

PLACAS CIRCULARES REFORZADAS CON ANILLOS

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ,
Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor un estudio muy completo del cálculo de los elementos que se reseñan en el título, partiendo de las ecuaciones generales y haciendo luego aplicación a distintos tipos de placa y de refuerzo.

Introducción.

Las placas circulares son elementos estructurales empleados con gran profusión, tanto en la construcción (losas de hormigón armado) como en fondos de depósitos o tanques sometidos a presión, en cascos de buques o submarinos (escotillas), en compuertas de inspección de calderas o tuberías, etc.

Interesa en muchos casos reducir la deformación o flecha máxima que puedan aquéllas alcanzar, y, sobre todo, disminuir también las cargas o fatigas máximas de trabajo de dichas placas.

Se consigue esto generalmente dando los espesores adecuados. Pero resultan así, a veces, elementos muy pesados que o son difíciles de manejar o sólo en soportar su peso propio alcanzan grandes fatigas.

Reforzando las placas circulares con anillos concéntricos puede lograrse, sin variar su espesor, disminuir las flechas y las cargas de trabajo del material. Además, así se conserva la simetría cilíndrica de la placa, con lo que las ecuaciones de la Elasticidad se simplifican notablemente.

Supondremos que las deformaciones son pequeñas comparadas con el espesor y que el material cumple la ley de Hooke. Despreciaremos el efecto del esfuerzo cortante en la deformación, lo cual es admisible si el espesor de la placa es pequeño comparado con su radio.

Ecuaciones generales.

Partimos de la clásica ecuación diferencial general de tercer orden de las placas circulares de espesor uniforme, h , que da el desplazamiento o flecha ω de cada punto en función del radio r y de la distribución radial de intensidad de cargas, p , que suponemos es sólo función de r (simetría radial o cilíndrica).

Según se demuestra (véase la primera obra de Timoshenko citada en la bibliografía) es:

$$-\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D}; \quad [1]$$

escribiendo $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$; D es la llamada rigidez de flexión de la placa; μ es el coeficiente de Poisson (que tomaremos igual a $1/3$ en nuestros cálculos).

Q es el esfuerzo cortante en el punto que se deduce de:

$$Q \cdot 2\pi r = \int_0^r p 2\pi r dr. \quad [2]$$

Integrando tres veces [1] se obtiene al tener en cuenta [2], y que p es exclusivamente función de r :

$$\begin{aligned} \omega = -\frac{1}{D} \int \left[\frac{1}{r} \int \left[r \int \left[\frac{1}{r} \int_0^r p r dr \right] dr \right] dr \right] dr + \\ + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + c_3. \end{aligned} \quad [3]$$

Siendo el logaritmo neperiano, c_1 , c_2 , c_3 son las constantes de integración que dependen de las condiciones de contorno.

La ecuación [3] nos resuelve el problema en el caso general. Vamos a hacer aplicación de ella a los casos en que p es constante en toda ella (la sustentación será por el borde exterior, pues si no, para calcular Q hay que tener en cuenta las reacciones exteriores, como ocurre en varios casos particulares de los tres últimos apartados de este escrito).

La integral múltiple del segundo miembro de [3] es entonces inmediata, valiendo $-\frac{pr^4}{64D}$; así queda:

$$\omega = -\frac{pr^4}{64D} + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + c_3. \quad [3']$$

La inclinación de la tangente a la curva meridiana (o del plano tangente) con respecto a la horizontal valdrá:

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{pr^3}{16D} + c_1 \frac{r}{2} + \frac{c_2}{r}. \quad [4]$$

Los momentos radiales y tangenciales (por unidad de longitud de arco y radio respectivamente) valen, como sabemos:

$$M_r = D \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right]. \quad [5]$$

$$M_t = D \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right]. \quad [5']$$

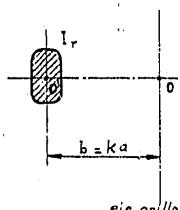
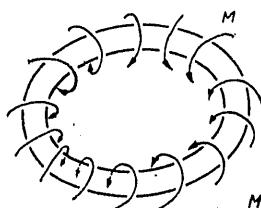
Las cargas de trabajo σ_r , σ_t , radiales y tangenciales de elementos que distan y del plano neutro de la placa son:

$$\sigma_r = \frac{M_r}{\frac{1}{12} h^3 : y} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \frac{dw}{dr} \right] y. \quad [6]$$

$$\sigma_t = \frac{M_t}{\frac{1}{12} h^3 : y} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \mu \frac{d^2 w}{dr^2} \right] y. \quad [6']$$

Anillo sometido a torsión uniforme.

Consideremos ahora un anillo de radio b y cuyo momento de inercia de la sección transversal (o meridiana) con respecto al eje de simetría *en el plano del anillo* designamos por I_r . Si suponemos que dicho anillo está sometido a torsión producida por pares o momentos distribuidos uniformemente a lo largo de la línea central del anillo, y cuyo valor es M , por unidad de longitud de arco, girarán todas sus secciones



M es momento por unidad de longitud de la linea media del anillo.

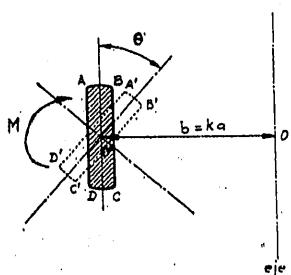


Fig. 1.^a — Ángulo que gira el anillo: $\theta = \frac{M b^2}{E I}$ (ecuación [7]).

$I = I_r$, momento de inercia de la sección transversal $ABCD$ del anillo, con respecto al eje principal de inercia $O O'$.

transversales un mismo ángulo θ , cuyo valor es fácil probar que está dado por (fig. 1.^a):

$$\theta = \frac{M b^2}{E I}. \quad [7]$$

de donde:

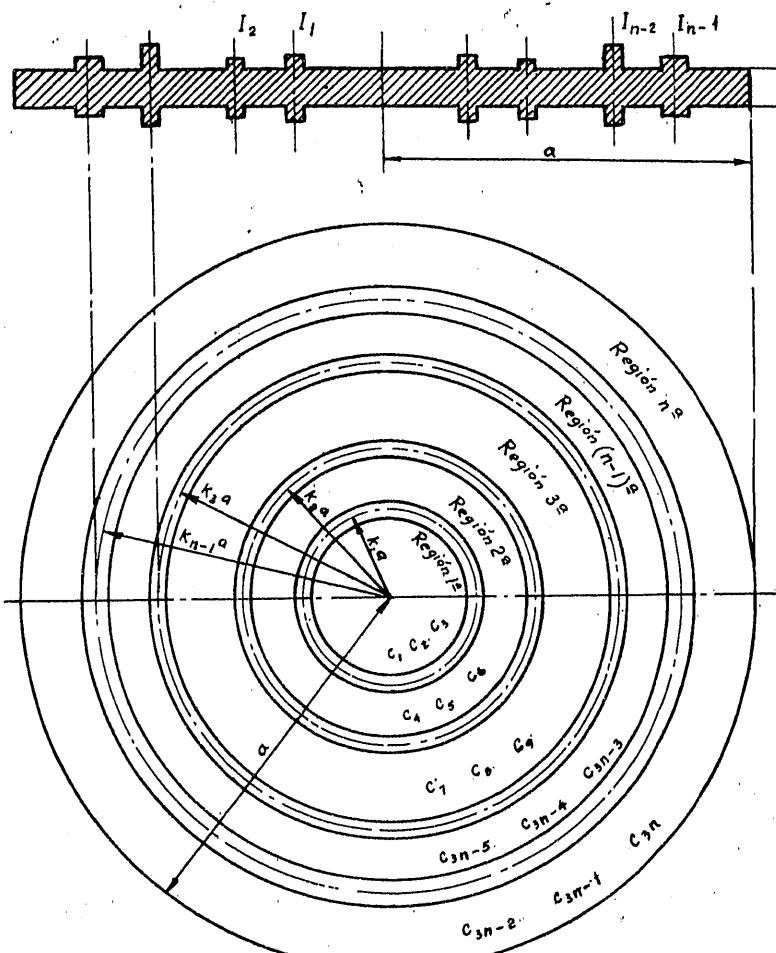
$$M = \frac{E I}{b^2} \theta. \quad [7']$$

Placas de varios anillos sustentadas en su borde.

Con esto veremos queda determinado completamente nuestro problema.

Sea una placa con $n - 1$ anillos (fig. 2.^a) que numeraremos en orden creciente de diámetros. El contorno exterior de la placa podrá estar empotrado o apoyado. Estudiaremos luego separadamente estas dos cosas.

Sección meridiana



PLANTA

Fig. 2.^a — Placa con $n - 1$ anillos c_1, c_2, \dots, c_n , constantes de integración de las n regiones ($n = 5$) (ecuaciones [10]).

Se podrán establecer tantas ecuaciones [3'] (con diferentes constantes de integración para cada una) como regiones o coronas circulares de placa hay separadas por anillos, o sea n ecuaciones.

Sea a el radio exterior de la placa. Y el radio de cada anillo:

$$b_i = k_i \text{ and } (0 \leq k_i \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, n-1). \quad [8]$$

Cada uno tiene un I que indicaremos respectivamente por I_i .

Las n ecuaciones [3'] serán:

o bien, más concisamente:

$$\omega_{(i)} = -\frac{pr^4}{64D} + c_{3i-2} \frac{r^3}{4} + c_{3i-1} \log \frac{r}{a} + \\ + c_3 i \dots (k_{i-1} a \leq r \leq k_i a); \quad [9']$$

siendo:

$$i = 1, 2, \dots, n (k_n = 1).$$

En resumen, tenemos que hallar las $3n$ constantes:

$$c_1, c_2, c_3; \quad c_4, c_5, c_6; \dots \quad c_{3n-2}, c_{3n-1}, c_{3n},$$

por las condiciones en los límites de cada una de las n coronas circulares en que queda dividida la placa.

El sistema de ecuaciones lineales entre dichas constantes que resuelve por completo nuestro problema, es para lá

PLACA EMPOTRADA.

$$\left[\frac{d\omega_{(i)}}{dr} \right]_{r=0} = 0; \quad [10, a]$$

$$\left[\frac{d\omega_{(n)}}{dr} \right]_{r=a} = 0; \quad [10, b]$$

$$[\omega_{(n)}]_{r=a} = 0; \quad [10, c]$$

$$\left[\frac{d\omega_{(l)}}{dr} \right]_{r=k_l, a} = \left[\frac{d\omega_{(l+1)}}{dr} \right]_{r=k_l, a}; \quad [10, d]$$

$$[\omega_{(l)}]_{r=k_l-a} = [\omega_{(l+1)}]_{r=k_l-a}; \quad [10, e]$$

$$[M r_{(i+1)}]_{r=k_i a} - [M r_{(l)}]_{r=k_i a} = \\ = \frac{E I_i}{(k_i a)^3} \left[\frac{d \omega_{(l)}}{d r} \right]_{r=k_i a}. \quad [10, f]$$

En [10 d], [10 e] y [10 f] i puede tomar los valores 1, 2, ..., $n - 1$.

La [10 a] se deduce por ser en el centro de la placa, horizontal, por simetría, el plano tangente a la superficie neutra.

La [10 b] expresa 'que en el contorno exterior la placa, al estar perfectamente empotrada, no gira.'

La [10 c], que es nulo el desplazamiento vertical de dicho contorno de empotramiento.

Las $n-1$ ecuaciones [10 d] expresan la continuidad de la pendiente del plano tangente a la superficie neutra de la placa, al pasar, en sentido radial, de una corona circular a la siguiente a través de los anillos de separación.

Las $n - 1$ ecuaciones [10 e] indican la igualdad de las ω correspondientes a los anillos, obtenidas para dichos anillos.

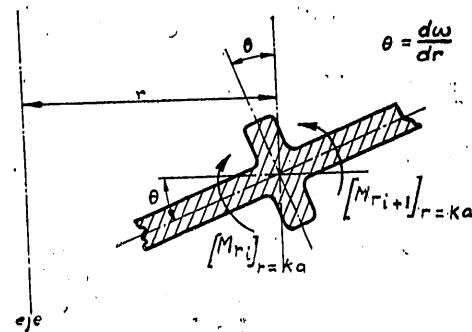


Fig. 3.^a — La torsión del anillo equilibrada por la diferencia de momentos radiales de la placa (ecuación [10, f]).

Las $n - 1$ ecuaciones [10 f] indican que el momento resultante radial M (fig. 3.^a) que actúa en cada anillo (o sea la diferencia entre $M r_{(i+1)}$ y $M r^{(i)}$ correspondientes a las regiones $i + 1$ e i para $r = k_i a$) produce en virtud de [7] un giro θ . Pero como θ es pequeño, podemos ahora hacer $\operatorname{tg} \theta \approx \theta = \frac{d\omega}{dr}$. Si en [7'] ponemos en vez de I , b sus valores I_i y $k_i a$, resultan las [10 f].

PLACA APOYADA.

Las condiciones de contorno que nos determinan c_1, c_2, \dots, c_{3n} son las mismas, excepto la [10 b], que se sustituye por [10 b']... $[M r_{(n)}]_{r=a} = 0$, que expresa la anulación de M_r en el borde exterior de la placa ($r = a$).

En el caso más general en que h (y por tanto D) varíe con r , la ecuación [1] no es válida. Se prueba fácilmente, estableciendo el equilibrio en la figura 4.^a y despreciando cantidades de segundo orden, que:

$$M_r + \frac{d M_r}{d r} r - M_t + Q r = 0;$$

introduciendo [5] y [5'] y llamando $\phi = \frac{d \omega}{d r}$, queda:

$$D \frac{d}{d r} \left(\frac{d \Phi}{d r} + \frac{\phi}{r} \right) + \frac{d D}{d r} \left(\frac{d \Phi}{d r} + \mu \frac{\phi}{r} \right) = -Q, \quad [1']$$

como ecuación general. Se reduce a la [1] si h (y por tanto D) es constante.

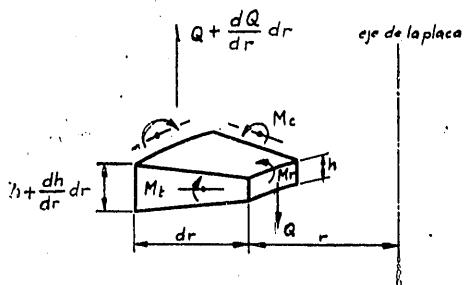


Fig. 4.^a — Equilibrio del elemento de placa de espesor h variable con r (ecuación [1']).

Placas con un solo anillo de refuerzo.

Caso I.^o — Empotadas en su contorno (fig. 5.^a).

Las constantes de integración son c_1, c_2, \dots, c_6 ; el sistema de 6 ecuaciones resulta muy sencillo ($n = 2$). Obtenidas dichas constantes y sustituyéndolas en las expresiones [9], queda (tomado, este caso, del artículo de W. A. Nash, citado en la bibliografía).

Para el interior al anillo:

$$\begin{aligned} \omega_i &= -\frac{p a^4}{64 D} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^4 + 4 \log \frac{1}{k} - \frac{2}{k^2} \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 1 - B \left[\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{k} \right] \right\}. \quad [11] \end{aligned}$$

Para el exterior al anillo:

$$\begin{aligned} \omega_e &= -\frac{p a^4}{64 D} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^4 - 1 + 4 \log \frac{a}{r} - B \left[\frac{1}{4} \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log \frac{a}{r} \right] \right\}. \quad [11] \end{aligned}$$

Siendo en ambos casos:

$$B = \frac{8 k - 4 (1 + k^4) \frac{E I}{a D}}{k + \frac{1 - k^2}{2} \frac{E I}{a D}}. \quad [12]$$

(B es positivo siempre, por ser $k \leq 1$).

Como en la placa sin anillo, la máxima flecha está en el centro, por razón de simetría. Haciendo $r = 0$, queda:

$$\begin{aligned} W_{\max} &= -\frac{p a^4}{64 D} \left\{ 4 \log \frac{1}{k} + 1 - \frac{B}{2} \log \frac{1}{k} \right\} = \\ &= -\frac{p a^4}{64 D} \left\{ 1 - \frac{4 k^2 (1 - k^2) \frac{E I}{a D}}{2 k + (1 - k^2) \frac{E I}{a D}} \log \frac{1}{k} \right\}. \quad [13] \end{aligned}$$

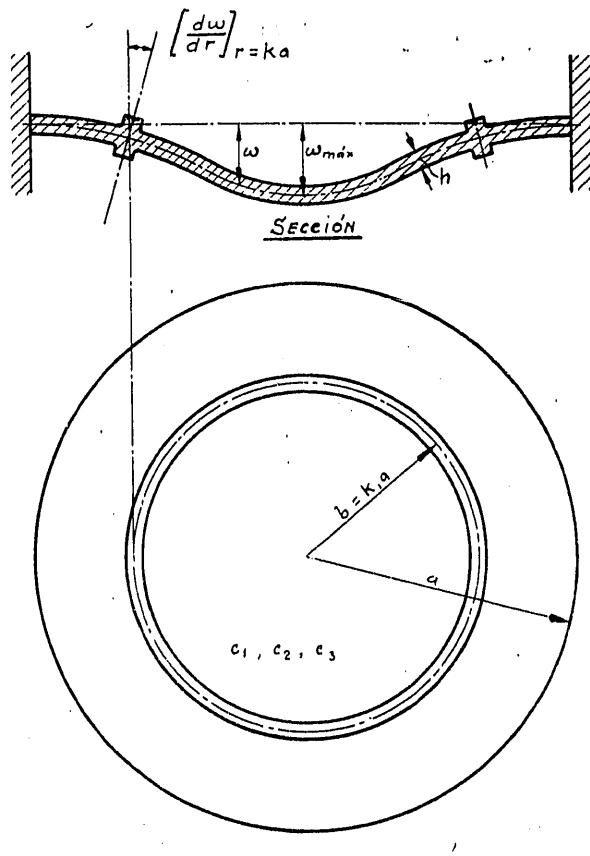


Fig. 5.^a — Placa con un anillo y empotrada en su contorno exterior (ecuaciones [11], [12] y [13]).

Recordando que la flecha en el centro de la placa sin anillo es $-\frac{p a^4}{64 D}$, resulta que el anillo influye disminuyendo dicha flecha en su producto por:

$$\frac{4 K^2 (1 - K^2) \frac{E I}{a D}}{2 K + (1 - K^2) \frac{E I}{a D}} \log \frac{1}{K}; \quad [14]$$

expresión que es función de k , o sea de la posición del anillo y de $\frac{E I}{a D}$, o sea de la inercia del mismo.

Podemos llevar a un gráfico (fig. 6.^a) para distintos valores de $\frac{EI}{aD}$, o las k como abscisas y las $-\frac{W_{\max}}{pa^4} \cdot \frac{64D}{64D}$

como ordenadas. La derivada de [14] con respecto a k nos daría al igualarla a cero los puntos de tangente horizontal a las curvas del gráfico. Es decir, estando una placa definida por su radio a , su espesor h , los módulos de Young y Poisson E y μ ($\mu \approx \frac{1}{3}$), respectivamente:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)};$$

si queremos reforzarla con un anillo cuyo momento de inercia de una sección transversal con respecto al eje contenido en su plano es I , tendremos así el valor de k ($k < 1$) que determine el radio b del anillo

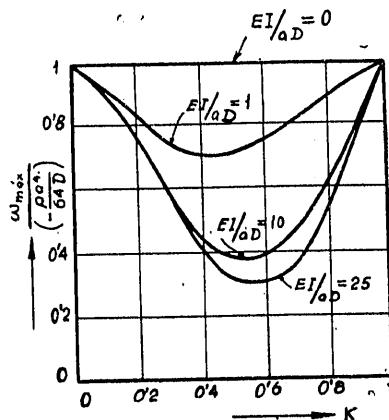


Fig. 6.^a — Efecto producido por el anillo de refuerzo en la flecha máxima de la placa empotrada con sobrecarga uniforme (ecuación [13]).

$b = ka$ que produce en la placa la flecha mínima W_{\max} en el centro (fig. 6.^a).

Consideremos algunos valores particulares de $\frac{IE}{aD}$ (número sin dimensión):

1.^o Si $\frac{EI}{aD} = 0$, o sea $I = 0$, es que no hay anillo; la placa es ordinaria, resultando:

$$W_{\max} = -\frac{pa^4}{64D}.$$

2.^o Si $\frac{IE}{aD} = \infty$, o sea $I = \infty$, prácticamente se trataría de un anillo de gran rigidez:

$$W_{\max} = -\frac{pa}{64D} \left[1 - 4K^2 \log \frac{1}{K} \right]. \quad [15]$$

Veamos cuál es su posición más conveniente para

que la flecha W_{\max} en el centro sea mínima. Igualando a cero su derivada respecto a k , obtenemos:

$$K = \frac{1}{\sqrt{e}} = 0,61$$

($e \approx 2,71$ es la base de los logaritmos neperianos), y entonces:

$$W_{\max} = -\frac{pa^4}{64D} \left(1 - \frac{2}{e} \right) = -0,26 \frac{pa^4}{64D}. \quad [16]$$

O sea, que por muy rígido que sea el anillo $I \rightarrow \infty$ no puede reducirse la flecha más que al 0,26 de la que tiene sin él; ello se logra con un anillo de radio $b = 0,61a$.

Todas las curvas de la familia dada por [13] pasarán por los dos puntos:

$$K = 0 \rightarrow \frac{\omega_{\max}}{-pa^4/64D} = 1 \quad \text{y} \quad K = 1 \rightarrow \frac{\omega_{\max}}{-pa^4/64D} = 1.$$

Tensiones principales. — Aplicando las fórmulas generales [6] y [6'] calculando las $\omega_{(1)}$ y $\omega_{(2)}$ de la parte interior y exterior al anillo con auxilio de las [11₁] y [11₂] queda, después de hacer operaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{tr} &= -\frac{3pa^2}{2h^3} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{3+\mu}{2}\right) - \left(\frac{1+\mu}{2K^2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{B}{16} (1+\mu) \left(1 - \frac{1}{K^2}\right) \right\} y; \\ \sigma_{it} &= \frac{3pa^2(1+\mu)}{4h^3} \left\{ -\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{1+3\mu}{1-\mu}\right) + \frac{1}{K^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{8} \left(1 - \frac{1}{K^2}\right) \right\} y; \end{aligned} \right\} [17]$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{er} &= -\frac{3pa^2}{2t^3} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{1+3\mu}{1+\mu}\right) + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{8} \left[1 - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \right\} y; \\ \sigma_{et} &= \frac{3pa^2(1+\mu)}{4h^3} \left\{ -\left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{1+3\mu}{1+\mu}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right) + \frac{B}{8} \left[1 - \left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right] \right\} y. \end{aligned} \right\} [18]$$

Estas expresiones indican claramente el efecto producido por el anillo. Cada una de estas tensiones es el producto de la correspondiente a la placa sin anillo multiplicada por un número abstracto, dependiente de k (posición del anillo) y de B (rigidez del mismo).

Las tensiones máximas corresponderán a fibras exteriores, distantes $y = \pm \frac{h}{2}$ de la superficie neutra.

Las posiciones que toma el anillo al variar k influyen en los valores máximos que pueden tomar las σ_r , σ_t . Los representamos en sendos gráficos (figs. 7.^a y 8.^a). Nos dan el valor de k más conveniente para reducir cada una de las tensiones.

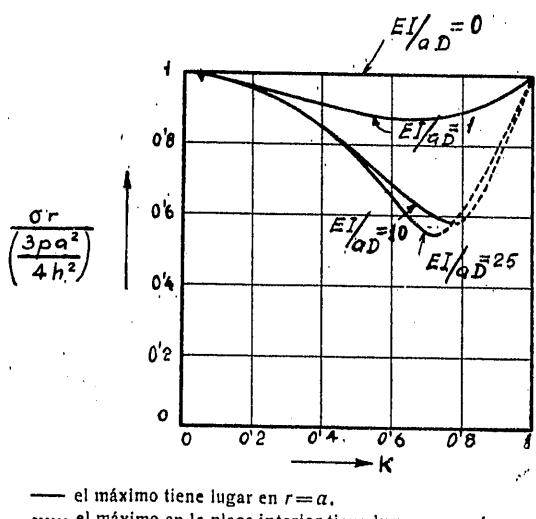


Fig. 7.^a — Máximos valores de la tensión radial σ_r (ecuación [17]).

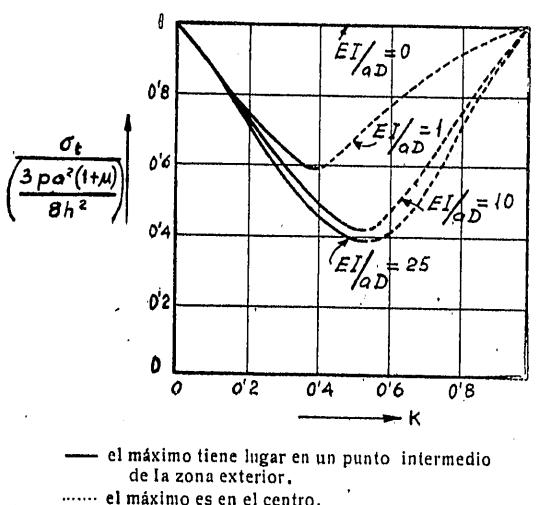


Fig. 8.^a — Máximos valores de la tensión tangencial σ_t (ecuación [18]).

Recordemos que en la placa empotrada (sin anillo):

$$\frac{\sigma_{r_{\max}}}{\sigma_{t_{\max}}} = \frac{-\frac{3p a^2}{2 h^3} \left(-\frac{h}{2}\right)}{\frac{3p a^2 (1+\mu)}{4 h^3} \left(+\frac{h}{2}\right)} = \frac{2}{1+\mu} \approx 1,5; \quad [20]$$

es decir, la tensión radial máxima (que tiene lugar en el borde de empotramiento) es 1,5 veces la tensión tangencial máxima (en el centro).

Caso 2.^o — Apoyadas en su contorno.

$$\left. \begin{array}{l} \text{interior. } \omega_i = -\frac{p r^4}{64 D} + c_1 \frac{r}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + \\ \qquad \qquad \qquad + c_3; (0 \leq r \leq K a); \\ \text{exterior. } \omega_e = -\frac{p r^4}{64 D} + c_4 \frac{r}{4} + c_5 \log \frac{r}{a} + \\ \qquad \qquad \qquad + c_6; (K a \leq r \leq a). \end{array} \right.$$

Las 6 constantes de integración las fijamos por las 6 condiciones en los límites indicados por las ecuaciones [10], que en este caso son:

$$\left[\frac{d \omega_i}{d r} \right]_{r=0} = 0; c_2 = 0; \quad [20, a]$$

$$\left[M_{re} \right]_{r=a} = 0; -\frac{5p a^3}{24} + c_4 \frac{2D}{3} - c_5 \frac{2D}{3 a^2} = 0; \quad [20, b']$$

$$\left[\omega_e \right]_{r=a} = 0; -\frac{p a^4}{64 D} + c_4 \frac{a^2}{4} + c_6 = 0; \quad [20, c]$$

$$\left[\frac{d \omega_i}{d r} \right]_{r=Ka} - \left[\frac{d \omega_e}{d r} \right]_{r=Ka} = 0$$

$$(c_1 - c_4) \frac{Ka}{2} - \frac{c_5}{Ka} = 0; \quad [20, d]$$

$$\left[\omega_i \right]_{r=Ka} - \left[\omega_e \right]_{r=Ka} = 0$$

$$(c_1 - c_4) \left(\frac{Ka}{2} \right)^2 - c_5 \log Ka + c_3 - c_6 = D; \quad [20, e]$$

$$\left[M_{re} \right]_{r=Ka} - \left[M_{ri} \right]_{r=Ka} = \frac{EI}{(Ka)^3} \left[\frac{d \omega}{d r} \right]_{r=Ka}$$

$$\frac{2}{3} D (c_4 - c_1) - \frac{2}{3} \frac{D}{(Ka)^2} c_5 = \frac{EI}{(Ka)^2} \left[-\frac{p(Ka)^3}{16 \cdot D} + \frac{c_1 Ka}{2} \right]. \quad [20, f]$$

Sistema que resuelto nos da c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 , c_6 , y que al sustituir da para las ω :

$$\omega_i = -\frac{p a^4}{64 D} \left[4 - 5 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^4 - B \left\{ -\left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{2}{K^2} \right) + 3 + 4 \log \frac{1}{K} \right\} \right]. \quad [21_1]$$

$$\omega_e = -\frac{p a^4}{64 D} \left[4 - 5 \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^4 - B \left\{ 1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 - \frac{1}{4} \log \frac{r}{a} \right\} \right]; \quad [21_2]$$

siendo ahora:

$$B = \frac{(5 - 2K^2)K^2 \frac{EI}{aD}}{4K + (2 + K^2) \frac{EI}{aD}}; \quad [22]$$

(B es siempre positivo, por ser $k \leq 1$).

Recordemos que la flecha en un punto cualquiera de una placa apoyada (sin anillo) es:

$$\omega = -\frac{p(a^2 - r^2)}{64D} \left(\frac{5+\mu}{1+\mu} a^2 - r^2 \right) = \\ = -\frac{p a^4}{64 D} \left\{ 4 + \left(\frac{r}{a}\right)^4 - 5 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\},$$

si $\mu = \frac{1}{3}$; que es el centro $r = 0$, da $\omega_{\max} = -\frac{p a^4}{16 D}$,

o sea cuatro veces la de la placa empotrada.

Las flechas máximas se obtendrán haciendo $r = 0$ en [21]. Así resulta:

$$\omega_{\max} = -\frac{p a^4}{16 D} \left\{ 1 - B \left(\frac{3}{4} + \log \frac{1}{K} \right) \right\}. \quad [23]$$

Con lo cual podemos determinar una familia de curvas (fig. 9.^a) que nos darán, para diversos valores del parámetro:

$$\frac{EI}{aD} \text{ las } \frac{\omega_{\max}}{-p a^4 / 16 D},$$

en función de k .

Lo mismo que en la placa empotrada, como casos particulares tendremos:

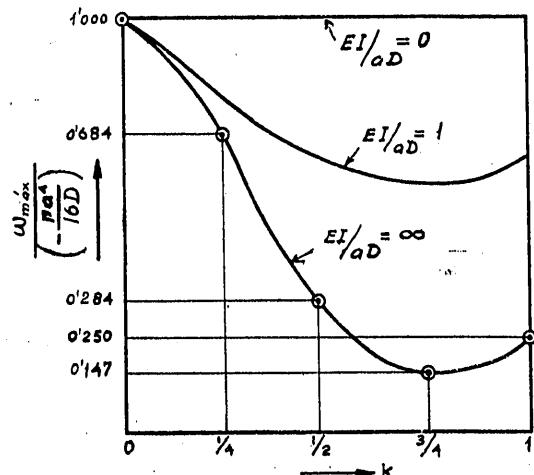


Fig. 9.^a — Efecto producido por el anillo de refuerzo en la flecha máxima de una placa apoyada en su borde y con sobrecarga uniforme p (ecuaciones [22] y [23]).

1.^o Si $I = 0$ para:

$$\begin{cases} K = 0 \\ K = 1 \end{cases} \text{ resulta } \omega_1 = -\frac{p a^4}{16 D} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{r}{a}\right)^4 - \frac{5}{4} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right\}; \\ \left(\text{para } r = 0: \omega_{\max} = -\frac{p a^4}{16 D} \right);$$

o sea, como si no tuviera anillo y simplemente apoyada.

2.^o Si $I = \infty$, $B = k^3 \frac{5 - 2K^2}{2 + K^2}$, resultando para $k = 1$, $B = 1$:

$$\omega_t = -\frac{p a^4}{64 D} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2 \right]^2 \left(\text{para } r = 0 \quad W_{\max} = -\frac{p a^4}{64 D} \right),$$

o sea, las flechas de una placa sin anillo, empotrada, pues si es completamente indeformable en su contorno exterior equivale a un empotramiento.

Teniendo las ω dadas por [21₁] y [21₂] se hallan las σ_r y σ_t como en las placas empotradas, auxiliándose de [6] y [6']. Análogamente, en gráficos podrían dibujarse las reducciones que por el anillo experimentan las tensiones máximas.

Placa apoyada en el anillo de refuerzo.

Si éste tiene de radio $k a$, las ecuaciones diferenciales de la placa se deducen aplicando [1] a la parte interior y exterior separadamente, teniendo en cuenta que si las Q $\left\{ \begin{array}{l} \text{interior} \\ \text{exterior} \end{array} \right\}$ los designamos por $\left\{ \begin{array}{l} Q_i \\ Q_e \end{array} \right\}$, resulta:

$$Q_i 2 \pi r = \int_0^r p 2 \pi dr; \dots (0 \leq r \leq K a); \quad [24]$$

$$Q_e 2 \pi r = \int_0^r p 2 \pi dr - \pi P; \dots (K a \leq r \leq a); \quad [25]$$

siendo $P = \int_0^a p 2 \pi r dr$ el peso total que actúa sobre la placa. Las [1] en este caso serán:

$$-\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{r} \left(r \frac{d \omega_i}{dr} \right) \right] = \\ = \frac{\int_0^r p r dr}{Dr}; \quad (0 \leq r \leq K a). \quad [26]$$

$$-\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{r} \left(r \frac{d \omega_e}{dr} \right) \right] =$$

$$= \frac{\int_0^r p r dr - \pi P}{Dr}; \quad (K a \leq r \leq a). \quad [27]$$

En la cual p es, en general, función de r . Si suponemos además que la sobrecarga, p , por unidad de superficie es constante, se integran inmediatamente, resultando (fig. 10):

$$\omega_i = -\frac{p r^4}{64 D} + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + c_3; \quad [28]$$

$$\begin{aligned} \omega_e = & -\frac{p r^4}{64 D} + \frac{p a^2}{8 D} \left(r^2 \log r - \frac{r^2}{2} \right) + \\ & + c_4 \frac{r^2}{4} + c_5 \log \frac{r}{a} + c_6. \end{aligned} \quad [29]$$

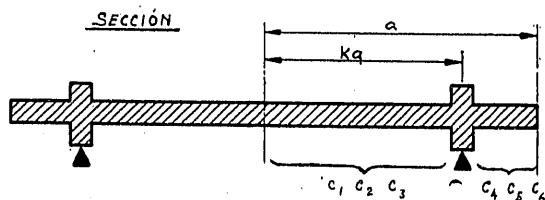


Fig. 10.—Placa apoyada en el anillo de refuerzo (ecuaciones [28] y [29]).

Las 6 condiciones de contorno, que determinan las constantes de integración son, las ecuaciones de primer grado en c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 y c_6 :

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d \omega_i}{d r} \right]_{r=0} &= 0 \rightarrow \left[\omega_i \right]_{r=Ka} = \left[\omega_e \right]_{r=Ka} = 0; \\ \left[M_{r(e)} \right]_{r=a} &= 0 \rightarrow \left[M_{r(e)} \right]_{r=Ka} - \left[M_{r(i)} \right]_{r=Ka} = \\ &= \frac{EI}{(Ka)^2} \left[\frac{d \omega_i}{d r} \right]_{r=Ka}; \\ \left[\frac{d \omega_i}{d r} \right]_{r=Ka} &= \left[\frac{d \omega_e}{d r} \right]_{r=Ka}. \end{aligned} \right\} [30]$$

Es evidente que este caso comprende para $k = 1$ e $I = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ los de placa, sin anillo, {apoyada} en su contorno exterior.

Placa apoyada sólo en el centro y con anillo de refuerzo en su borde exterior.

Si p es constante como:

$$Q = \frac{p \pi r^2 - p \pi a^2}{2 \pi r},$$

la ecuación diferencial es:

$$-\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d \omega}{d r} \right) \right] = \frac{p(r^2 - a^2)}{2rD},$$

que integrada da:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \omega}{d r^2} &= -\frac{3p r^2}{16D} + \frac{p a^2}{8D} \left(2 \log \frac{r}{a} + 1 \right) + \frac{c_1}{2} - \frac{c_3}{r^2}; \\ \frac{d \omega}{d r} &= -\frac{p r^3}{16D} + \frac{p a^2}{8D} \left(2r \log \frac{r}{a} - r \right) + \frac{c_1 r}{2} + \frac{c_2}{r}; \\ \omega &= -\frac{p r^4}{64D} + \frac{p a^2}{8D} \left(r^2 \log \frac{r}{a} - r^2 \right) + \\ &+ c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + c_3. \end{aligned}$$

Las 3 condiciones en los límites son:

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{d \omega}{d r} \right]_{r=0} &= 0; \quad c_2 = 0; \\ \left[\omega \right]_{r=0} &= 0; \quad c_3 = 0; \\ -\left[M_r \right]_{r=a} &= \frac{EI}{a^2} \left| \frac{d \omega}{d r} \right|_{r=a}; \quad \frac{p a^2}{8} - \frac{2D}{3} c_1 = \\ &= \frac{EI}{a^2} \left[-\frac{3p a^3}{16D} + c_1 \frac{a}{2} \right]. \end{aligned} \right.$$

De esta última se deduce:

$$c_1 = \frac{3p a^2}{8D} \frac{2 + 3 \frac{EI}{aD}}{4 + 3 \frac{EI}{aD}}.$$

Que sustituída en ω nos da:

$$\omega = -\frac{p r^4}{64D} + \frac{p a^2}{8D} \left(\log \frac{r}{a} - \frac{10 + 3 \frac{EI}{aD}}{10 + 12 \frac{EI}{aD}} r^2 \right). \quad [31]$$

Si $r = 0$:

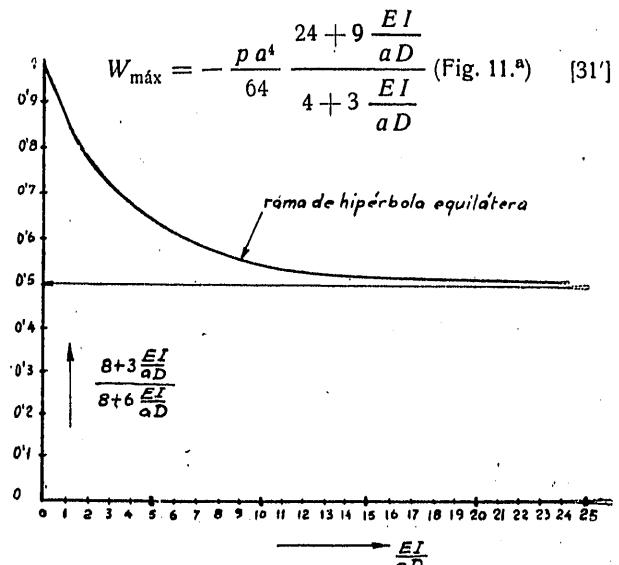


Fig. 11.—Reducción de flecha máxima producida en una placa apoyada sólo en su centro por un anillo de refuerzo en su borde exterior (ecuación [31']).

Como casos particulares, tenemos:

1.º $I = 0$:

$$\omega = -\frac{pr^4}{64D} + \frac{pa^2r^2}{8D} \left(\log \frac{r}{a} - \frac{5}{8} \right); \quad [32]$$

para $r = a$:

$$\omega_{\max} = \frac{3pa^4}{32D}; \quad [32']$$

es el caso de la placa ordinaria (sin anillo) sostenida sólo en el centro.

2.º $I = \infty$; resulta:

$$\omega = -\frac{pr^4}{64D} + \frac{pa^2r^2}{8D} \left[\log \frac{r}{a} - \frac{1}{4} \right]; \quad [33]$$

para $r = a$:

$$\omega_{\max} = \frac{3}{64} \frac{pa^4}{D}. \quad [33']$$

Si consideramos:

Deformada de placa empotrada con sobrecarga uniforme p :

$$\omega = \frac{-P}{64D} (a^2 - r^2)^2.$$

Deformada de placa empotrada, pero con una sola carga, P , en el centro:

$$\omega = -\frac{Pr^2}{8\pi D} \log \frac{r}{a} = \frac{P(a^2 - r^2)}{16\pi D}$$

(ambas obtenidas como fórmulas [62] y [92] en Timoshenko, *Teoría de placas planas y curvas*), y las restamos, obtenemos, suponiendo $P = \pi a^2 \cdot p$:

$$\omega = -\frac{pa^4}{64D} \left[\left(\frac{r}{a} \right)^4 - 2 \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left\{ 4 \log \left(\frac{r}{a} \right) - 1 \right\} - 3 \right]. \quad [34]$$

Como para $r = 0$, queda $\omega = \frac{3pa^4}{64D}$ como flecha en el centro; comprueba que esta cantidad es la diferencia entre [34] y [33].

Examinando [31] y [32] vemos que la influencia del anillo con respecto a la placa sin él hace que su ω_{\max} sea una fracción, de la que ésta vale:

$$\frac{\omega_{\max}}{\omega} = \frac{8+3 \frac{EI}{aD}}{8+6 \frac{EI}{aD}}, \quad [34']$$

que es una rama de hipérbola que representamos en la figura.

Las fórmulas [32'] y [33'] nos dicen que por mucho que reforcemos el anillo (como para $I \rightarrow \infty$) toma [34] el valor $\frac{1}{2}$, nunca podemos reducir la flecha (pues si $I \rightarrow 0$, [34] vale 1) a menos de la mitad que tendría sin dicho anillo.

Teniendo ω definido en [31], es inmediato hallar las tensiones en cada punto σ_r , σ_t , ..., sus valores máximos, etc., etc.

Placa con agujero circular, reforzada con un anillo.

I. Si la sustentación es en el borde exterior y el borde interior está además cargado con una carga $P_0 = \frac{P}{2\pi b}$ uniformemente distribuida a lo largo del mismo, además de la p en su superficie, la ecuación diferencial será, ya que:

$$Q = -\frac{P}{2\pi r} + \frac{\pi(r^2 - b^2)}{2\pi r} p - \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\omega}{dr} \right) \right] = -\frac{P_0 b}{r D} + \frac{r^2 - b^2}{2r D} p,$$

que integrada nos da:

$$\frac{d\omega}{dr} = -\frac{p r^3}{16 D} - \frac{b}{2} \left(P_0 - \frac{b p}{2} \right) r \left(\frac{1}{2} - \log \frac{r}{a} \right) + c_1 \frac{r}{2} + \frac{c_2}{r}.$$

$$\omega = -\frac{p r^4}{64 D} - \frac{b}{2} \left(P_0 - \frac{b p}{2} \right) \frac{r^2}{2} \left(1 - \log \frac{r}{a} \right) + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + c_3. \quad [35]$$

Las 3 condiciones en los límites (figs. 12 a, 12 b y 12 c) serán para:

a) Placa empotrada en el borde exterior con anillo interior:

$$[\omega]_{r=a} = 0; \left[\frac{d\omega}{dr} \right]_{r=a} = 0; [M_r]_{r=b} = \frac{EI}{b^2} \left[\frac{d\omega}{dr} \right]_{r=b}$$

b) Placa apoyada en el borde exterior con anillo interior:

$$[\omega]_{r=a} = 0; [M_r]_{r=a} = 0; [M_r]_{r=b} = \frac{EI}{b^2} \left[\frac{d\omega}{dr} \right]_{r=b}$$

c) Placa apoyada en el borde exterior con anillo exterior:

$$[\omega]_{r=a} = 0; [M_r]_{r=a} = \frac{EI}{a^2} \left[\frac{d\omega}{dr} \right]_{r=a}; [M_r]_{r=b} = 0.$$

II. Si la sustentación no es en el borde exterior, sino a lo largo de un círculo interior, la ecuación diferencial es análoga, ya que entonces:

$$Q = -\frac{p\pi(a^2 - b^2)p}{2\pi r} + \frac{\pi(r^2 - b^2)}{2\pi r} p;$$

es decir, que basta sustituir P_0 por $P_0 - \frac{p}{2b}(a^2 - b^2)$, resultando:

$$\omega = -\frac{pr^4}{64D} - \frac{b}{2} \left(P_0 - \frac{a^2}{2b} p \right) \frac{r^2}{2} \left(1 - \log \frac{r}{a} \right) + c_1 \frac{r^2}{4} + c_2 \log \frac{r}{a} + c_3. \quad [36]$$

Las condiciones en los límites serán (figs. 12 d y 12 e):

Fig. 12a)

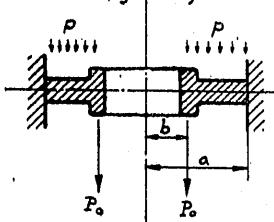


Fig. 12d)

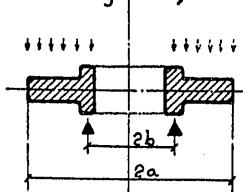


Fig. 12b)

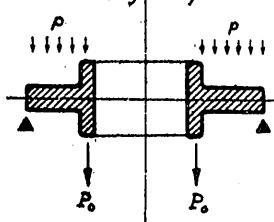


Fig. 12e)

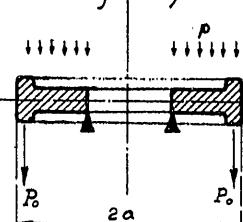


Fig. 12c)

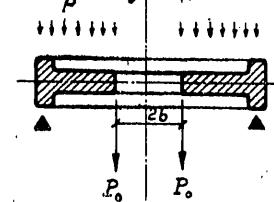


Fig. 12.— Diferentes casos de placas circulares con agujeros concéntricos (secciones meridianas).

d) El anillo sobre el apoyo:

$$[\omega]_{r=b} = 0; [M_r]_{r=b} = \frac{EI}{b^3} \left[\frac{d\omega}{dr} \right]_{r=b}; [M_r]_{r=a} = 0$$

e) El anillo en el borde exterior:

$$[\omega_r]_{r=b} = 0; [M_r]_{r=a} = \frac{EI}{a^3} \left[\frac{d\omega}{dr} \right]_{r=a}; [M_r]_{r=b} = 0.$$

Haciendo $I = 0$ ó $I = \infty$ y combinando con:

$$p = 0 \quad \text{o} \quad P = 0 \quad \text{o} \quad P = p \cdot \pi (a^3 - b^3),$$

se obtienen casos particulares muy interesantes.

Para $b = 0$ se tiene la placa sin agujero, pero reforzada con anillo. Si $I = 0$, es como si éste no existiera, y si $I = \infty$, el anillo produce un empotramiento.

Sin dificultad se harían los cálculos para anillos de diámetros distintos de los de la placa. Entonces aparecerán 6 constantes arbitrarias correspondientes a las ecuaciones de las ω_i , ω_e , interior y exterior a dicho anillo.

Los 6 casos de cargas de placas calculados y tabulados por Wahl y Lobo y recogidos por Timoshenko (fig. 13) en su libro sobre Teorías de placas indicadas en la bibliografía (cap. III, tabla III), se dedu-

cen inmediatamente como casos muy particulares de las a), b), c), d) y e) expuestos, del modo siguiente:

- | | | |
|--|---|---|
| <p>$I = 0 \quad P = 0$: placa empotrada ordinaria (sin anillo) con sobrecarga uniforme p y con agujero central.</p> <p>a) $I = 0 \quad p = 0$: placa empotrada ordinaria con sobrecarga P distribuida en el contorno del agujero.</p> <p>$I = \infty - P = p n (a^3 - b^3)$. Caso V (se presenta en el cálculo de émbolos).</p> <p>$I = \infty \quad p = 0$ Caso VI.</p> | <p>b) $I = 0 \quad P = 0$ Caso VII.</p> <p>$I = 0 \quad p = 0$ Caso VIII.</p> <p>$I = \infty \quad P = 0$ Caso IV.</p> <p>$I = \infty \quad p = 0$ Caso VIII.</p> | <p>c) $I = 0 \quad P = 0$ Caso VII.</p> <p>$I = 0 \quad p = 0$ Caso I.</p> <p>$I = \infty \quad P = 0$ [Igual que en a) para $I = 0, P = 0$].</p> <p>$I = \infty \quad p = 0$ Caso VI.</p> |
|--|---|---|

Caso	Coeficiente	$a/b = 1/k$				
		1/25	1/50	2	3	4
(I)	α	0'10	0'126	1'48	1'88	2'17
	β	0'341	0'519	0'672	0'734	0'724
(II)	α	0'66	0'19	2'04	3'34	4'30
	β	0'202	0'491	0'902	1'220	1'300
(III)	α	0'135	0'410	1'04	2'15	2'99
	β	0'0231	0'0183	0'0938	0'293	0'448
(IV)	α	0'122	0'336	0'74	1'21	1'45
	β	0'00343	0'0313	0'1250	0'291	0'417
(V)	α	0'090	0'273	0'71	1'54	2'23
	β	0'00077	0'0062	0'0329	0'110	0'179
(VI)	α	0'115	0'220	0'405	0'703	0'933
	β	0'00129	0'0064	0'0237	0'062	0'092
(VII)	α	0'592	0'976	1'440	1'880	2'08
	β	0'184	0'414	0'664	0'824	0'830
(VIII)	α	0'227	0'428	0'753	1'025	1'514
	β	0'00510	0'0249	0'0877	0'209	0'293

Figura 13.

$$\sigma_{r_{\max}} = \alpha \frac{p a^2}{h^3} \quad \text{o} \quad \sigma_{r_{\max}} = \alpha \frac{P}{h^2};$$

$$\omega_{\max} = \beta \frac{p a^4}{E h^3} \quad \text{o} \quad \omega_{\max} = \beta \frac{P a^3}{E h^3}.$$

- d) $\left\{ \begin{array}{l} I=0 \quad P=0 \\ I=0 \quad p=0 \\ I=\infty \quad P=0 \\ I=\infty \quad p=0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Caso II.} \\ \text{Caso I.} \\ \text{Caso III.} \\ \text{Caso VIII.} \end{array}$
- e) $\left\{ \begin{array}{l} I=0 \quad P=0 \\ I=0 \quad p=0 \\ I=\infty \quad P=0 \\ I=\infty \quad p=0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Caso II.} \\ \text{Caso I.} \\ [\text{Lo mismo que en a) para} \\ \quad I=0, \quad p=0] \\ \text{Caso VI.} \end{array}$

El cálculo expuesto anteriormente de placas apoyadas sólo en su centro, puede considerarse como caso particular de varios de éstos, en lo que $b \rightarrow 0$.

Placas de espesor h variable con r .

Su estudio ha sido abordado por Pichler (véase ecuación [I']) y Olsson (véase bibliografía). Si además se refuerza con anillos, las ecuaciones son muy complicadas.

Si h varía proporcionalmente al radio r , $h = cr$, ($H = ca$) y en placas con un agujero reforzado por un anillo de $I = \infty$ (lo que equivale a que la placa esté empotrada en un árbol central de diámetro $b = ka$), los cálculos están resueltos por Conway (ver bibliografía) para seis casos particulares (fig. 14):

$$I = \infty \left\{ \begin{array}{l} \text{placa empotrada.} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 2\pi b P_0 = -\pi p (a^2 - b^2). \quad [\text{Cargas} \\ \quad \quad \quad \text{equilibradas (pistón)}] \quad (\text{VI}). \\ \quad \quad \quad P = 0. \quad \quad \quad (\text{III}). \\ \quad \quad \quad p = 0. \quad \quad \quad (\text{I}). \end{array} \right. \\ \text{placa apoyada.} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 2\pi b P_0 = -\pi p (a^2 - b^2). \quad [\text{Sobra,} \\ \quad \quad \quad \text{en realidad, el apoyo}] \quad (\text{V}). \\ \quad \quad \quad P = 0. \quad \quad \quad (\text{IV}). \\ \quad \quad \quad p = 0. \quad \quad \quad (\text{II}). \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Al final de su escrito da Conway una tabla utilizada, que copiamos (fig. 14), con los valores de α y β : que dan, respectivamente, la tensión máxima:

$$\sigma_{r \max} = \alpha \frac{P a^2}{H^3} \quad o \quad \sigma_{\max} = \alpha \frac{P}{H^2},$$

y la flecha máxima:

$$\omega_{\max} = \beta \frac{P a^4}{E H^3} \quad o \quad \omega_{\max} = \beta \frac{P a^2}{E H^3},$$

en cada uno de dichos seis casos, en función de los valores de:

$$\frac{1}{K} = 1,25, \quad 1,5, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

Siendo $\frac{1}{K} = \frac{a}{b} > 0$ la relación entre el radio de la placa y el del agujero.

No entramos en el cálculo de placas con grandes deformaciones (trabajos de Karman, Nadai, etc.), en que su refuerzo con anillos también tendría gran interés.

Casos	Coeficiente	$a/b = 1/K$					
		1,25	1,5	2	3	4	5
(I)	α	0'159	0'396	1'091	3'036	6'549	10'78
	β	0'00174	0'0112	0'0606	0'261	0'546	0'876
(II)	α	0'353	0'933	2'626	6'877	11'47	16'51
	β	0'00816	0'0583	0'3448	1'358	2'387	3'268
(III)	α	0'0785	0'208	0'52	1'27	1'94	2'515
	β	0'00092	0'008	0'0495	0'193	0'346	0'482
(IV)	α	0'149	0'991	2'23	5'37	7'78	9'16
	β	0'00551	0'0564	0'412	1'673	2'786	3'573
(V)	α	0'249	0'638	3'96	13'64	26'00	40'63
	β	0'00372	0'0453	0'401	2'119	4'245	6'283
(VI)	α	0'4275	0'5145	2'051	7'965	17'35	30'00
	β	0'00105	0'01145	0'0934	0'537	1'261	2'16

Figura 14.

$$\sigma_{r \max} = \alpha \frac{P a^2}{H^3} \quad o \quad \sigma_{\max} = \alpha \frac{P}{H^2};$$

$$\omega_{\max} = \beta \frac{P a^4}{E H^3} \quad o \quad \omega_{\max} = \beta \frac{P a^2}{E H^3}.$$

Bibliografía.

S. Timoshenko: *Theory of plates and shells*.

— *Strength of materials*. 2.ª parte.

R. G. Olsson: "Biegung kreisförmiger Platten von radial veränderlicher Dicke". *Ingenieur Archiv*, 1937.

O. Pichler: *Die Biegung Kreisymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke*. (Stuttgart) 1928.

A. M. Wahl and G. Lobo: "Stresses and deflections in flat circular plates with central holes". *Trans. A.S.M.E.*, vol. LII. 1930.

W. A. Nash: "Effect of a concentric reinforcing ring on stiffness and strength of a circular plate". *Trans. A.S.M.E.*, vol. XV, núm. 1. 1948.

H. D. Conway: "The bending of symmetrically loaded circular plates of variable thickness". *Trans. A.S.M.E.*, vol. XV, núm. 1. 1948.

A. Nadai: *Elastischen Platten*.

Th. von Karman: *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, vol. IV (4). 1910.