CALCULO DE REDES DE DISTRIBUCION
METODO DE CROSS CON DESCARGA UNIFORME

Por VENTURA ESCARIO,
Ingeniero de Caminos.

Expone y estudia el autor una simplificación en la aplicación del método de Cross al cálculo de redes de distribución, cuya aplicación será de indudable interés en tan laboriosos cálculos.

En la exposición que Hardy Cross hace de su método de cálculo de redes de distribución de aguas, en el *Bulletin* núm. 22, vol. XXXIV (noviembre, 13, 1936), de la Universidad de Illinois, desarrolla íntegramente el caso de tomas de agua que pudiéramos llamar puntuales, en cuyo caso la pérdida de carga en cada tramo de tubería viene dada por la expresión:

$$h = k\,l\,q^n\,;$$

siendo:

h = pérdida de carga.
k = constante dependiente de la rugosidad y del diámetro de la tubería.
l = longitud del tramo.
q = caudal.
n = exponente que suele variar con las distintas fórmulas y cuyo valor es del orden de 2.

Al final de su trabajo expone la posibilidad de aplicar también su método al caso en que la función que relacione h y q sea, en general, de la forma $h = f(q)$.

Al calcular una red de distribución ya existente, por introducirse alguna modificación en el abastecimiento, ocurre, frecuentemente, que no se dispone de planos en los cuales se detallen las diferentes tomas, y aun en el caso de proyectar una nueva red, aunque se conociesen perfectamente todos los datos, resultaría exhaustivo el trabajo de aplicar el método de Cross a la infinidad de tramos que resultan separados por las diferentes tomas, y es prácticamente preciso considerar, en lugar (fig. 1.ª) de los distintos tramos *A*-1, 1-2, 2-3, etc., un tramo único, *A-B*, suponiendo que desde *A* hasta *B* el agua se descarga uniformemente a lo largo de todo él.

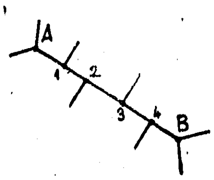

Figura 1.ª

Vamos a determinar en este caso la nueva función $h = f(q)$, que relaciona el caudal con la pérdida de carga, y el término de corrección a aplicar en cada malla.

Sean (fig. 2.ª) q_1 y q_2 los caudales que entran y salen, respectivamente, en una tubería de longitud l,

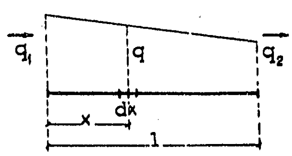

Figura 2.ª

y q el caudal que circula a una distancia x. La pérdida de carga en el elemento dx será:

$$dh = k\,q^n\,dx,$$

y en la longitud l:

$$h = k\int_0^l q^n\,dx\,;$$

y como por tratarse de descarga uniforme se verifica:

$$q = q_1 - \frac{q_1 - q_2}{l}\,x,$$

tendremos:

$$h = k\int_0^l \left[q_1 - \frac{q_1 - q_2}{l}\,x\right]^n dx =$$
$$= \frac{k\,l}{(n+1)\,(q_1 - q_2)}\left[q_1^{n+1} - q_2^{n+1}\right];$$

expresión que nos da la pérdida de carga en el tramo.

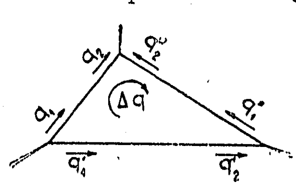

Figura 3.ª

Supongamos ahora (fig. 3.ª) que, siguiendo el método de Cross (*), hemos hecho una distribución arbi-

(*) "Cálculo de redes de distribución. Método de Cross", por D. José Juan-Aracil. REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, número 2 729, 1.º septiembre 1942.

traria de caudales, y tratamos de obtener el término de corrección Δq a aplicar a una malla.

Habremos de conseguir que se verifique en dicha malla:

$$\Sigma \frac{k\,l}{(n+1)(q_1-q_2)}\left[(q_1+\Delta q)^{n+1} - (q_2+\Delta q)^{n+1}\right]=0; \qquad [1]$$

expresión que, desarrollada en serie, se convierte en:

$$\Sigma \frac{k\,l}{(n+1)(q_1-q_2)}\cdot\left[\left(q_1^{n+1}-q_2^{n+1}\right)+ +(n+1)\left(q_1^n-q_2^n\right)\Delta q + +\frac{(n+1)\,n}{1\,.\,2}\left(q_1^{n-1}-q_2^{n-1}\right)\Delta^2 q+\ldots\right]=0.$$

Despreciando los términos en $\Delta^2 q$ y sucesivos, y despejando Δq, resulta:

$$\Delta q = -\frac{\Sigma \frac{k\,l}{(n+1)(q_1-q_2)}\left(q_1^{n+1}-q_2^{n+1}\right)}{\Sigma \frac{k\,l}{(q_1-q_2)}\left(q_1^n-q_2^n\right)}.$$

Conviene tener en cuenta que $\frac{k\,l}{q_1-q_2}$ es una constante para cada tramo y, por tanto, podremos poner el término de corrección en la forma:

$$\Delta q = -\frac{\Sigma K\left(q_1^{n+1}-q_2^{n+1}\right);}{(n+1)\,\Sigma K\left(q_1^n-q_2^n\right)};$$

siendo:

$$K=\frac{k\,l}{q_1-q_2}.$$

Para la cómoda utilización de esta fórmula, es conveniente tomar para n un valor entero, como lo es en las fórmulas de Darzy, Bazin, Sonier y otras, en que n se hace igual a 2, con lo cual queda el término Δq en la forma:

$$\Delta q = -\frac{\Sigma K\left(q^3{}_1-q^3{}_2\right)}{3\,\Sigma K\left(q^2{}_1-q^2{}_2\right)};$$

expresión fácil de calcular disponiendo, como es normal, de unas tablas de cuadrados y cubos.

Observaciones importantes.

1.ª En el término de corrección, los sumandos del numerador se han de tomar con sus signos correspondientes; en cambio, los del denominador se tomarán todos en valor absoluto. Esto se deduce observando que en realidad la expresión [1] se debe escribir así:

$$\Sigma \frac{k\,l}{(n+1)(q_1-q_2)}\left[(q_1+\Delta q)^{n+1}-(q_2+\Delta q)^{n+1}\right]- -\Sigma \frac{k\,l}{(n+1)(q_1-q_2)}\left[(q_1-\Delta q)^{n+1} - (q_2-\Delta q)^{n+1}\right]=0;$$

extendiéndose la primera Σ a todos los tramos con pérdida de carga positiva, y la segunda, a aquellos cuya pérdida de carga va en sentido contrario. Nótese que se ha tomado como sentido positivo del término de corrección el sentido positivo de la pérdida de carga, y que el numerador del término de corrección es la pérdida de carga en el circuito cerrado.

2.ª Hasta ahora hemos supuesto que en todos los tramos entra el caudal q_1 y sale el caudal q_2. En general, habrá también tramos en los cuales entre un caudal q_1 por un extremo y por el otro entre también el caudal q_2.

La fórmula que da en este caso la pérdida de carga es:

$$h=\frac{k\,l}{(n+1)(q_1+q_2)}\left(q_1^{n+1}-q_2^{n+1}\right),$$

que es exactamente igual al caso anteriormente estudiado si se tiene en cuenta que el gasto de la tubería es, en estas circunstancias, (q_1+q_2), en lugar de (q_1-q_2) y, por tanto, se puede hacer como antes:

$$\frac{k\,l}{q_1+q_2}=K.$$

Para deducir el término de corrección, habrá que escribir, en este caso, la expresión [1] en la forma:

$$\Sigma \pm \frac{k\,l}{(n+1)(q_1-q_2)}\left[(q_1\pm\Delta q)^{n+1}-(q_2\pm\Delta q)^{n+1}\right]+ +\Sigma \pm \frac{k\,l}{(n+1)(q_1+q_2)}\left[(q_1\pm\Delta q)^{n+1} - (q_2\mp\Delta q)^{n+1}\right]=0; \qquad [2]$$

extendiéndose la primera Σ a los tramos estudiados primeramente, y la segunda, a los alimentados por ambos extremos. Partiendo de esta expresión se llega al término de corrección:

$$\Delta q = -\frac{\Sigma K \left(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}\right)}{(n+1)\,\Sigma K \left(q_1^n \mp q_2^n\right)},$$

debiéndose en el denominador emplear el signo negativo para los tramos alimentados por un solo extremo, y el positivo para los alimentados por ambos extremos (*).

3.ª Cuando el término de corrección Δq determinado en un circuito cambie de signo a alguno de los caudales q_1 ó q_2 de alguno de los tramos, entonces el término de corrección que se ha empleado no es correcto en el sumando correspondiente. Esto se deduce observando que en la expresión más general [2], habría que poner $\Delta q - q_1$ ó $\Delta q - q_2$, en lugar de los valores correspondientes, alterándose entonces la fórmula que da Δq, en alguno de sus signos. Sin embargo, en estos casos, lo más conveniente es adoptar como bueno el valor hallado para no complicar el método, pues en la mayoría de ellos será suficientemente aproximado, si el tramo que sufre la anomalía pesa poco comparado con todo el circuito, como será la normal; en caso de que, por el contrario, se introdujese un término de corrección con error notable, hay que tener en cuenta que no se estropea el cálculo, pues al efectuar la siguiente corrección, se reajusta el circuito de nuevo.

De todas formas apuntamos esta posibilidad, pues puede suceder que se observe alguna anomalía durante el cálculo, probablemente imputable a esta circunstancia, como será fácil deducir inmediatamente.

(*) Respecto a los signos de cada uno de los sumandos de numerador y denominador, se seguirán las normas dadas en la observación 1.ª.

Resumen práctico.

1.º El término de corrección a aplicar *en todos los casos* es:

$$\Delta q = -\frac{\Sigma K \left(q_1^{n+1} - q_2^{n+1}\right)}{(n+1)\,\Sigma K \left(q_1^n \mp q_2^n\right)};$$

siendo:

$$K = \frac{k\,l}{c}.$$

l = longitud de cada tramo.

c = consumo del tramo.

k = constante de la fórmula $h = k\,l q^n$, que da la pérdida de carga, h, en una tubería de longitud l y por toda la cual circula el caudal constante q.

2.º Los sumandos del numerador se emplearán cada uno con su signo, teniendo en cuenta que cada uno de ellos representa la pérdida de carga del tramo correspondiente y, por tanto, que todo el numerador representa la pérdida de carga total en el circuito (introduciendo el divisor $n + 1$).

3.º Los sumandos del denominador se tomarán todos en valor absoluto. En cuanto al factor $\left(q_1^n \mp q_2^n\right)$, se utilizará el signo negativo para tramos alimentados por un solo extremo, y positivo para los alimentados por los dos extremos.

4.º El sentido positivo de Δq es el mismo que el de la pérdida de carga.

5.º Puede surgir alguna anomalía de lo expuesto en la observación 3.ª, aunque es poco probable, pero conviene, de todas formas, tenerlo en cuenta.

6.º Cualquier error que se introduzca en todo un circuito por determinar Δq mal, desaparece en las siguientes correcciones.