

PLANOS DE OLAJE EN SEGUNDA APROXIMACION

Por RAMON IRIBARREN CAVANILLES y CASTO NOGALES Y OLANO, Ingenieros de Caminos.

Continúan los autores el estudio de una segunda aproximación del método de los planos de oleaje. En este artículo se estudia la expansión lateral alrededor de un obstáculo, teniendo en cuenta la celeridad de transmisión de la energía, y se expone el proceso de deformación y distorsión de la onda desde profundidades indefinidas hasta la rotura, aclarándose muchos aspectos de este complejo fenómeno.

(Continuación.)

Aun cuando ya se ha indicado anteriormente, conviene insistir en que la determinación del coeficiente de rozamiento Q se ha hecho a base de una sola experimentación en la que, por condiciones particulares, pudiera haber un consumo exagerado de energía, por lo que, con mayor motivo que en la mayoría de los cálculos técnicos y mientras no se disponga de la profusa observación necesaria para afinar este complejo tema, procede, como mínimo margen de seguridad, considerar como pendientes de cálculo, o de manejo de los gráficos, el triple de las pendientes reales del fondo.

Esto equivale a admitir, provisionalmente y mientras no se disponga de dicha profusa observación necesaria, un coeficiente de seguridad, o corrección, de 3 en el coeficiente de rozamiento, que así queda reducido a $Q = \frac{0,04}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L}}$.

III. Expansión lateral. Segunda aproximación (*).

En el estudio de la expansión lateral en primera aproximación se ha admitido legítimamente que, siendo los mismos el período y la profundidad de propa-

(*) Conviene consultar nuestra ponencia sobre la 4.ª Comunicación de la Sección II del XVII Congreso Internacional de Navegación. Lisboa, septiembre de 1949.

gación, la celeridad transversal de transmisión de la energía es igual a la celeridad longitudinal o celeridad de grupo:

$$C_g = \frac{1}{2} C \left(1 + \frac{2\pi \frac{H}{L}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L}} \right),$$

que se reduce a:

$$C_g \approx C;$$

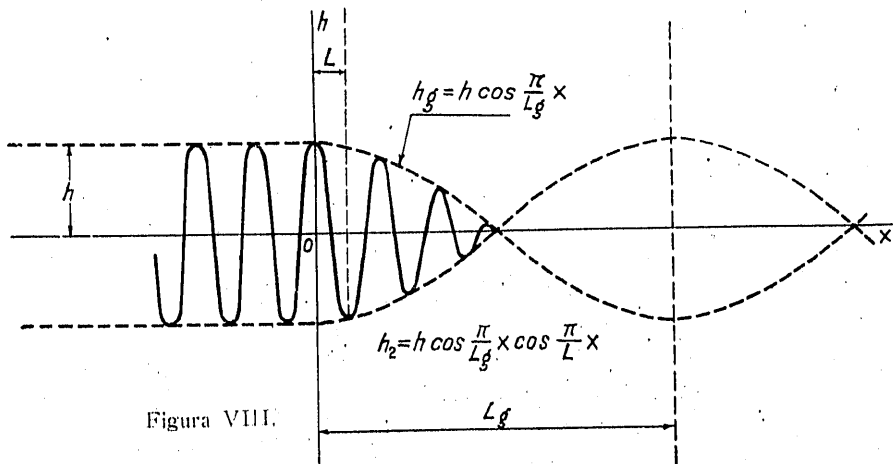
siendo C la celeridad longitudinal de propagación de la onda, en las profundidades relativas reducidas en las que se construyen generalmente los puertos, y a las cuales se refiere la figura 8 de la ponencia, así como los límites correspondientes de las zonas de alimentación, expansión y agitación.

En grandes profundidades se tiene muy aproximadamente:

$$C_g = \frac{1}{2} C,$$

y, por consiguiente, las distancias $B_1 A'_1, B_2 A''_2$, etc., así como las $B_1 B'_1, B_2 B'_2$, etc., que determinan, respectivamente, los límites de las zonas de alimentación y de agitación, se reducen a la mitad.

Siendo conocida la celeridad transversal C_g para



las leyes de variación de las alturas, la expresión de la primera aproximación

$$h_1 = h \cos \frac{\pi}{L} x,$$

que representa mejor esta ley de variación de la energía y que aplicada a las alturas podría englobar un conveniente margen de seguridad, es muy aceptable para la mayoría de las aplicaciones prácticas.

En los demás casos conviene tener en cuenta, además, la expansión lateral secundaria, que produce un ligero movimiento más allá de la línea, quizá impropiamente, pero cómodamente, llamada límite de la zona de agitación.

No se debe olvidar tampoco que los taludes inclinados de la mayor parte de los morros de los diques originan un aumento de la agitación en la zona abrigada por esos diques.

Aunque, por las razones expuestas, no sea recomendable utilizar esta segunda aproximación en el caso de la expansión bilateral, se puede hacer reemplazando los cuartos de cosínusoide por las semicosínusoides correspondientes, pero se desprecia así una parte de la energía, lo que es inexacto y puede ser peligroso.

IV. Deformación y disimetría de la onda.

En la primera aproximación estudiada se ha admitido implícitamente que al disminuir la profundidad de propagación de la onda que avanza en profundidades reducidas $H \ll L_0$ sobre la plataforma costera, aunque las longitudes o, mejor dicho, las celeridades de propagación correspondientes a cada profundidad se adaptan a ella, estas celeridades se supone que son las mismas para dicha profundidad y para todos los puntos de la onda.

Este supuesto, aceptable para la mayoría de las aplicaciones prácticas, lo es menos para algunas de ellas, y en especial cuando la altura de la ola llega a tener relativa importancia con respecto a la profundidad de propagación, en cuyo caso las celeridades son distintas, como a continuación veremos, para cada fase, deformándose la onda en su avance.

Para tener en cuenta, aunque, como siempre, no con utópica exactitud teórica, sino con aceptable aproximación práctica, este curioso e interesante proceso, recordemos las ecuaciones generales del movimiento:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \sin \varphi; \\ z = z_0 - r' \cos \varphi; \end{cases}$$

en las que:

$$\varphi = \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_0}{L} \right);$$

$$r = h \frac{\text{Ch} \pi \frac{H - z_0}{L}}{\text{Sh} \pi \frac{H}{L}}; \quad r' = h \frac{\text{Sh} \pi \frac{H - z_0}{L}}{\text{Sh} \pi \frac{H}{L}};$$

designando por:

x, z = coordenadas de la molécula en cada instante.

x_0, z_0 = coordenadas de su centro orbitario.

r, r' = semiejes horizontal y vertical de la elipse orbitaria de centro x_0, z_0 .

h = semialtura de la ola.

L = semilongitud de la ola.

T = semiperíodo del movimiento.

H = profundidad.

r_s, r'_s, r_f, r'_f = semiejes en la superficie y en el fondo.

En los cálculos de la teoría trocoidal, que no vamos a recordar aquí más que en la parte que interesa (*), se comprueba que, en una primera aproximación, el movimiento es posible y cumple con las condiciones generales de la Hidráulica, o sea las de equilibrio dinámico, continuidad y presión constante en la superficie, siempre que:

$$\frac{\pi^2}{L^2} (r^2 - r'^2) = \left(\frac{\pi r_f}{L} \right)^2 \approx 0,$$

y se determina el valor del semiperíodo, que es:

$$T = \sqrt{\frac{\pi \cdot L \cdot \text{Cth} \pi \frac{H}{L}}{g}} = \sqrt{\frac{\pi}{g} L \cdot K};$$

denominando:

$$K = \text{Cth} \pi \frac{H}{L}.$$

La ecuación general de equilibrio dinámico horizontal es:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_0} = - \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial x_0} + \left(g - \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x_0}.$$

(*) Puede verse el artículo de Saint Venant y Flamant, de los *Annales des Ponts et Chaussées*, de 1888, aunque conviene afinarlo algo en la forma que ya hemos efectuado.

Sustituyendo en ella los valores deducidos de las expresiones anteriores, se obtiene:

$$\frac{1}{\rho \cdot g} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x_0} = \frac{\pi}{L \cdot g T^2} (\pi L r' - g T^2 r'') \operatorname{sen} \varphi - \frac{\pi^3}{L \cdot g T^2} \cdot \operatorname{sen} \varphi \cdot \cos \varphi (r'^2 - r''^2);$$

y, por consiguiente, la condición de presión constante en la superficie, $\frac{\partial p}{\partial x_0} = 0$ para $x_0 = 0$, será:

$$\pi^2 (r'^2_s - r''^2_s) \cos \varphi - \pi L r'_s + g T^2 r''_s = 0;$$

de donde:

$$T^2 = \frac{\pi L}{g} \cdot \frac{r'_s}{r'_s} - \frac{\pi^2}{g} \cdot \frac{r'^2_s - r''^2_s}{r'_s} \cdot \cos \varphi.$$

Como

$$\frac{r'_s}{r'_s} = \operatorname{Cth} \pi \frac{H}{L} = K \quad \text{y} \quad r'^2_s - r''^2_s = r'^2_f;$$

queda:

$$T^2 = \frac{\pi L}{g} \cdot K \left(1 - \frac{\pi}{L} \cdot \frac{r'^2_f}{r'_s} \cdot \cos \varphi \right) = \frac{\pi L}{g} \cdot K \left[1 - \left(\frac{\pi r'_f}{L} \right)^2 \cdot \frac{L}{\pi r'_s} \cdot \cos \varphi \right];$$

o sea:

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{g} \cdot L \cdot K} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi r'_f}{L} \right)^2 \cdot \frac{L}{\pi r'_s} \cdot \cos \varphi};$$

comprobándose que en la primera aproximación, supuesto $\left(\frac{\pi r'_f}{L} \right)^2 \approx 0$, o suficientemente pequeño, el período es:

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{g} L \cdot K},$$

y que en grandes profundidades, siendo $K = 1$ y $r'_f = 0$, el período es:

$$T_0 = \sqrt{\frac{\pi}{g} L}.$$

Si no despreciamos el término $\left(\frac{\pi r'_f}{L} \right)^2$ resulta que

el período que pudiéramos denominar instantáneo, T_i , y que luego interpretaremos, es apenas variable con la fase, correspondiendo un período instantáneo máxi-

mo al paso de la molécula por el seno de la onda; mínimo, al paso de la cresta, e igual al período $2T$ de la primera aproximación cuando la molécula coincide con el nivel medio.

Vamos a interpretar, si no exactamente, repetimos, sí con suficiente aproximación práctica, esta aparente anomalía. Si denominamos M al coeficiente del término oscilante $\cos \rho$, tendremos para la expresión de dicho período instantáneo:

$$T_i = T \sqrt{1 - M \cos \varphi};$$

donde:

$$M = \left(\frac{\pi r'_f}{L} \right)^2 \cdot \frac{L}{\pi r'_s} = \pi \frac{h}{L} \cdot \frac{1}{\operatorname{Sh} \pi \frac{H}{L} \operatorname{Ch} \pi \frac{H}{L}} = \frac{2\pi \frac{H}{L}}{\operatorname{Sh} 2\pi \frac{H}{L}} \times \frac{h}{H} = \frac{\pi H}{L} \left(K - \frac{1}{K} \right) \cdot \frac{h}{H}.$$

Como luego comprobaremos, salvo en la superficie y en el instante de la rotura, M es un número pequeño en relación con la unidad, por lo que el denominado período instantáneo T_i difiere poco del período real T .

Estas pequeñas diferencias entre el denominado período instantáneo y el real modifican poco, local y directamente, las condiciones del movimiento, procediendo tenerlas en cuenta principalmente en esta segunda aproximación por sus efectos acumulados durante el avance de la onda.

Lo que en realidad suponen dichas pequeñas variaciones del período instantáneo es que las velocidades angulares instantáneas

$$\omega_i = \frac{\pi}{T_i}$$

varían también algo, siendo mayores en la cresta que en el seno.

La expresión del período instantáneo, función de la fase, es:

$$T_i = T \sqrt{1 - \frac{2\pi \frac{H}{L}}{\operatorname{Sh} 2\pi \frac{H}{L}} \cdot \frac{h}{H} \cos \varphi}, \quad [1]$$

en la que en realidad L y T , en el caso general de la onda deformada, son L_φ y T_φ , siendo L_φ la longitud del cuadrilátero de avance, o sea la distancia entre los centros orbitarios de fases

$$\varphi - \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \varphi + \frac{\pi}{2}, \quad \text{y} \quad T_\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{g} \cdot L_\varphi \cdot K_\varphi}.$$

La celeridad instantánea será:

$$C_{i\varphi} = \frac{L_\varphi}{T_\varphi \sqrt{1 - \frac{2\pi \frac{H}{L_\varphi}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_\varphi}} \cdot \frac{h_\varphi}{H} \cdot \cos \varphi}} = \frac{C_\varphi}{\sqrt{1 - \frac{2\pi \frac{H}{L_\varphi}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_\varphi}} \cdot \frac{h_\varphi}{H} \cdot \cos \varphi}}$$

o bien:

$$C_{i\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2\pi \frac{H}{L_\varphi}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_\varphi}} \cdot \frac{h_\varphi}{H} \cdot \cos \varphi}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_\varphi}{K_\varphi}} \quad [2]$$

expresión general de la celeridad, y de gran interés.

De ella se deduce que al iniciarse el fenómeno, aun en grandes profundidades, el avance de la cresta, por su mayor celeridad, tiende a ser mayor que el del seno, tendiendo a deformarse la onda al acortarse la semionda anterior, L_A , y alargarse la posterior, L_P . Este acortamiento de L_A con respecto a la L_P daría lugar a que el avance $A_n A_{n+1}$ (véase la fig. XII) del nivel medio anterior sea menor que el avance $P_n P_{n+1}$ del nivel medio posterior, acercándose estos puntos y originando, en definitiva, una disminución de la longitud L_c de la cresta y un aumento de la longitud L_s del seno, hasta que el acortamiento de la primera y el alargamiento de la segunda compensen las diferencias de las celeridades de cresta y seno, y éstas se hagan iguales e iguales a las del nivel medio, volviendo la onda, que tendía a hacerse disimétrica, a ser simétrica, con $L_A = L_P$, pero con $L_c < L_s$.

Esto sucede así en tanto que la celeridad es función de la semilongitud L , pero deja de producirse en pequeñas profundidades, en las que, como sabemos, la celeridad es función únicamente de la profundidad.

En estas pequeñas profundidades, ya el avance de la cresta es siempre mayor que el del seno, acortándose la semionda anterior, que tiende a convertirse más rápidamente en cicloidal, rompiendo la onda cuando llegue su momento, es decir, cuando la distancia L_A entre una cresta y el seno que la precede sea igual a $\pi h K_A$. Otro interesante efecto es que, llegando a ser el avance de un seno S_{Pn+1} mayor que el del seno an-

terior S_{An} que le sigue, las ondas se separan en profundidades reducidas.

De los cálculos efectuados al principio se deduce que si admitimos que el período es constante, $M = 0$, se tiende a producir un período instantáneo algo variable $M = M$, aun siendo M , generalmente, pequeño.

Como consecuencia de esto, parece lógico admitir que el valor real de M esté comprendido entre 0 y M o sea igual a $q \times M$, siendo q un coeficiente comprendido entre 0 y 1.

La determinación de este coeficiente q , como la de numerosos hidráulicos similares, sólo podrá efectuarse debidamente cuando se disponga de los numerosos y detallados datos de observación necesarios, y es muy posible que, al igual que el de Chezy, sea, a su vez, función de los propios datos del problema y en especial de la profundidad relativa o unitaria.

Si, además, denominamos h'_φ a las semialturas, tenida cuenta del consumo de energía, obtenemos la interesantísima fórmula general:

$$C_\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - q \cdot \frac{2\pi \frac{H}{L_\varphi}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_\varphi}} \cdot \frac{h'_\varphi}{H} \cdot \cos \varphi}} \times \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_\varphi}{K_\varphi}} \quad [3]$$

Designando con los subíndices C , S y M las características que se refieren a la cresta, al seno y al nivel medio, las celeridades de estas fases para una profundidad H determinada serán:

$$C_c = \frac{1}{\sqrt{1 - q \cdot \frac{2\pi \frac{H}{L_c}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_c}} \cdot \frac{h'_c}{H}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_c}{K_c}} \quad [4]$$

$$C_s = \frac{1}{\sqrt{1 + q \cdot \frac{2\pi \frac{H}{L_s}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_s}} \cdot \frac{h'_s}{H}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_s}{K_s}} \quad [5]$$

$$C_M = \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_M}{K_M}} \quad [6]$$

En tanto que la celeridad sea función de la longitud, existe, como hemos visto, una onda simétrica estable para cada profundidad, cuyas longitudes de la

cresta y del seno, L_c y L_s , las podemos determinar igualando [4] y [5] a [6], o sea de:

$$\sqrt{\frac{1}{1 - q \frac{2\pi \frac{H}{L_c}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_c}} \cdot \frac{h'_c}{H}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_c}{K_c}} = \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L}{K}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{1 - q \frac{2\pi \frac{H}{L_s}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_s}} \cdot \frac{h'_s}{H}}} \cdot \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_s}{K_s}} = \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L}{K}}$$

expresiones que, una vez simplificadas, y haciendo intervenir las profundidades relativas, se convierten en:

$$K_c \frac{H}{L_c} \left[1 - q \cdot \frac{2\pi \frac{H}{L_c}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_c}} \cdot \frac{h'_c}{H} \right] = K \cdot \frac{H}{L}, \quad [7]$$

$$K_s \frac{H}{L_s} \left[1 - q \cdot \frac{2\pi \frac{H}{L_s}}{\text{Sh } 2\pi \frac{H}{L_s}} \cdot \frac{h'_s}{H} \right] = K \cdot \frac{H}{L}, \quad [8]$$

de cuyas ecuaciones se pueden deducir L_c y L_s conociendo h'_c y h'_s .

El recorrido horizontal hacia adelante de la molécula situada a la profundidad z_0 será, aproximadamente:

$$r_c = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} r \cdot dt;$$

y el recorrido hacia atrás:

$$r_s = \frac{1}{T} \int_{+\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} r \cdot dt.$$

Con coeficiente de aproximación práctica estos recorridos serán:

$$r_c = h'_c \frac{\text{Ch } \pi \frac{H - z_0}{L_c}}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_c}} \quad \text{y} \quad r_s = h'_s \frac{\text{Ch } \pi \frac{H - z_0}{L_s}}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_s}}$$

En la superficie, $z_0 = 0$:

$$r_{sc} = h'_c K_c \quad \text{y} \quad r_{ss} = h'_s K_s$$

En el fondo, $z_0 = H$:

$$r_{fc} = \frac{h'_c}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_c}} \quad \text{y} \quad r_{fs} = \frac{h'_s}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_s}}$$

Para que los recorridos de una molécula hacia adelante y hacia atrás fueran iguales a lo largo de una vertical, sería preciso que:

$$h'_c K_c = h'_s K_s,$$

que sólo se cumple en la primera aproximación, pero no en las ondas deformadas.

Si fueran iguales los recorridos en uno y otro sentido de la molécula superficial, tendríamos:

$$h'_c K_c = h'_s K_s;$$

y los de la molécula del fondo serían:

$$r_{fc} = \frac{h'_c}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_c}} \quad \text{y} \quad r_{fs} = \frac{h'_c}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_c}} \times \frac{\text{Ch } \pi \frac{H}{L_c}}{\text{Ch } \pi \frac{H}{L_s}}$$

Siendo $L_c < L_s$, tendríamos que:

$$\pi \frac{H}{L_c} > \pi \frac{H}{L_s} \quad \text{y} \quad \text{Ch } \pi \frac{H}{L_c} > \text{Ch } \pi \frac{H}{L_s};$$

luego

$$r_{fc} < r_{fs},$$

y, por consiguiente, el recorrido de las moléculas hacia atrás sería mayor que el recorrido hacia adelante, estableciéndose una corriente hacia el mar de intensidad nula en la superficie y máxima en el fondo, en el que la velocidad de dicha corriente sería, aproximadamente y por exceso:

$$\vec{v}_1 = \frac{2(r_{fs} - r_{fc})}{2T} = \frac{h'_c}{T \cdot \text{Sh } \pi \frac{H}{L_c}} \left(\frac{\text{Ch } \pi \frac{H}{L_c}}{\text{Ch } \pi \frac{H}{L_s}} - 1 \right)$$

Si los recorridos iguales fueran los de la molécula del fondo, sería preciso que:

$$\frac{h'_c}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_c}} = \frac{h'_s}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_s}};$$

y los recorridos de la molécula superficial serían:

$$r_{sc} = h'_c K_c \quad \text{y} \quad r_{ss} = h'_c K_c \frac{\text{Ch } \pi \frac{H}{L_s}}{\text{Sh } \pi \frac{H}{L_c}};$$

y en virtud de las desigualdades anteriores:

$$r_{sc} > r_{ss}.$$

La corriente se establecería del mar a tierra, con velocidad nula en el fondo y máxima en la superficie, en la que vale, aproximadamente y por exceso:

$$\vec{v}_2 = \frac{2(r_{sc} - r_{ss})}{2T} = \frac{h'_c}{T \operatorname{Sh} \pi \frac{H}{L_c}} \left(\operatorname{Ch} \pi \frac{H}{L_c} - \operatorname{Ch} \pi \frac{H}{L_s} \right).$$

Comparando ambas velocidades, se tiene:

$$\frac{\overleftarrow{v}_1}{\vec{v}_2} = \frac{1}{\operatorname{Ch} \pi \frac{H}{L_s}} < 1.$$

Para que no exista dicha corriente permanente hacia el mar o hacia la costa es preciso igualar los recorridos de una molécula situada a una profundidad tal que el caudal que se dirige hacia la costa entre la superficie y dicha molécula sea igual al que se dirige hacia el mar entre esta profundidad y el fondo, o sea, aproximadamente:

$$\int_0^z v_2 dz_0 = \int_z^H v_1 dz_0;$$

es decir: :

$$\int_0^z \frac{2(r_c - r_s)}{2T} dz_0 = \int_z^H \frac{2(r_s - r_c)}{2T} dz_0;$$

o sea:

$$\begin{aligned} & \int_0^z (r_c - r_s) dz_0 - \int_z^H (r_s - r_c) dz_0 = \\ & = \int_0^z (r_c - r_s) dz_0 + \int_z^H (r_c - r_s) dz_0 = \\ & = \int_0^H (r_c - r_s) dz_0 = 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo en lugar de r_c y r_s sus valores:

$$\left[\frac{h'_c}{\operatorname{Sh} \pi \frac{H}{L_c}} \times \frac{-L_c}{\pi} \times \operatorname{Sh} \pi \frac{H - z_0}{L_c} - \frac{h'_s}{\operatorname{Sh} \pi \frac{H}{L_s}} \times \right. \\ \left. \times \frac{-L_s}{\pi} \cdot \operatorname{Sh} \pi \frac{H - z_0}{L_s} \right]_0^H = h'_c L_c - h'_s L_s = 0;$$

o sea:

$$h'_c L_c = h'_s L_s. \tag{9}$$

La profundidad z_0 para la cual se verifica la igualdad de los recorridos se deducirá de:

$$h'_c \frac{\operatorname{Ch} \pi \frac{H - z_0}{L_c}}{\operatorname{Sh} \pi \frac{H}{L_c}} = h'_s \frac{\operatorname{Ch} \pi \frac{H - z_0}{L_s}}{\operatorname{Sh} \pi \frac{H}{L_s}}. \tag{10}$$

Los movimientos de las moléculas situadas por encima de esta profundidad serían los representados en la figura X y los de las situadas por debajo los que se indican en la figura XI.

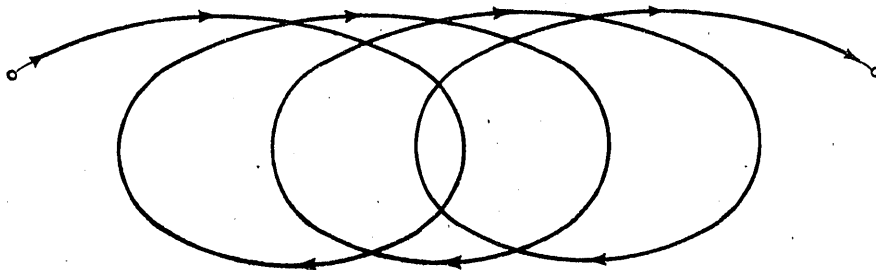


Figura X.

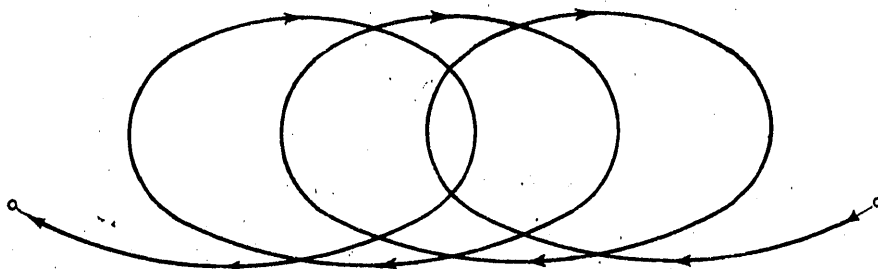


Figura XI.

Como consecuencia de [9] podemos admitir que los productos $h'_{\varphi} \times L_{\varphi}$ son constantes, o sea:

$$h'_c L_c = h'_s L_s = h' L; \quad [11]$$

de donde:

$$h'_c = h' \frac{L}{L_c} \quad \text{y} \quad h'_s = h' \frac{L}{L_s}; \quad [12]$$

y las ecuaciones [7] y [8] se convierten en:

$$K_c \frac{H}{L_c} \left[1 - q \frac{2\pi \frac{H}{L_c}}{\text{Sh} 2\pi \frac{H}{L_c}} \cdot \frac{h'}{H} \cdot \frac{\frac{H}{L_c}}{\frac{H}{L}} \right] = K \cdot \frac{H}{L}; \quad [13]$$

$$K_s \frac{H}{L_s} \left[1 + q \frac{2\pi \frac{H}{L_s}}{\text{Sh} 2\pi \frac{H}{L_s}} \cdot \frac{h'}{H} \cdot \frac{\frac{H}{L_s}}{\frac{H}{L}} \right] = K \cdot \frac{H}{L}, \quad [14]$$

que pueden también escribirse:

$$K_c \frac{H}{L_c} \left[1 - q \frac{\pi H}{L_c} \left(K_c - \frac{1}{K_c} \right) \cdot \frac{h'}{H} \cdot \frac{\frac{H}{L_c}}{\frac{H}{L}} \right] = K \cdot \frac{H}{L}; \quad [15]$$

$$K_s \frac{H}{L_s} \left[1 + q \frac{\pi H}{L_s} \left(K_s - \frac{1}{K_s} \right) \cdot \frac{h'}{H} \cdot \frac{\frac{H}{L_s}}{\frac{H}{L}} \right] = K \cdot \frac{H}{L}. \quad [16]$$

De cualquiera de estos dos pares de ecuaciones, en los que se conocen H, h', L y K , se deducen L_c y L_s , y de las [11], h'_c y h'_s , con los que queda definida la onda simétrica estable y deformada, con $L_c < L_s$, correspondiente a cada profundidad H .

En general, para cualquier profundidad, y en especial para las reducidas profundidades en que comienza la disimetría y la separación de las ondas, se puede aplicar el siguiente procedimiento (fig. XII):

Si consideramos dos ondas consecutivas, n y $n + 1$, las dimensiones de la segunda en función de las de la primera y de los avances de sus diferentes fases son:

$$\left. \begin{aligned} L_{SA(n+1)} &= 2A_{(n+1)} S_{A(n+1)} = 2(A_n S_{An} + S_{An} S_{A(n+1)} - A_n A_{(n+1)}); \\ L_{A(n+1)} &= L_{An} + S_{An} S_{A(n+1)} - C_n C_{(n+1)}; \\ L_{C(n+1)} &= L_{Cn} + A_n A_{(n+1)} - P_n P_{(n+1)}; \\ L_{P(n+1)} &= L_{Pn} + C_n C_{(n+1)} - S_{Pn} S_{P(n+1)}; \\ L_{SP(n+1)} &= 2S_{P(n+1)} P_{(n+1)} = 2(S_{Pn} P_n + P_n P_{(n+1)} - S_{Pn} S_{P(n+1)}); \end{aligned} \right\} [17]$$

y la distancia entre el seno anterior de la onda n y el seno posterior de la que la precede ($n + 1$) será:

$$\begin{aligned} S_{An} S_{P(n+1)} &= S_{Pn} S_{P(n+1)} - (L_{An} + L_{Pn}) = \\ &= S_{A(n-1)} S_{Pn} + S_{Pn} S_{P(n+1)} - S_{A(n-1)} S_{An}. \end{aligned}$$

Las celeridades de las diferentes fases $S_{An}, A_n, C_n, P_n, S_{Pn}$ son:

$$C_{SA n} = \frac{1}{\sqrt{1 + q \frac{2\pi \frac{H_{SA n}}{L_{SA n}}}{\text{Sh} 2\pi \frac{H_{SA n}}{L_{SA n}}} \cdot \frac{h'_{SA n}}{H_{SA n}}}} \times \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_{SA n}}{K_{SA n}}};$$

$$C_{A n} = \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_{A n}}{K_{A n}}};$$

$$C_{C n} = \frac{1}{\sqrt{1 - q \frac{2\pi \frac{H_{C n}}{L_{C n}}}{\text{Sh} 2\pi \frac{H_{C n}}{L_{C n}}} \cdot \frac{h'_{C n}}{H_{C n}}}} \times \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_{C n}}{K_{C n}}};$$

$$C_{P n} = \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_{P n}}{K_{P n}}};$$

$$C_{SP n} = \frac{1}{\sqrt{1 + q \frac{2\pi \frac{H_{SP n}}{L_{SP n}}}{\text{Sh} 2\pi \frac{H_{SP n}}{L_{SP n}}} \cdot \frac{h'_{SP n}}{H_{SP n}}}} \times \sqrt{\frac{g}{\pi} \cdot \frac{L_{SP n}}{K_{SP n}}};$$

Los avances durante un tiempo t serán estas celeridades multiplicadas por t , y en un período $2T$ serán:

$$\left. \begin{aligned} S_{An} S_{A(n+1)} &= C_{SA n} \times 2T; \\ A_n A_{(n+1)} &= C_{A n} \times 2T; \\ C_n C_{(n+1)} &= C_{C n} \times 2T; \\ P_n P_{(n+1)} &= C_{P n} \times 2T; \\ S_{Pn} S_{P(n+1)} &= C_{SP n} \times 2T. \end{aligned} \right\} [19]$$

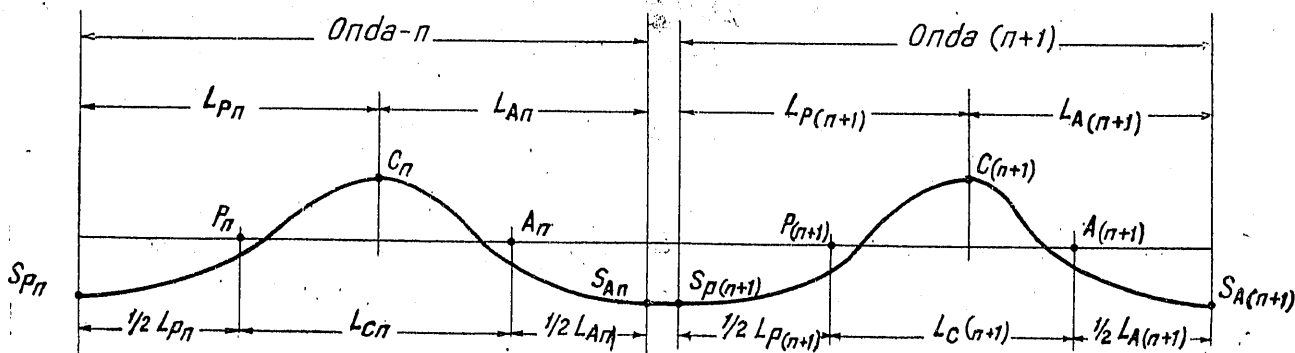


Figura XII.

Las alturas $h'_{C(n+1)}$, $h'_{SP(n+1)}$, $h'_{SA(n+1)}$ las deducimos con la condición:

$$h'_{C(n+1)} \times L_{C(n+1)} = h'_{SP(n+1)} \times L_{SP(n+1)} = h'_{SA(n+1)} \times L_{SA(n+1)} = h' \times L,$$

o sea:

$$\left. \begin{aligned} h'_{C(n+1)} &= h' \times \frac{L}{L_{C(n+1)}}; \\ h'_{SP(n+1)} &= h' \times \frac{L}{L_{SP(n+1)}}; \\ h'_{SA(n+1)} &= h' \times \frac{L}{L_{SA(n+1)}}; \end{aligned} \right\} [20]$$

siendo h' la altura calculada tenida en cuenta del consumo de energía para la profundidad $\frac{H_\phi}{L_0}$ de la fase correspondiente.

Se produce así en las profundidades unitarias reducidas un proceso acelerado de disimetría y acortamiento de la semionda anterior, que origina, a su vez, como anteriormente se ha indicado, la rotura en profundidades mayores que las correspondientes a la rotura de la onda trocoidal simétrica de la primera aproximación.

Esto trae como interesante consecuencia que el rotacional sólo adquiere importancia en la parte superior

de la ola rota, que es donde, precisamente por no poderse cumplir las condiciones teóricas, la ola ha de romper.

Aun en esta misma ola que está rompiendo por su reducida parte superior, el rotacional es insignificante en cuanto profundizamos algo en ella, y la fracción $\frac{\pi r_f}{L}$ es también, generalmente, muy pequeña, lo que

comprueba que los métodos expuestos, e incluso los planos de oleaje, son aplicables también en la zona de rompientes, pues, como se ha indicado, excepto en su extremo superior, que es donde las olas rompen, las condiciones teóricas se cumplen con aceptable grado de aproximación.

Este interesante resultado lo comprueba la observación, pues en las olas que avanzan hacia las playas, y que rompen frecuentemente en unas zonas antes que en otras, no se nota brusca inflexión, en la misma ola, ni discontinuidad alguna en la separación de las zonas rotas con las que aun no rompen.

Las teorías irrotacionales, que, por lo expuesto, pierden interés, no explican ni la forma disimétrica de las ondas ni la tangente vertical de la semionda anterior al romper, que también la observación confirma.

No es necesario insistir en que todo lo expuesto está sujeto a ulteriores afinos y correcciones, así como también para la determinación del coeficiente q es precisa la recopilación de numerosos datos de la observación directa, de los que por ahora no disponemos, a pesar de lo cual esperamos poder determinar su valor, aunque sea provisionalmente, en un próximo artículo.

(Continuará.)