NOTA SOBRE EL ESTUDIO DE ONDAS LARGAS EN AGUAS POCO PROFUNDAS CON EL FONDO EN DECLIVE

Por MIGUEL ANGEL HACAR,
Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor una solución al problema teórico que se reseña en el epígrafe, y hace, finalmente, una comprobación de la misma.

1. Introducción.

Cuando la longitud de onda de las oscilaciones de la superficie de un líquido es mucho mayor que la profundidad del mismo, aparecen las ondas llamadas de marea o también ondas largas en aguas poco profundas. Se presenta esto en las costas, al llegar las olas y las mareas a fondos en declive.

2. Las funciones Bessel.

Es de suma importancia la aplicación de las funciones de Bessel a los problemas de propagación de ondas. Se presentaron por vez primera estas funciones en el estudio analítico del calor. No es preciso señalar el interés que su conocimiento supone para los problemas de cálculo de autoinducción de bobinas, de difracción de ondas (sonoras, luminosas, etc.), de vibraciones en general, etc., etc., por ser de todos conocido. Vamos a limitarnos a exponer un caso de aplicación a cierto movimiento de un flúido perfecto y comprobar los resultados analíticos con los suministrados por la teoría hidrodinámica.

Efectuaremos simplificaciones, despreciando los términos que no tienen importancia. El lector que haga un examen atento, encontrará cosas no bien explicadas; otras, algo forzadas, y hasta desacuerdos en la interpretación correcta de la realidad.

3. Solución.

Despreciaremos las aceleraciones verticales. Llamaremos ζ, la elevación del agua en un punto. Por h,

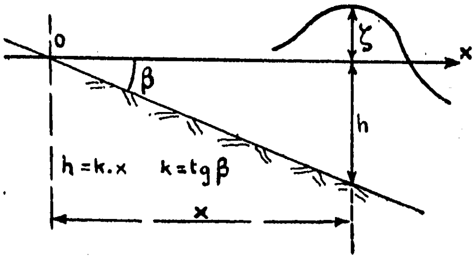

Figura 1.ª

designaremos la profundidad, y por k, el coeficiente angular o pendiente del fondo (fig. 1.ª).

En estas condiciones, y como probaremos al final de este escrito, son posibles ondas de marea del tipo

$$\boxed{\zeta = A\, J_0\left(\frac{2\,p}{\sqrt{k\,g}}\sqrt{x}\right)\cos p\,t} \qquad [*]$$

donde, siguiendo las notaciones de la teoría de funciones, designamos por J_0 la función Bessel de orden cero del paréntesis que le sigue. A, es una constante.

Efectuaremos el cambio de variables:

$$X = \frac{2\,p}{\sqrt{k\,g}}\sqrt{x}$$

y representemos $J_0(X)$ en unos ejes cartesianos rectangulares (fig. 2.ª). En el gráfico se observan como propiedades de esta función que $J_0(0) = 1$, y que la distancia entre dos ceros sucesivos de $J_0(X)$ es casi constante y tiende a valer π cuando X crece indefinidamente.

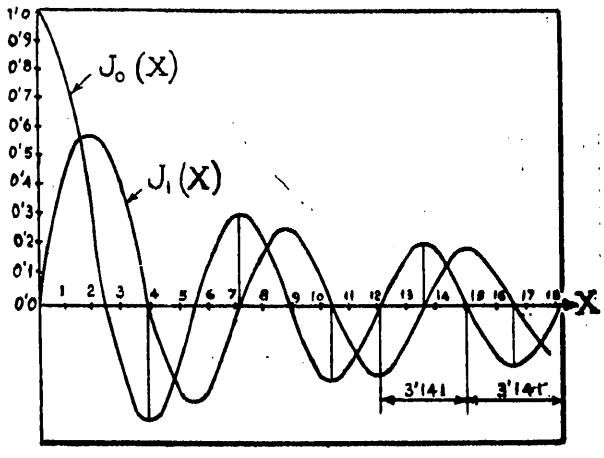

Figura 2.ª

4. Construcción gráfica.

La construcción gráfica siguiente nos permite la representación de

$$J_0\left(\sqrt{\frac{4\,p^2}{k\,g}\,.\,x}\right)$$

y así determinar las amplitudes para cada valor de x.

Dibujada la curva $J_0(X)$ como en la figura 2.ª, y con centro en un punto cualquiera de $O\,X$, trácese una semicircunferencia que pase por O. Con centro en O, trácense arcos de círculo de radios iguales a los valores de $X, a, b, c, d, \ldots,$ que hacen a $J_0(X)$ nulo, máximo o mínimo [se ha dibujado también la función $J_1(X)$ para determinar bien en el dibujo los máximos y mínimos de $J_0(X)$, a causa de la propiedad de ser

$$\frac{d\,J_0(X)}{d\,X} = -J_1(X)].$$

Estos arcos cortarán a la primera semicircunferencia en $a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots$. Trácense verticales en estos puntos que cortarán al eje de abscisas en $a', b', c', d', \ldots$. Estos puntos representan los valores de x correspondientes a los de X indicados por $a, b, c, d, \ldots$. Tomando como ordenadas en $a', b', c', d', \ldots,$ las mismas que en $a, b, c, d,$ obtenemos las amplitudes de la onda.

Las escalas horizontales y verticales no son las mismas. Se determinan inmediatamente, sin más que dar un valor a x y ver el correspondiente de J_0.

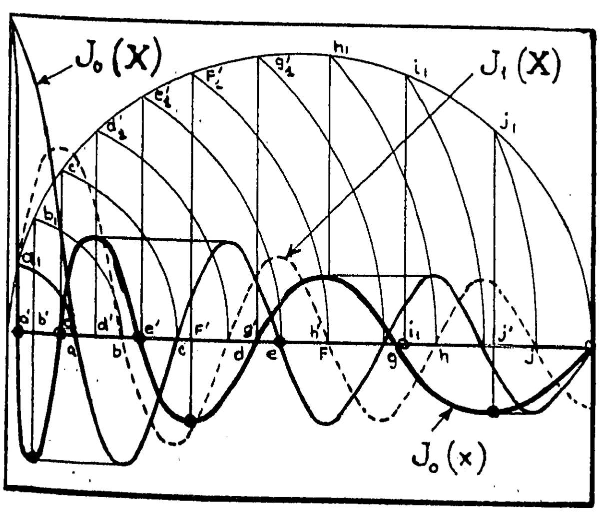

Figura 3.ª

5. Influencia del fondo y la pendiente en la longitud de onda.

La longitud de onda de estas ondas estacionarias aumenta al hacerlo x, o sea que son *más cortas* al acercarse a la orilla. En efecto: según hemos visto, la distancia entre dos nodos en la representación de $J_0(X)$, tiende hacia el valor π. Luego como la diferencia de las raíces cuadradas de las x correspondientes tenderá hacia la constante $\frac{\pi\sqrt{k\,g}}{2\,p}$, al crecer x es preciso que dicha diferencia de x o longitud de onda crezca indefinidamente.

Vemos cómo el fondo influye en la longitud de onda. En realidad, el valor de $\zeta = A\cos p\,t$, correspondiente a $x = 0$, $J_0(0) = 1$ no se alcanza, pues la ola rompe antes.

Los valores de A y p se determinarán experimentalmente y por las condiciones de contorno o en los límites.

6. La ecuación diferencial del perfil.

Por ser ζ igual al producto de una función de Bessel, $J_0(X)$ por un factor $A\cos p\,t$, independiente de X, resulta evidente que $\zeta(X)$ será también solución de la ecuación de Bessel y también de orden cero:

$$\frac{\partial^2 \zeta(X)}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial \zeta(X)}{\partial X} + \zeta(X) = 0. \qquad [1]$$

Como

$$X = \frac{2\,p\sqrt{x}}{\sqrt{k\,g}}, \qquad x = \frac{k\,g}{4\,p^2}\,X^2.$$

Derivando:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial X} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{k\,g}{2\,p^2}\,X = \frac{\sqrt{k\,g\,x}}{p}\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Del mismo modo:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,\frac{\partial^2 x}{\partial X^2} = \frac{k\,g\,x}{p^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{k\,g}{2\,p^2}\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Sustituyendo estos valores en [1], efectuando operaciones y simplificando, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{p^2}{k g x^2}\,\zeta = 0.$$

Por tratarse de ondas largas, $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ es pequeño, y si en la ecuación anterior despreciamos el segundo sumando, queda:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{p^2}{k g x}\,\zeta = 0.} \qquad [2]$$

7. Fórmulas de Euler.

Vamos a probar que precisamente ésta es la relación que debe cumplir la función $\zeta(x)$ al aplicar a la onda las condiciones hidrodinámicas dadas por las ecuaciones de Euler y la ecuación de continuidad, las cuales toman formas muy sencillas.

Si u, v, w son las componentes de la velocidad según los ejes la ecuación de Euler aplicada al movimiento en la dirección del eje $O z$, es:

$$\frac{D w}{D t} = - g - \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z},$$

indicando el primer miembro la derivada total. Como ésta es despreciable, resulta $\frac{\partial p}{\partial z} = - g \rho$ e integrada $p = - \rho g z + \text{const.}$

En la superficie libre $z = \zeta$, y como la presión es constante e igual a la atmosférica, resulta:

$$p = p_0 + \rho g (\zeta - z).$$

Sustituyendo este valor de p en la ecuación de Euler, correspondiente al eje x, resulta:

$$\frac{D u}{D t} = g\,\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

o sea, al desarrollar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} + w\,\frac{\partial u}{\partial z} = - g\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

(no consideramos proyecciones sobre el eje OY por tratarse de movimientos en el plano $y = 0$).

Como u no depende de z por tratarse de ondas de traslación, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$. Como suponemos que la velocidad del flúido es pequeña, podemos despreciar el sumando $u\,\frac{\partial u}{\partial x}$, y la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - g\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}. \qquad [3]$$

8. Condición de continuidad.

Veamos cómo puede expresarse: En la figura 4.ª, el volumen de agua que entra por la cara $A\,B$ en el intervalo $d\,t$ es:

$$V_1 = h\left(u + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial t}\,d t\right) d t.$$

Sale por $C\,D$ en el mismo intervalo de tiempo:

$$V_2 = (h + k\,d x)\left[u + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,d x + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial t}\left(u + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x}\,d x\right) d t\right] d t.$$

El exceso de lo que sale sobre lo que entra es, despreciando infinitésimas de orden superior,

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{2}\left(k x\,\frac{\partial u}{\partial x} + k u\right) d x\, d t.$$

Esta aportación se logra de la disminución del volumen de sobreelevación. ζ en ese tiempo, que vale, teniendo en cuenta que la aceleración vertical es despreciable:

$$V_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\partial \zeta}{\partial t}\,d t + \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\zeta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\,d x\right) d t\right] d x\, d t = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \zeta}{\partial t}\,d t\, d x.$$

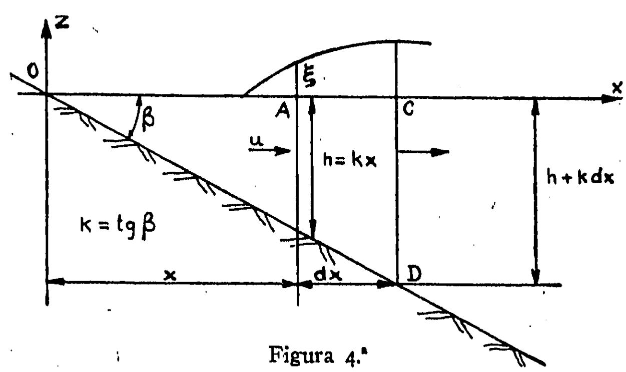

Figura 4.ª

Como

$$V_1+V_2+V'_3=0,$$

se obtiene:

$$kx\frac{\partial u}{\partial x}+ku+\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0. \qquad [4]$$

9. Comprobación de la solución.

Como u es pequeña, el segundo sumando puede despreciarse y queda:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{kx}\frac{\partial \zeta}{\partial t}. \qquad [4']$$

Eliminemos u entre [3] y [4']. Basta para ello derivar, en [3], con respecto a x, y en [4'], con respecto a t, e igualar los segundos miembros. Así queda:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}-\frac{1}{kgx}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=0. \qquad [5]$$

Por tratarse de ondas estacionarias:

$$\zeta(x,t)=\varphi(x)\cdot\psi(t);$$

donde φ y ψ son funciones que sólo dependen, respectivamente, de x y t. Derivando dos veces con respecto a x y otras dos con respecto a t, y sustituyendo en [5], obtenemos:

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}kgx=\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}.$$

Para un valor dado de x, el segundo miembro es una constante, por lo que se deduce que $\psi(t)$ puede ponerse en la forma $\psi(t)=\cos pt$ (prescindimos de factores constantes) y

$$\zeta=\varphi(x)\cdot\cos pt;$$

de donde:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}=-p^2\varphi(x)\cos pt=-p^2\zeta;$$

valor que, sustituído en [5], nos da:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{p^2}{kgx}\zeta=0} \qquad [6]$$

o sea, lo mismo que hallamos en [2], lo que comprueba que

$$\zeta=AJ_0\left(\sqrt{\frac{4p^2x}{kg}}\right)\cos pt$$

es solución, como indicábamos en [*].