

RESUMEN DE LA PUBLICACION N.º 73 DEL LABORATORIO CENTRAL

ESTUDIOS FOTOELÁSTICOS TRIDIMENSIONALES CON MODELOS DE GELATINA

Por CARLOS BENITO y ANSELMO MORENO

Ingeniero de Caminos.

Perito Industrial.

Presentan los autores un resumen de la interesante publicación del Laboratorio Central, que se reseña en el epígrafe, que puede ser de interés para nuestros lectores. Se trata de un nuevo método para fijar las deformaciones en los modelos de gelatina, y se da cuenta al final de una aplicación práctica.

Introducción.

Desde el siglo XVIII en que empiezan a establecerse las bases de la teoría de la Elasticidad hasta nuestros días, se ha publicado un gran número de trabajos técnicos, dirigidos a lograr nuevas aplicaciones de la misma, a problemas mecánicos de construcción. Esta valiosa contribución científica nos permite resolver muchos casos con una precisión suficiente, que no es posible alcanzar por medio de otras teorías más sencillas. De ellos, la inmensa mayoría pertenece a estudios de tensiones o deformaciones planas, y un pequeño grupo, que casi puede contarse con los dedos de las manos, corresponde a los de tres dimensiones.

Para que la cuestión sea atacable matemáticamente, en todos ellos, se impone la necesidad de que las formas de las piezas estudiadas sean geométricamente sencillas, lo que es posible muy pocas veces. Por este motivo, nos vemos obligados, tan a menudo, a recurrir a otras técnicas, como son las analogías mecánicas y eléctricas, los modelos reducidos y, cuando es posible, el ensayo directo de la pieza que se estudia. Este último caso no resulta económico más que para la fabricación en serie, lo que, desgraciadamente, no ocurre con frecuencia en la construcción. Las analogías eléctricas también prestan una ayuda considerable en múltiples ocasiones [1] (*), aunque ofrecen un campo de aplicación bastante restringido, por las complicadas instalaciones que requieren.

Como consecuencia de estas limitaciones, se viene imponiendo día a día la técnica de ensayo en modelo reducido, que va adaptándose a múltiples problemas como fuente de inagotables recursos.

Dentro del campo de los modelos elásticos, y en especial en los de dos dimensiones, de contornos simplemente conexos, destaca por sus propios méritos la

teoría de la Fotoelasticidad, que resuelve prácticamente cualquier problema de las citadas características. No vamos a tratar de descubrir esta rama de la Elasticidad, que nace con los experimentos de Brewster en 1816, y en la que trabajan continuamente multitud de investigadores de renombre universal. Muchos han intentado aplicarla a los estados de equilibrio elástico tridimensional, lo que han logrado, en parte, al resolver algunos casos concretos. Para ello han empleado el procedimiento de congelar las tensiones, que establecieron Solakian y Oppel en 1935 y 1936, respectivamente, operando sobre modelos contruidos con resinas fenólicas, tales como la "baquelita". el "trolon", etc. (*).

Siguiendo por el mismo sendero que ellos han abierto, ofrecemos desde aquí a todos los técnicos la posibilidad de utilizar un material que se adapta, como probaremos con ejemplos, al estudio de los problemas tridimensionales.

NUEVO METODO PARA FIJAR LAS DEFORMACIONES EN LOS MODELOS DE GELATINA

Generalidades.

La utilización de la gelatina como material fotoelástico capaz de acusar las tensiones debidas a fuerzas de masa, es suficientemente conocida en el caso plano, como lo prueban los estudios efectuados por L. Villena en el Laboratorio Central, que se publicaron en 1947 [2], y su eficacia ha sido confirmada con los ensayos realizados hasta la fecha.

(*) En la publicación que estamos resumiendo, se describe el proceso de la congelación de tensiones en las resinas fenólicas, así como los métodos fotoelásticos utilizados por Oppel, Hetenyi, Frocht, etc., y los de observación conoscópica y ortoscópica con microscopio polarizador, debidos a Hiltcher y Giordano.

(*) Los números comprendidos entre [] se refieren a la bibliografía incluida al final.

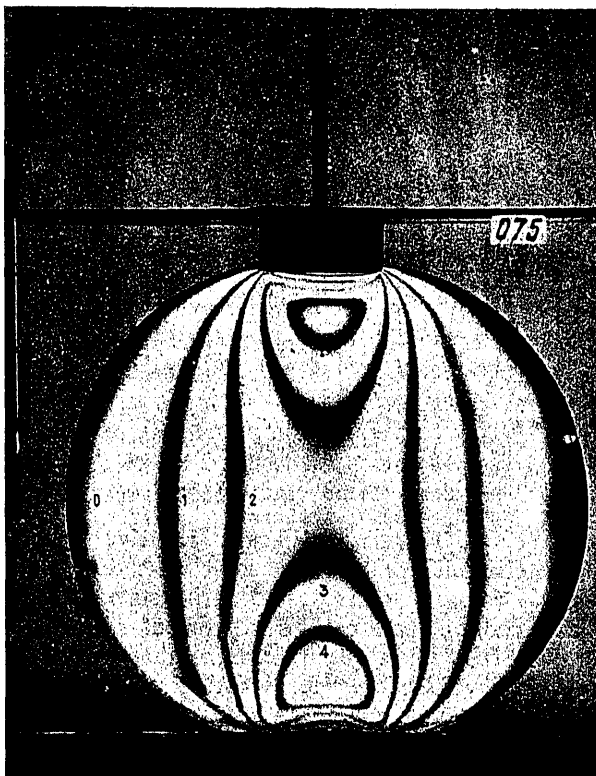


Fig. 1.ª — Disco comprimido a 24° C.

Ante la importancia de los problemas espaciales que se presentan en Ingeniería Civil, en muchos de los cuales intervienen de modo preponderante las tensiones debidas al peso propio, hace tiempo que consideramos la posibilidad de que la gelatina llenase el hueco que existía en estos casos, en la técnica de la Fotoelasticidad tridimensional; y cuya solución, ni siquiera parcial, era posible con los materiales que se emplean corrientemente.

Según nuestro modesto entendimiento, la dificultad más importante con que se tropieza para realizar modelos fotoelásticos complejos en su forma, con las resinas "fenólicas" clásicas, es que una de las dimensiones del bloque en que deben ser tallados, forzosamente tendrá que ser muy pequeña (*), mientras que si la gelatina fuese utilizable, esta dificultad desaparecería completamente.

La cualidad de poderse moldear por vertido, permite la fabricación de cualquier modelo por muy complicada que tenga su configuración externa, siendo factible el realizarlo en un tamaño mayor, ya que el costo de la materia prima resulta pequeño y puede usarse nuevamente por sucesivas refusiones. Al obtenerse un modelo de grandes dimensiones, las rebana-

(*) Por ejemplo, la "baquelita" BT. 61 893, que es la empleada corrientemente en este tipo de ensayos, no se ha logrado fabricar con más de 28 mm. de espesor.

das que se corten del mismo, aunque de mayor espesor que cuando se utilizan la "baquelita" o materiales análogos, resultan más delgadas en relación con el tamaño de aquél.

Pero, si además de esto, intervienen fuerzas de masa, entonces la realización con los materiales clásicos se torna imposible, porque, como indicaba Villena en su publicación antes citada: "La escala de reducción de dimensiones que es necesario adoptar al construir el modelo hace que las fuerzas másicas sean muy pequeñas. Tanto, que quedan muy por debajo del valor correspondiente a la primera isocroma, y no es visible ningún efecto óptico debido a la pequeñez de la birrefringencia accidental producida".

La principal limitación impuesta en este método es la que se refiere a la aplicación de cargas concentradas. El reducido módulo de elasticidad de la gelatina impide la aplicación de éstas sobre la superficie, debido a las grandes deformaciones que se originan, que llegan incluso a producir fenómenos de penetración y, por tanto, de rotura.

Método operatorio.

Durante los ensayos que venimos realizando desde 1947, para estudiar diversas cualidades de las gelatinas fotoelásticas [3], hemos podido comprobar la enorme influencia que ejerce la temperatura en las

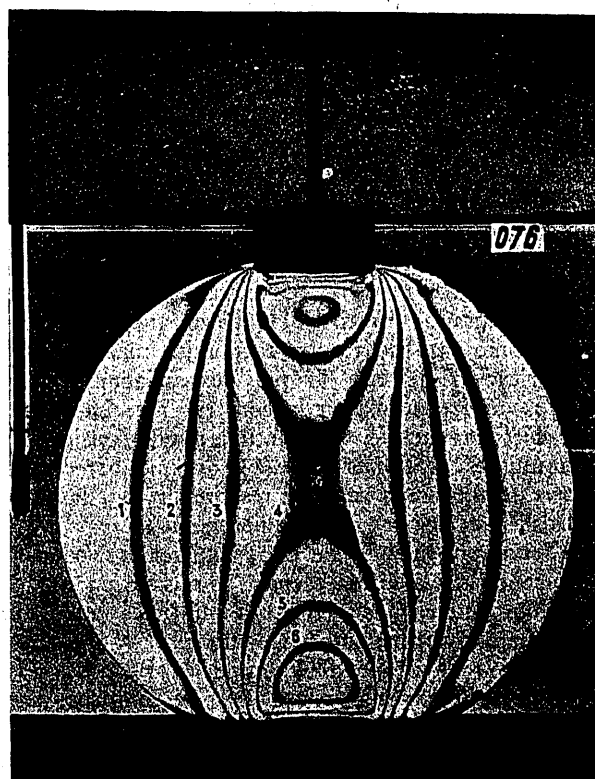


Fig. 2.ª — Disco comprimido a 2° C.

propiedades elásticas y ópticas del material que nos ocupa. El sensible aumento del módulo de elasticidad longitudinal (cerca de 20 veces) que se produce en determinadas gelatinas al descender la temperatura ambiente hasta llegar a 2°C ., nos indujo a imaginar un camino posible para fijar las deformaciones de un modelo cualquiera. El razonamiento que hemos seguido es el siguiente: Un modelo de gelatina a la temperatura ambiente tiene un módulo de elasticidad longitudinal E' . Como consecuencia de su peso propio y de las cargas exteriores que sobre él actúan, se producen unas determinadas deformaciones que representaremos en su conjunto por ϵ' . Si al disminuir la temperatura ambiente, por ejemplo hasta 2°C ., aumentase el módulo de elasticidad hasta E'' sin modificarse de manera sensible los valores de las deformaciones ϵ' , podríamos descargar el modelo (siempre a 2°C .), con lo que se produciría una deformación ϵ'' de signo contrario a la anterior y mucho menor que aquélla, puesto que hemos supuesto que E'' era mucho mayor que E' . Descargado el modelo y fijas la mayor parte de las deformaciones iniciales, se puede cortar en rebanadas o paralelepípedos, a los que son aplicables cualesquiera de los métodos utilizados en la fotoelasticidad tridimensional para determinar las tensiones.

Con el fin de comprobar esta idea, hemos realiza-

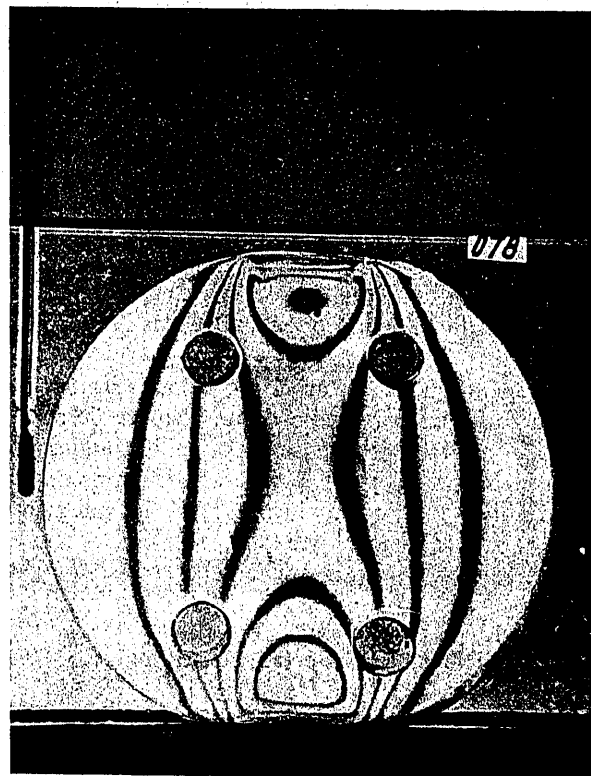


Fig. 4.ª — Disco taladrado a 2°C .

do multitud de experimentos con resultados francamente halagüeños, por lo que describimos uno a continuación:

Un disco de gelatina de 15 cm. de diámetro y 3 cm. de espesor, fué sometido a 24°C . y en toda su anchura a la acción de dos fuerzas diametrales opuestas, con lo que obtuvimos un estado de tensión plana, y una distribución de isocromas (fig. 1.ª) en todo análoga a la representada en múltiples tratados de Fotoelasticidad. Para evitar las influencias de la variación de la humedad del ambiente y del peso propio del modelo, había sido sumergido el disco dentro de un líquido con igual densidad e índice de refracción que la gelatina empleada, en el interior de un baño con paredes de cristal neutro (exento de tensiones). A continuación, se hizo disminuir la temperatura ambiente hasta 2°C . (*), observándose (fig. 2.ª) que había aumentado ligeramente la deformación del conjunto, debido a la plasticidad del material (**), al tiempo que se incrementaba el valor del orden isocromático de todos sus puntos, sin alterarse la distribución de las isocromas.

Pasado algún tiempo y siempre a 2°C ., se retiraron las cargas exteriores (fig. 3.ª), por lo que el

(*) Para lograrlo, operamos dentro de una habitación frigorífica, en la que están el polariscopio, el modelo y los observadores, protegidos con trajes especiales.

(**) Posteriormente se tratará el fenómeno plástico.

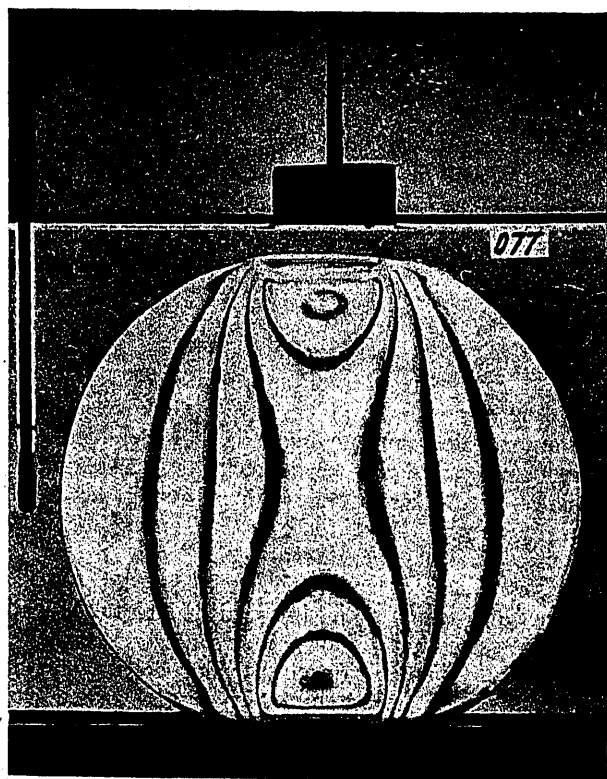


Fig. 3.ª — Disco descargado a 2°C .

disco recobró en una parte muy pequeña su forma primitiva, fijando el resto de la deformación y con ella sus isocromas, semejantes a las de la figura anterior.

Confirmadas nuestras suposiciones, el resto del ensayo no es más que una justificación evidente, y un tanto espectacular, del procedimiento. Para ello, taladramos el disco en cuatro sitios distintos (fig. 4.^a), sin que por ello variase la forma de las isocromas. Se obtendría el mismo resultado si, en vez de eso, hubiéramos cortado el cilindro en rebanadas o paralelepípedos.

La operación de cortar el modelo se efectúa con relativa facilidad por medio de un alambre de acero, muy fino y atirantado, que se apoya en unas guías que tienen la forma del perfil previsto. Los trozos se observan en el polariscopio sin necesidad del pulimento ni mecanizado alguno y, por tanto, se evita la presencia de tensiones parásitas debidas a estas operaciones.

Plasticidad de las gelatinas.

Como expusimos en nuestro anterior trabajo [3], al comprimir una probeta cilíndrica de gelatina a carga constante, se produce una deformación instantánea que va aumentando con el tiempo, pero con ritmo decreciente, hasta que cesa. Por tanto, el diagrama deformación-tiempo a tensión constante es de la forma indicada en la fig. 5.^a, en donde *OA* es la parte considerada como elástica, y *AB* la plástica. A pesar de esta dificultad, se ha continuado empleando el citado material porque hemos comprobado (véase la publicación que resumimos), que, en cada momento, la relación entre una tensión cualquiera y la deformación total producida, era constante. Gracias a esta propiedad, son aplicables las teorías de la Elasticidad o de la Resistencia de Materiales, pues aunque se produzcan corrimientos plásticos, lo único a considerar

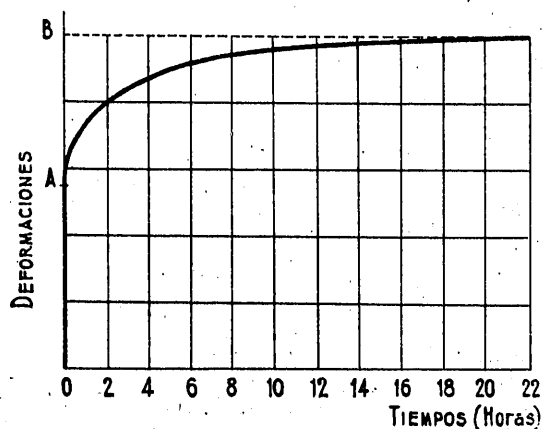


Fig. 5.^a — Diagrama deformación-tiempo de una gelatina.

es que el valor del módulo de elasticidad disminuye con el tiempo, hasta alcanzar un valor estable, pero este proceso es independiente de las tensiones originadas.

Aclarado esto, volvemos al estudio del fenómeno observado al pasar de la fig. 1.^a a la 2.^a. Como describíamos entonces: Se enfriaba el modelo cargado a 24° C., hasta llegar a los 2° C., pudiéndose ver que había aumentado la deformación primitiva y el valor del orden isocromático de cada punto.

Ya hemos indicado que la deformación instantánea se incrementaba por plasticidad, pero, ¿el aumento del orden isocromático era producido por el fenómeno plástico, por que variara la constante de franja del material con la temperatura, o por ambas causas a la vez? Realizar la experimentación adecuada para esclarecer esta pregunta es cosa sencilla, puesto que los dos motivos apuntados se pueden separar y, por tanto, estudiar sus efectos sin que se interfieran. Para ello, hemos realizado muchos ensayos con resultados concordantes, de los que detallamos uno a continuación:

Construída una viga recta de 10 × 3 cm. de sección y 28 cm. de longitud, fué apoyada en dos puntos, mientras que en otros dos se aplicaban cargas verticales iguales entre sí y constantes. Los apoyos estaban fijos, y se midieron los corrimientos verticales de los puntos de aplicación de las fuerzas, con un error menor de 0,01 mm. Al cargar la viga, que estaba situada entre los polaroides del banco fotoelástico, se observaron las isocromas de la fig. 6.^a, *a*, y las indicaciones del flexímetro que medía los corrimientos verticales. Transcurridas 1, 3, 6, 22 y 24 horas, se fueron sacando fotografías de la viga y anotando las flechas. El diagrama corrimientos-tiempo era en todo análogo al de la fig. 5.^a y probaba que a las 22 horas se había terminado el período plástico y alcanzado, por tanto, el equilibrio. Comparando las fotografías obtenidas después de los lapsos de tiempo indicados, observamos que hasta llegar a la fig. 6.^a, *b*, que corresponde a la de 22 horas, el orden isocromático había aumentado simultáneamente con las deformaciones plásticas, y al cesar éstas, se conservaba constante. Como durante la realización del ensayo la temperatura ambiente permaneció, sin alteraciones sensibles, a 22° C., se puede deducir que las deformaciones plásticas aumentan el valor del orden isocromático en todos los puntos del modelo.

La conclusión sacada concuerda con los resultados mecánicos que expusimos al principio de este apartado, pues si las deformaciones plásticas vienen a producir una disminución en el valor del módulo de elasticidad del material, es lógico que el orden isocromático aumente, ya que las deformaciones serán mayores, y éstas, como indica Oppel [4], son la verdadera causa de la birrefringencia cuando los demás factores permanecen constantes.

Terminada esta primera parte del ensayo, estudiamos la posible influencia de la variación de la constante de franja del material al descender la temperatura.

Para ello utilizamos la misma viga que llevaba cargada veinticuatro horas y en la que ya habían cesado los fenómenos plásticos, y, sin descargarla, se hizo descender la temperatura de la cámara de ensayo hasta 2° C., no observándose variación alguna en la distribución de las isocromas (*). Durante el enfriamiento, el módulo de elasticidad había aumentado, pero las deformaciones no variaron, por tanto, de la ecuación fundamental de la fotoelasticidad en deformaciones:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{nf}{Ee} (1 + \nu), \quad [1]$$

obtenemos que si el primer miembro, n , ν y e permanecieron sensiblemente constantes, al aumentar E también debe aumentar f .

Como consecuencia de los ensayos expuestos, se deduce la importancia que tiene el conocer las variaciones del valor de la constante de franja y del módulo de elasticidad del material, al aumentar o disminuir la temperatura. Como la gelatina empleada puede

(*) No incluimos la fotografía correspondiente porque resultaría igual a la figura 6.^a b.

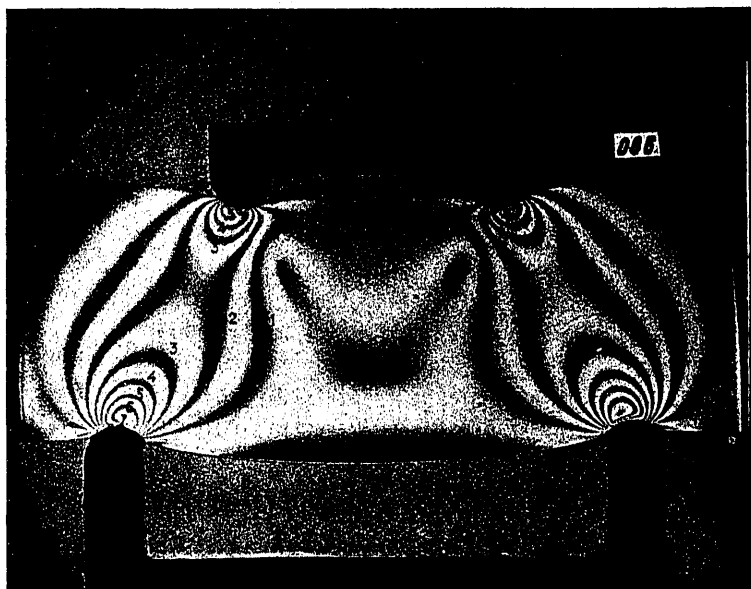


Fig. 6.^a b. — Ensayo de plasticidad.

moldearse con diferentes concentraciones, y a veces, además de agua interesa que lleve glicerina, hemos estimado oportuno estudiar la influencia de estos factores, lo que se hace en la publicación original.

De todos los ensayos realizados sacamos que el módulo de elasticidad se acrecienta al disminuir la temperatura. Entre gelatinas de la misma concentración, el mayor valor corresponde al líquido con mayor cantidad de glicerina; y entre mezclas de igual proporción glicerina-agua, el incremento crece con la concentración de gelatina.

En cuanto a las variaciones de la constante de franja, en todos los casos aumenta al descender la temperatura. En las mezclas de igual concentración de gelatina, las constantes de franja correspondientes son mayores cuanto más glicerina se ha utilizado, y para una proporción glicerina-agua, al disminuir la concentración (a temperatura constante), las constantes de franja también disminuyen.

Con el fin de obtener la máxima precisión posible en los resultados experimentales, es necesario elegir entre todas las gelatinas ensayadas aquella cuyas características se adapten mejor al proceso seguido para fijar las deformaciones. Por esto, deducimos a continuación la fórmula que las relaciona con las constantes elásticas y fotoelásticas del material utilizado.

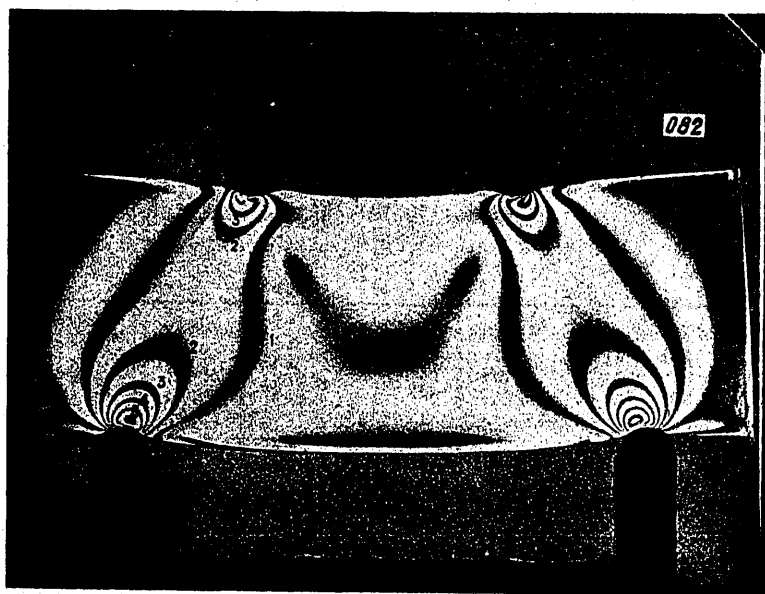


Fig. 6.^a a. — Ensayo de plasticidad.

Condiciones analíticas fundamentales.

Para deducirlas, vamos a seguir, paso a paso, el proceso de aplicación del método.

Supongamos un modelo de gelatina, de espesor e , que se carga a la temperatura ambiente t' y cuya constante de franja es f' . En un punto determinado del modelo, se produce una diferencia de tensiones principales $\sigma_1 - \sigma_2$, que corresponde a un orden isocromático n' , según la ecuación fundamental:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n' f'}{e} \quad [2]$$

Si hacemos descender la temperatura hasta t'' , la constante de franja valdrá $f'' > f'$, pero el coeficiente de Poisson, las tensiones y las deformaciones permanecen constantes. Al retirar las cargas, en el punto considerado desaparece un orden isocromático n'' , que corresponde a la misma diferencia de tensiones principales, pero de signo contrario. Por tanto, podemos escribir:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = - \frac{n' f''}{e} \quad [3]$$

El efecto fotoelástico fijado es el resultado de estos dos procesos y el orden isocromático retenido n será la diferencia entre los dos anteriores. O sea:

$$n = n' - n'' \quad [4]$$

Sustituyendo n' y n'' por sus valores deducidos de las fórmulas [2] y [3], se llega a:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n f''}{e \left(\frac{f''}{f'} - 1 \right)} \quad [5]$$

que une la diferencia de las tensiones principales con las características fotoelásticas del material del modelo a las temperaturas inicial y final del proceso (*).

(*) El razonamiento precedente se ha basado en las tensiones principales, pero es obvio que lo mismo se puede decir de las tensiones principales de segundo orden.

En Fotoelasticidad plana se juzgan las características de un material por medio de un parámetro, que los especialistas americanos llaman *figure of merit*, y que nosotros denominaremos "coeficiente de aptitud", y cuya expresión es el resultado de dividir el módulo elástico por la constante de franja:

$$Q = \frac{E}{f} \quad [6]$$

Por un camino parecido y partiendo de la fórmula [5] vamos a establecer el "coeficiente de fijación", que reflejará la aptitud de las diferentes clases de gelatinas, para ser utilizadas en el procedimiento que nos ocupa. De la citada fórmula se deduce que:

$$n = (\sigma_1 - \sigma_2) \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{f''} \right) e, \quad [7]$$

en la que sustituyendo las tensiones por las deformaciones se llega a:

$$n = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) e}{1 + \nu} E' \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{f''} \right) \quad [8]$$

Con análogas consideraciones a las efectuadas en el caso plano, podemos expresar el "coeficiente de fijación" en la forma:

$$Q_f = E' \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{f''} \right), \quad [9]$$

en la cual las condiciones óptimas son:

- Módulo de elasticidad a temperatura inicial muy elevada.
- Valor de franja inicial mínimo.
- Valor de franja final máximo.

Los resultados obtenidos en los ensayos precedentes nos permiten calcular el siguiente cuadro, en el que se incluyen los valores de Q_f que corresponden a las diversas composiciones estudiadas:

Concentración — %	Glicerina — agua	Módulo de elasticidad a 2° C. E_2 gr./cm. ²	Módulo de elasticidad a 20° C. E_{20} gr./cm. ²	Constante de franja a 2° C. f_2 gr./cm. ² /fr./cm.	Constante de franja a 20° C. f_{20} gr./cm. ² /fr./cm.	Coeficiente de aptitud a 2° C. Q_2	Coeficiente de aptitud a 20° C. Q_{20}	Coeficiente de fijación Q_f
20	0	1.050	102	31	21	34	5	1,6
35	0	3.800	580	63	28	60	21	11,6
20	0,5	1.650	450	61	33	27	14	6,3
35	0,5	4.350	1.300	107	49	40	27	14,6
20	1	1.700	575	74	47	23	12	4,6
35	1	4.750	1.800	128	70	37	26	10,8

Del examen del cuadro precedente podemos determinar que la gelatina más apropiada para su empleo

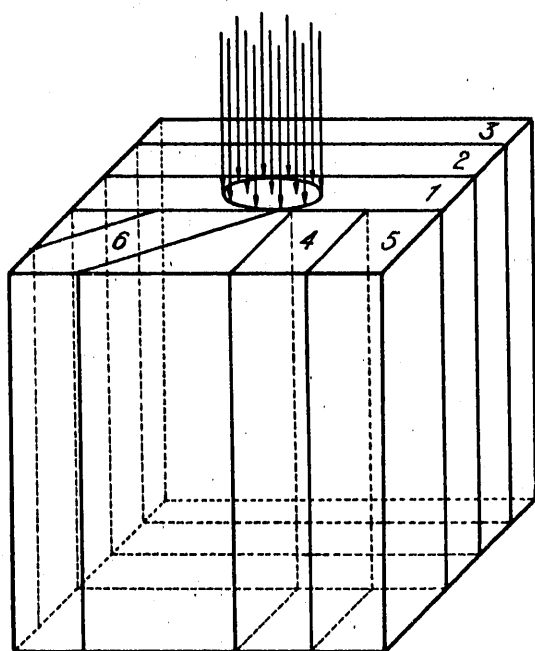


Fig. 7.ª — Distribución de los cortes.

en modelos tridimensionales por el método descrito para fijar las deformaciones, es la del 35 por 100 de concentración, con una relación $\frac{\text{glicerina}}{\text{agua}}$ igual a 0,5.

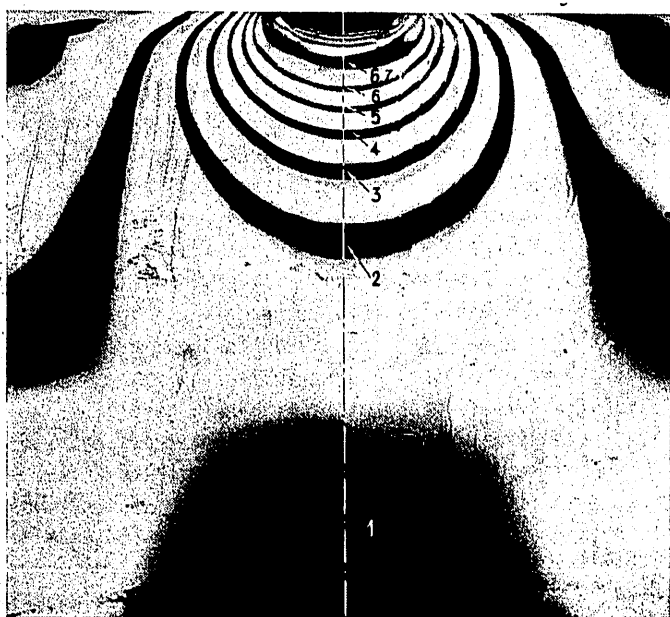


Fig. 8.ª — Isocromas de la rebanada 1 y valores teóricos y experimentales de τ_{\max} en el eje.

Aplicación práctica.

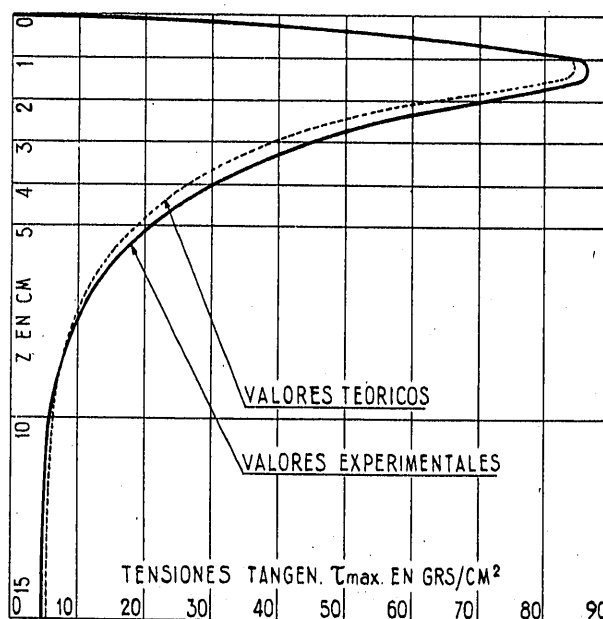
Con el fin de comprobar la precisión del procedimiento, estudiamos un problema analíticamente resuelto, para, de esta manera, poder comparar las conclusiones experimentales con las deducidas del cálculo.

Se trata de conocer los valores de las máximas tensiones tangenciales en el eje de un macizo elástico semiindefinido, cargado uniformemente en una zona circular de su superficie. La fórmula que da los valores de τ_{\max} figura en múltiples tratados de Elasticidad; nosotros la tomamos de la página 398 del libro de Timoshenko antes citado:

$$\tau_{\max} = \frac{p}{2} \left[\frac{1-2\nu}{2} + (1+\nu) \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{3}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right)^3 \right] \quad [10]$$

en donde a es el radio del círculo de la superficie cargada, y z la profundidad del punto considerado.

Para representar el macizo utilizamos un cubo de 15 cm. de arista, de gelatina al 35 por 100 de concentración y con una relación glicerina-agua = 0,5. La carga, de 225 gr./cm.², fué aplicada sobre un círculo central (fig. 7.ª) y después de veinticuatro horas, se enfrió el modelo hasta llegar a una temperatura de 2° C. A continuación se retiraron las cargas y se cortó



el bloque en rebanadas en la forma indicada en la figura 7.^a, observándose que la distribución de las tensiones era simétrica, como lo prueba la fotografía de la fig. 8.^a, en la que se incluye el eje de simetría objeto de nuestro estudio.

Conocidos el valor de la constante de franja del modelo y el espesor de la lámina observada, se han calculado los valores de $\tau_{\text{máx}}$ deducidos del ensayo descrito, y partiendo de la fórmula [10] los teóricos. Ambos se comparan en el diagrama de la fig. 8.^a, en el que se aprecia que la máxima tensión tangencial teórica es de 84 gr./cm.², y la experimental, de 87 gr./cm.², lo que equivale a un error menor del 4 por 100; buena prueba de la precisión del método.

Conclusiones.

Como resumen del presente trabajo exponemos a continuación sus principales ventajas:

1.^a Permite estudiar modelos en que intervengan fuerzas de masa.

2.^a No presenta limitaciones en cuanto a la forma y dimensiones de los modelos.

3.^a No se producen tensiones parásitas, como consecuencia de las operaciones de mecanizado o recortado, porque no es necesario realizarlas.

4.^a Facilidad de cortar el material según la forma deseada.

5.^a Bajo coste del material y de la instalación.

No queremos silenciar que la principal dificultad encontrada estriba en el tamaño de las deformaciones que se producen, aunque puede soslayarse dando al modelo la configuración conveniente, para que, después de cargado, se produzca el equilibrio con la forma y dimensiones deseadas.

Bibliografía.

1. *Sobre la teoría general de las analogías electromecánicas y su aplicación a los problemas elásticos tridimensionales*, por V. de Castro. Publicación núm. 71 del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción. Madrid, 1950.
2. *Sobre las posibilidades de la fotoclasticidad en el estudio de las estructuras en que intervengan fuerzas máscas*, por L. Villena. Publicación núm. 44 del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción. Madrid, 1947.
3. *Estudio de gelatinas para modelos fotoelásticos*, por A. Moreno. Publicación núm. 58 del Laboratorio Central de Ensayo de Materiales de Construcción. Madrid, 1947.
7. "Polarisationsoptische Untersuchung räumlicher Spannungs und Dehnungszustände", por G. Oepel. *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, vol. 7, núm. 5, 1936.