantes se calculará con holgura, ya que, dada la forma de entrar el agua, se produce un régimen turbulento que hace disminuir el caudal admisible.

En la figura aparece una forma que suele darse a las azoteas. Esta superficie está compuesta por dos paraboloides del mismo vértice y de los mismos planos directores (conjugados).

7. Caudales en los canalones del alero.

Veamos ahora los caudales que para un régimen de lluvia, A mm./seg., pasan por cada una de las secciones de los canalones del alero del tejado AOB.

Estudiemos por separado los trozos de alero AC, CO y OB.

Sean (fig. 9.ª) P_1, P_2, P_3, puntos tomados sobre los mismos, cuyas coordenadas serán:

P_1	$b < x_1 < a$	$y_1 = 0$
P_2	$O < x_2 < b$	$y_2 = 0$
P_3	$x_3 = 0$	$O < y_3 < b$

Evidentemente, si Q_i son los caudales respectivos:

$$Q_1 = A \,.\, S_1; \qquad Q_2 = A \,.\, S_2; \qquad Q_3 = A \,.\, S_3.$$

El cálculo de las Q_i en función de los puntos respectivos P_i se obtiene sin dificultad, como figura a continuación.

Cálculo de Q_1. — Traslademos los ejes coordenados a V:

$$y^2 - x^2 = m^2.$$

Como en estos ejes P_1 $(a - x_1, b)$ y la hipérbola pasa por él, su ecuación será:

$$y^2 - x^2 = b^2 - (a - x_1)^2; \quad x = \sqrt{y^2 - b^2 + (a - x_1)^2}.$$

$$\text{Vértice } \left(O K = \sqrt{b^2 - (a - x_1)^2}\right);$$

y entonces:

$$S_1 = (a - x_1)(b - k) - \int_k^b \sqrt{y^2 - k^2}\, dy = (a - x_1)(b - k) -$$

$$- \frac{k^2}{2}\left[\frac{b}{k}\sqrt{\frac{b^2}{k^2} - 1} - \operatorname{arg\,ch}\frac{b}{k}\right].$$

Como casos extremos se comprueba que:

$$\text{para } x_1 = a - b: \quad k = 0 \quad S_1 = \frac{b^2}{2};$$

$$\text{»} \quad x_1 = a \quad : \quad k = b \quad S_1 = 0;$$

lo cual es evidente:

$$Q_1 = A \,.\, S_1.$$

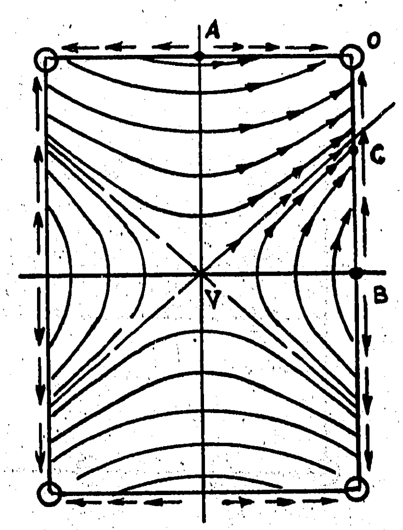

Figura 9.ª

Cálculo de Q_2. — Como la ecuación referida a V de la hipérbola que pasa por P_2 es

$$x^2 - y^2 = (a - x_2)^2 - b^2;$$

$$S_2 = \int_0^b \sqrt{y^2 + (a - x_2)^2 - b^2}\, . \, d\,y =$$

$$= \left[\frac{y\sqrt{y^2+k^2}}{2} + \frac{k^2}{2}\, L\left(y + \sqrt{y^2+k^2}\right)\right]_0^b =$$

$$= \frac{b\,(a - x_2)}{2} + \frac{(a - x_2)^2 - b^2}{4} \, . \, L\,\frac{(a - x_2) + b}{(a - x_2) - b},$$

el caudal es

$$\boxed{Q_2 = A \, . \, S_2}$$

Se comprueba que para $x_2 = a - b$ » $S_2 = \frac{b^2}{2}$, lo cual es evidente.

Para $x_2 = 0$ (desagüe):

$$S = \frac{a\,b}{2} + \frac{a^2 - b^2}{4}\, L\left(\frac{a+b}{a-b}\right),$$

que indica la cuenca correspondiente o que desagua por los lados mayores del rectángulo.

Por los menores desaguará el área:

$$s = a\,b - S = \frac{a\,b}{2} - \frac{a^2 - b^2}{4}\, L\left(\frac{a+b}{a-b}\right).$$

Designando

$$\frac{b}{a} = \lambda < 1\,; \qquad L\left(\frac{a+b}{a-b}\right) = L\,\frac{1+\lambda}{1-\lambda} =$$

$$= 2\left[\frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} + \ldots\right] = 2\left[\frac{b}{a} + \frac{b^3}{3\,a^3} + \ldots\right] \simeq 2\,\frac{b}{a}\,;$$

puesto que $\frac{b^3}{3\,a^3}$ es pequeño:

$$\begin{cases} S \simeq \dfrac{a\,b}{2} + \dfrac{a^2 - b^2}{4} \cdot \dfrac{2\,b}{a} = \dfrac{b}{2\,a}\,(2\,a^2 - b^2) = \dfrac{2\,a^2\,b - b^3}{2\,a}\,; \\[2ex] s \simeq \dfrac{a\,b}{2} - \dfrac{a^2 - b^2}{4}\;\dfrac{2\,b}{a} = \dfrac{b^3}{2\,a}. \end{cases}$$

$$\frac{S}{s} \simeq 2\,\frac{a^2}{b^2} - 1$$

vemos que en cuanto a es algo mayor que b, todo desagua por el lado mayor. Por ejemplo: para $a = 2\,b$ » $s = \frac{1}{7}\,S$.

Cálculo de Q_3. — La ecuación referida a ejes que pasan por V de la hipérbola que pasa por

$$P_3\,(a,\, b - y_3) \text{ es } x^2 - y^2 = a^2 - (b - y_3)^2$$

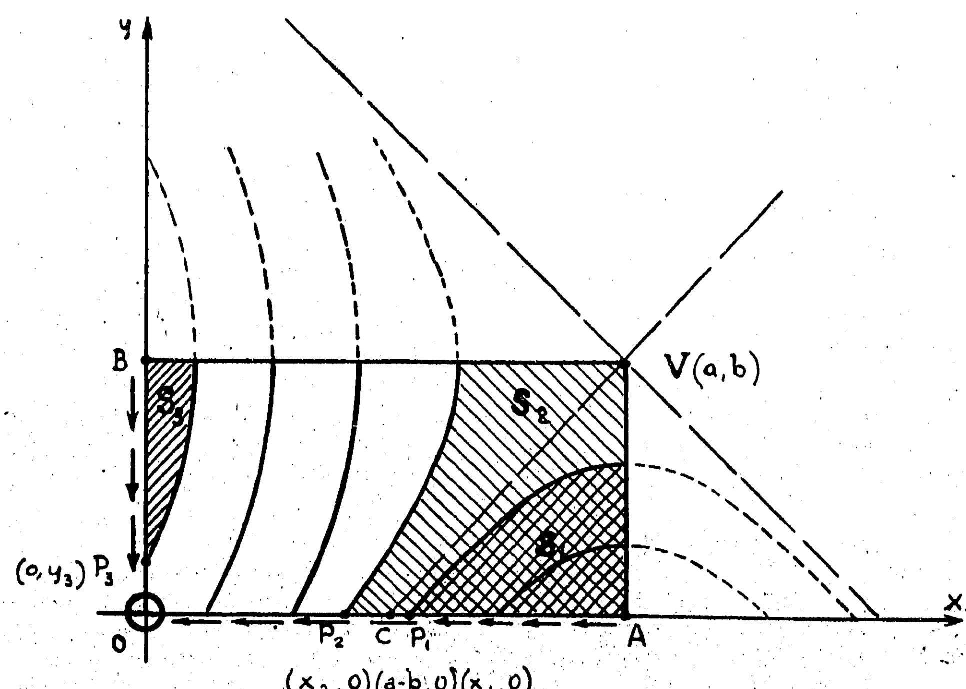

Figura 10.

corta a VB en un punto que dista de V:

$$k = \sqrt{a^2 - (b - y_3)^2};$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{a^2-(b-y_3)^2}}^{a} \sqrt{x^2 - [a^2 - (b - y_3)^2]}\, dx =$$

$$= \left[\frac{x\sqrt{x^2 - k^2}}{2} - \frac{k^2}{2} L \left(x + \sqrt{x^2 - k^2}\right) \right]_k^a =$$

$$= \frac{a(b - y_3)}{2} - \frac{k^2}{2} L(a + b - y_3) + \frac{k^2}{2} L\sqrt{a^2 - (b - y_3)^2} =$$

$$= \frac{a(b - y_3)}{2} - \frac{a^2 - (b - y_3)^2}{4} L \frac{a + (b - y_3)}{a - (b - y_3)};$$

$$Q_3 = A \cdot S_3 .$$

Para $y_3 = 0$ obtenemos el valor anterior de S, como era de esperar. Para $y_3 = b$ se comprueba que $S_3 = 0$.

Dado el poco grado de precisión que se necesita generalmente en la práctica, es preferible dibujar unas cuantas líneas de la red de curvas de máxima pendiente, y con ayuda de un planímetro determinar los valores de las distintas cuencas, ahorrándonos el cálculo de las integrales.

8. Conclusiones.

Según lo expuesto, llegamos a las siguientes conclusiones:

1.ª Deben estudiarse las líneas de máxima pendiente de toda superficie destinadas a facilitar su desagüe. Vemos que, generalmente, se reduce, para los casos usuales, a un problema muy sencillo.

2.ª La distribución de las líneas de igual pendiente máxima es interesante, pues nos da una idea de los puntos en que puede haber encharcamiento, si se trata de un pavimento; peligro de goteras, si es una cubierta, etc. Puede ello evitarse imponiendo que la máxima pendiente, en cualquier punto, sea superior a un valor dado.

3.ª Es sencillo determinar de antemano el caudal máximo correspondiente a cada desagüe, investigando su cuenca de alimentación. A los bajantes, pozos de registro, canalones, etc., etc., resulta fácil y conviene para su buen servicio, darles una distribución lógica, fijando con holgura sus dimensiones, pendientes, etc., con arreglo al caudal que por ellos va a circular. Todo ello es un problema elemental, como hemos visto, pero que por no tenerse en cuenta en multitud de ocasiones y no darle la importancia que merece, hace que obras, por lo demás bien construídas, adolezcan de defectos difíciles o caros a veces de subsanar y que pudieran haberse evitado.

Notas bibliográficas.

1. Con gran generalidad y amplitud puede estudiarse el movimiento del punto material sobre una superficie, por ejemplo en la *Mécanique Rationelle,* de Jean Chazy, tomo I, cap. VII (Gauthier Villars., París, 1947, 3.ª edic.), donde le dedica 48 páginas. Se expone allí, tanto para el caso de no haber razonamiento por el método de las ecuaciones de Lagrange, como cuando lo hay, para superficies fijas o para superficies móviles, etc. Considera y define las líneas geodésicas de una manera que pudiéramos llamar dinámica, como "trayectorias de un punto material que se mueve sobre una superficie fija sin fuerzas dadas ni frotamientos". La correspondencia con la definición geométrica de los mismos se establece inmediatamente.

2. El estudio de las líneas de máxima pendiente de superficies puede verse, por ejemplo, en el tomo VII del *Traité D'Analyse,* de H. Laurent (Gauthier-Villars, París, 1891), página 61 y siguientes.

3. Cubiertas parabólicas de hormigón, a base de láminas armadas, se estudian elásticamente en el conocido libro de L. Issenmann Pilarski, *Calcul des voiles minces...* (Dunod, París, 1935), págs. 177-213.

4. Véanse capítulos V, VI, VII y X del *Tratado de Hidráulica,* de Ph. Forcheimer (trad. Edit. Labor. S, 1935).

5. Precisamente el caso del movimiento de un punto material sobre un paraboloide de eje vertical (elíptico o hiperbólico, pero no de revolución), sometido únicamente a la acción de la gravedad, pero sin velocidad inicial, lo trata como ejemplo, dando la discusión y descripción completa del mismo, una Memoria de M. le Vte. de Salvert, *Sur temploi des lignes géodésiques des surfaces isothermes.*