INTEGRADOR MECANICO DE LA ECUACION

Por MANUEL DIAZ-MARTA PINILLA,

Ingeniero de Caminos.

La resolución gráfica de la ecuación de continuidad en Hidráulica le sugiere al autor un sencillo aparato, que describe en el presente artículo y que resuelve, a su juicio, problemas hidráulicos de interés relacionados con las fluctuaciones de volúmenes.

En cualquier recipiente con entrada y salida de líquido, se verifica la ecuación diferencial siguiente:

$$dV = Q \cdot dt - q \cdot dt, \qquad [1]$$

que expresa que el aumento elemental del volumen en el depósito es igual a la diferencia entre el volumen entrante y el saliente en un tiempo infinitamente pequeño.

Esta ecuación puede ponerse en la forma:

$$S \cdot dh = (Q - q)\, dt; \qquad [2]$$

o bien:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Q - q}{S}. \qquad [3]$$

En estas ecuaciones, las letras tienen los significados siguientes:

V = volumen del depósito, en m.^{3};
S = superficie libre del agua, en m.^{2};
h = altura del agua sobre el vertedor, en m.;
Q = caudal entrante, en m.^{3}/seg.;
q = caudal saliente, en m.^{3}/seg.;
t = tiempo, en segundos.

La resolución de la ecuación [3] permite abordar problemas muy importantes de Hidráulica, tales como el efecto regulador de un embalse durante una crecida, el control de la altura de los lagos, el funcionamiento de los embalses destinados a la producción de energía eléctrica o a cualquier otro consumo, el estudio de las cámaras de carga o chimeneas de equilibrio, el del funcionamiento de los depósitos de mareas destinados a la producción de energía, y, en general, el de cualquier sistema hidráulico con uno o varios depósitos.

La ecuación [2] no puede resolverse analíticamente, a no ser en casos muy sencillos, en los que, además, se aceptan algunas simplificaciones y se recurre en general a resoluciones gráficas o a tanteos numéricos. Kozeny supone dividido el embalse en pequeños embalses parciales, para los que determina, por tanteos, el tiempo de llenado o vaciado (1). Otros procedimientos gráficos de aplicación son los de R. A. Hill (2), Goodrich (3) y Visentini (4).

En este trabajo vamos a desarrollar unas resoluciones de la ecuación de continuidad (5), que permiten fáciles aplicaciones a todos los casos enunciados y pueden extenderse con sencillez a cuantos se presenten en la práctica.

Efecto regulador de un embalse.

Al llegar una avenida a un embalse con desagüe superficial, una parte del volumen se almacena y otra se vierte, subiendo mientras tanto el nivel de agua hasta que el caudal evacuado se iguala con el que ingresa. A partir de ese momento, el nivel en el embalse desciende. Este fenómeno se traduce en un apaisamiento de la onda de crecida aguas abajo del embalse, con retardo y disminución de la creciente máxima (figs. 1.ª y 2.ª).

Si se tienen datos de la riada afluente y se conocen las características del embalse y el vertedor, en las ecuaciones [1], [2] y [3] son funciones conocidas:

$V = V(h)$, volumen del embalse en función de la altura sobre el vertedor;
$S = S(h)$, superficie del agua, función de esa misma altura;
$Q = Q(t)$, caudal ingresado en función del tiempo;
$q = q(h)$, caudal evacuado en función de la altura sobre el vertedor.

La función incógnita es la $q = f(t)$, que representa la variación de caudales evacuados con el tiempo, y para obtenerla, perseguimos en la ecuación [3]

(1) Forchheimer: *Tratado de Hidráulica*, pág. 450.
(2) R. A. Hill: *Eng. News Record*, 26 abril 1928.
(3) Goodrich: *Civil Eng.*, febrero 1931. "Rapid Calculation for Reservoir Discharge".
(4) Visentini: *Energía Eléctrica*, febrero 1933.
(5) Fundadas en un procedimiento publicado por el autor en 1932. M. Díaz-Marta: "Efecto regulador de un embalse", REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, 15 diciembre 1932.

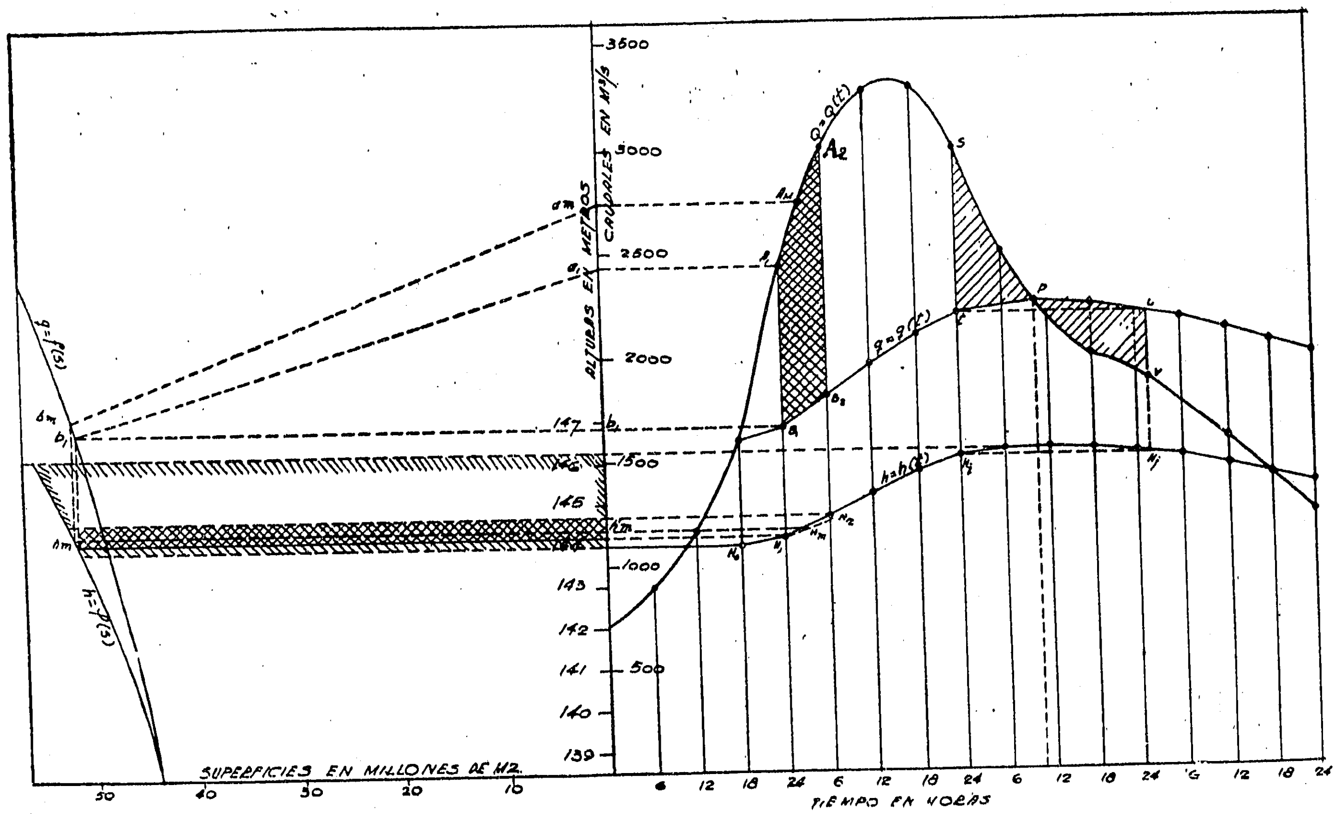

Figura 1.ª

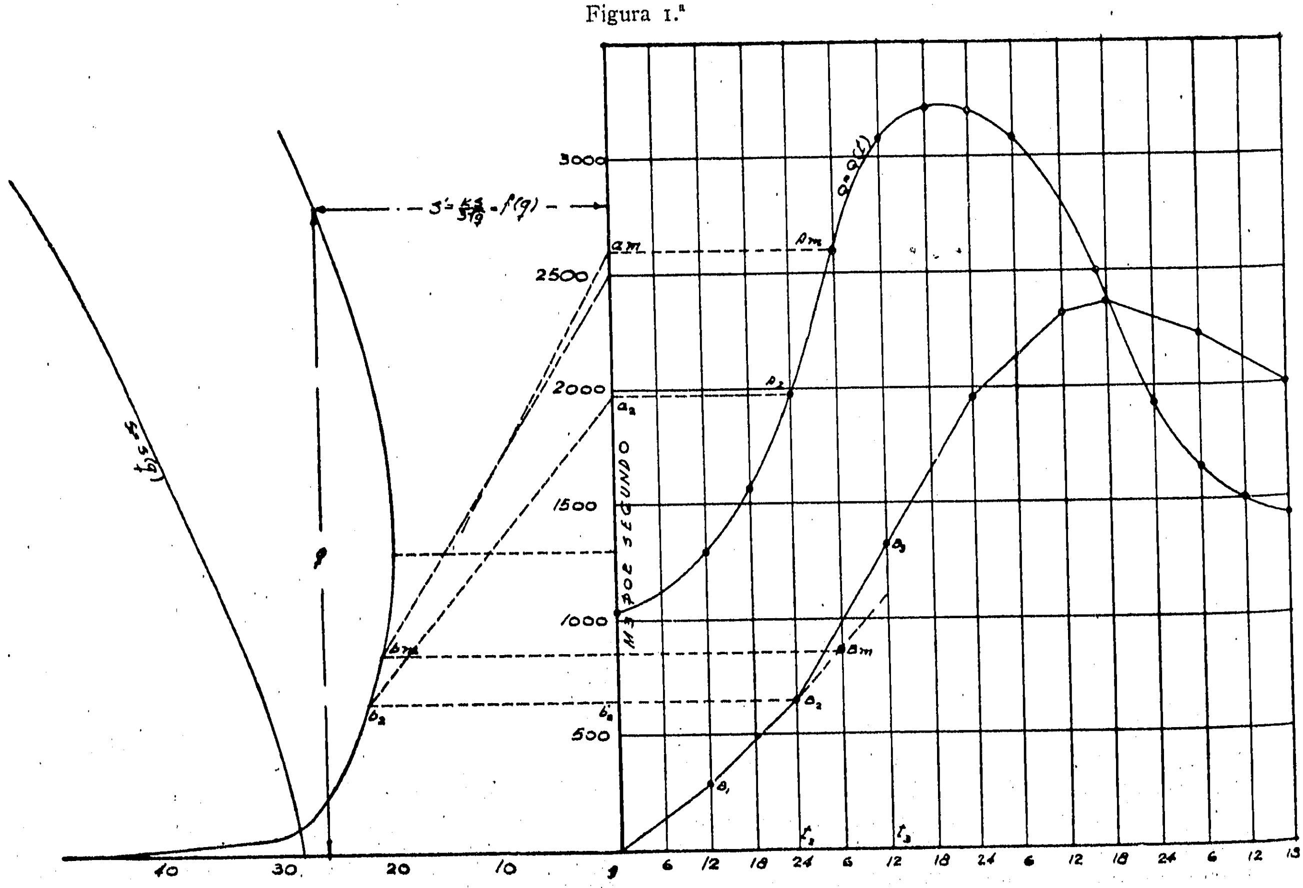

Figura 2.ª

la formación de la $h = h(t)$, cuyo coeficiente angular, según dicha ecuación, vale $(Q - q)/S$.

En la figura 1.ª se representa, en el cuadrante de la derecha, la curva de caudales $Q = Q(t)$, y en el de la izquierda, dos curvas: una, $q = f(S)$, que tiene por abscisas superficies de agua y por ordenadas los caudales evacuados cuando el agua alcanza los niveles correspondientes a esas superficies, y otra, la $h = \varphi(S)$, con alturas como ordenadas y superficies como abscisas.

Dividimos el eje de las t en intervalos iguales de tiempo, y suponemos conocidos los puntos B_1 y H_1 de las curvas de caudales evacuados y alturas de embalse para el tiempo t_1. El problema se reduce a encontrar los valores B_2 y H_2 para el tiempo t_2. Repitiendo la construcción para los siguientes intervalos, lo habremos resuelto totalmente, puesto que siempre se parte de una altura de embalse y un caudal vertido conocido para un cierto instante.

Por el punto A_1 se traza una horizontal hasta que corte al eje de ordenadas en a_1, y por el punto B_1, otra hasta que corte en b'_1 al eje de ordenadas y en b_1 a la curva $q = f(S)$. La inclinación de la recta $a_1 b_1$ es la misma que debe tener la tangente en el punto H_1 a la curva $h = h(t)$, puesto que el segmento $a_1 b'_1$ es igual a $Q - q$, y el segmento $b_1 b'_1$ equivale a la superficie S en el instante considerado. Por el punto H_1 puede trazarse una paralela a dicha recta y obtener así un valor aproximado de la altura media en el intervalo.

Los valores de q se deducen de los encontrados para h por la correlación que establecen las dos curvas de la izquierda, ya que, eligiendo un valor de h como ordenada en $h = \varphi(S)$, obtenemos, mediante una vertical, el correspondiente de q en $q = f(S)$, y por medio de horizontales pasamos estos valores a la construcción de la derecha.

En el paso del punto H_1 al inmediato hemos tomado como cuerda de la curva la tangente en el punto H_1. Para corregir el error, partimos ahora de los puntos medios del intervalo, A_m y H_m, este último acabado de determinar con mucha aproximación. Trazamos una horizontal por A_m para encontrar el punto a_m en el eje de ordenadas, y otra por H_m, que determina el h_m sobre la curva $h = \varphi(S)$. Por la correlación establecida antes, encontramos el punto b_m. La recta que une a_m con b_m tiene la inclinación de la cuerda $H_1 H_2$, puesto que hemos partido de valores medios; luego trazando por H_1 la paralela a dicha recta, obtenemos el punto H_2 rectificando la anterior construcción.

Reiterando el procedimiento, dibujamos en su totalidad las curvas que dan alturas de embalse y caudales evacuados en función del tiempo.

En la figura 1.ª se ha estudiado el caso de la regulación en un embalse equipado con compuertas automáticas, que mantienen el nivel de agua a la altura constante 144, hasta que el caudal desaguado sobrepasa los 1 600 m.³/seg., para el cual las compuertas quedan completamente abatidas, funcionando desde ese momento como vertedor de coronación fija con 138,5 m. de altitud. El cálculo gráfico se ha hecho a partir del punto en que los caudales ingresados y evacuados — iguales mientras las compuertas funcionan automáticamente manteniendo el nivel constante — alcanzan los 1 600 m.³/seg., que es cuando comienza el efecto regulador del embalse.

Las escalas del dibujo se han elegido como sigue: de la ecuación [3] deducimos que si 1 cm. representa 1 m. en la escala de alturas y 200 m.³/seg. en la de caudales, la misma relación de 1 a 200 habrá entre las escalas de tiempo y de superficies. Hacemos que 1 cm. represente 4 000 000 m.², y 1 cm. representará también 4 000 000/200 = 20 000 seg., y 1 día vendrá expresado por 86 400/20 000, o sea por 4,32 cm.

Observaciones.

Del examen de la figura 1.ª se deduce:

1.º El área de la superficie rayada $A_1 A_2 B_1 B_2$ representa el volumen de agua almacenado en el embalse en el tiempo $t_1 t_2$. El mismo valor tiene el área rayada a la izquierda de la figura entre las horizontales de H_1 y H_2, puesto que esta área es el primer miembro de la ecuación [2], integrado entre H_1 y H_2, y la primera, la integral entre los mismos límites del segundo miembro. De aquí que el volumen de agua almacenado entre las cotas 144 y 146,4, expresado por el área limitada entre las horizontales trazadas a esa altura, y la curva $h = \varphi(S)$ equivale a la superficie comprendida entre las curvas Q y q hasta el punto de intersección P y ambas áreas representan, por tanto, la capacidad de embalse total que interviene en amortiguar la crecida.

2.º En el instante en que se igualan los caudales, los valores de q y de h alcanzan su máximo. En efecto: en la ecuación [3], el numerador se anula y $dh/dt = 0$. Hay en este instante un máximo de h y, por tanto, de q.

3.º Para dos valores iguales de q o de h, uno en la rama ascendente y otro en la descendente, las superficies $s\,P\,t$ y $P\,u\,v$ son iguales, puesto que la primera representa el volumen entrado desde H_i a la altura máxima, y la segunda, el vaciado hasta recobrar, desde la máxima, la misma altura H_i, por lo que su igualdad es evidente. En algunos casos hemos visto deducir de esta propiedad de las curvas la construcción de las ramas descendentes. Con la construcción gráfica que hemos mostrado, es más sencillo seguir con el procedimiento inicial.

Resolución gráfica, eliminando la variable *H*.

La ecuación [1] puede escribirse también en la forma:

$$\frac{dV}{dq}\, dq = (Q - q)\, dt, \qquad [4]$$

en la que dV/dq, que tiene las dimensiones de un tiempo, expresa, en segundos, la relación entre el aumento de volúmenes y el de caudal vertido, para una variación infinesimal de éste. Esta función derivada, con la cual no tengo noticia de que se haya trabajado hasta ahora, expresa mejor que cualquier otra función la aptitud de un embalse para llenarse y vaciarse, y, como hemos de ver, simplifica extraordinariamente algunos problemas.

De la anterior ecuación se deduce:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Q - q}{\dfrac{dV}{dq}}. \qquad [5]$$

La derivada dV/dq se puede calcular en función de q, puesto que como $dV = S \cdot dh$, se tiene:

$$\frac{dV}{dq} = S\,\frac{dh}{dq};$$

y tanto S como dh/dq son funciones conocidas de q y, por lo tanto, lo es su producto.

Veamos cuál es el valor de dh/dq para el caso de un vertedor con lámina libre y coronación fija.

De la fórmula $q = l \cdot A \cdot h^{3/2}$, que da el desagüe de un vertedor, en la que A es un coeficiente que vale cerca de 1,9 y l la longitud del vertedor, obtenemos:

$$h = \frac{q^{2/3}}{(A \cdot l)^{2/3}}; \quad \frac{dh}{dq} = \frac{2}{3\,(A \cdot l)^{2/3}} \cdot q^{-1/3} = \frac{K}{\sqrt[3]{q}},$$

en donde K es una constante para cada vertedor.

Determinamos los valores del producto

$$S \cdot \frac{dh}{dq} = S \cdot \frac{K}{\sqrt[3]{q}};$$

o sea de dV/dq, a los que designamos por la letra S', y la ecuación [5] se transforma en:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Q - q}{S'}.$$

La ecuación [6], en la que S' es una función conocida de q para cada embalse, se resuelve gráficamente formando una curva cuya derivada sea el valor expresado por el segundo miembro. Para ello dibujamos en la figura 2.ª la curva Q con caudales entrantes como ordenadas y tiempos como abscisas, y en el cuadrante de la izquierda trazamos la curva que tiene como ordenadas los caudales vertidos, q, y como abscisas los valores de S', obtenidos multiplicando los de S por $K/\sqrt[3]{q}$. Estos valores de S' se representan en la misma escala de tiempos adoptada para el cuadrante de la derecha.

El proceso es el siguiente: partiendo de un valor B_2 del caudal evacuado, trazamos una horizontal hasta que corte a la curva S' en b_2. Unimos ese punto con a_2, obtenido por medio de una horizontal desde A_2. La recta que une a_2 con b_2 tiene el mismo coeficiente angular que la tangente a la curva q en B_2, puesto que $a_2 b_2 = Q - q$ y $b_2 b'_2 = S'$.

La tangente a la curva q da valores aproximados en el intervalo $t_2 t_3$, por lo cual, partiendo del valor medio de este primer tanteo y de los valores de Q y de S' correspondientes, rectificamos la construcción, obteniendo $B_2 B_3$ y, por tanto, el punto B_3. Repitiendo el procedimiento, deducimos los valores de q en todos los instantes de la crecida.

En lugar de construirse la curva S' en el cuadrante de la izquierda, puede construirse una plantilla en papel grueso o material plástico transparentes, en la que quede marcada esa curva. Corriéndola hacia la derecha, a medida que progresa el dibujo se evita el trazado de algunas líneas.

Integrador mecánico.

Este sistema de resolución gráfica nos lleva de la mano a intentar un sencillo aparato que automáticamente marque por medio de un trazador la curva de desagüe de un embalse cuando hagamos caminar un índice por la Q de caudales ingresados. El trazador debe moverse sobre el diagrama de tal manera que la tangente a la curva q se mantenga paralela a una línea de coeficiente angular $(Q - q)/S'$.

El aparato integrador (figs. 3.ª y 4.ª) va montado sobre un bastidor, 1, que se traslada sobre unos carriles paralelos al eje de abscisas del diagrama. Sobre una misma paralela al eje de ordenadas deslizan el índice, 2, con que seguimos la curva de caudales afluentes y el trazador, 3, que ha de marcar la curva de caudales vertidos. Las curvas S' con ordenadas, que representan caudales, y abscisas, que representan valores de S', se marcan con una ranura, 5, sobre una lámina transparente, 4, montada en el mismo bastidor. En la misma horizontal que la rueda trazadora se desliza un pequeño pivote, 7, obligado también a alojarse en la ranura. Ahora bien: el punto medio, 9, de la recta que une idealmente este pivote, 7, con el índice, 2, que sigue la curva Q, unido con el trazador, 3, de la curva q, marca una recta de coeficiente angular $(Q - q)/S'$, y sirve, por tanto, de guía que determina la dirección de la curva q que buscamos. En efecto: la proyección vertical del segmento entre el trazador y dicho punto medio mide $(Q - q)/2$, y la proyección horizontal, $S'/2$. Este punto medio se ha logrado mecánicamente en el aparato presentado por medio de unos segmentos articulados, 8, aunque también puede conseguirse por muchos otros mecanismos.

Al impulsar hacia la derecha el bastidor, obligando, además, al índice a seguir la curva Q y partiendo con la rueda de algún punto conocido de la curva q, la ruedecilla resulta guiada con la inclinación o coeficiente angular que corresponde a la curva q y marca con sus dientes esta curva.

Aplicaciones.

Estos procedimientos descritos, gráficos y mecánicos, son también aplicables a la resolución de otros muchos problemas hidráulicos relacionados con fluctuaciones de volúmenes. No hay que forzar mucho la imaginación para comprender que un mecanismo de esta clase, que ahora aparece en una forma tosca, puede perfeccionarse hasta el punto de constituir un modelo mecánico de una red hidráulica complicada, en tal forma que en pocos minutos se pueda resolver cualquier problema de la red que se relacione con volúmenes, alturas y caudales, por lo que sería de aplicación en el estudio y previsión de las crecidas.

Examinemos, por lo tanto, una aplicación inmediata del aparato descrito al estudio de las oscilaciones de nivel en un embalse destinado a la producción de energía eléctrica, que tenga fuertes subidas y bajadas de nivel. Conocemos en este caso los caudales afluentes y la demanda de energía, pero como las fluctuaciones de altura son grandes, no conocemos de antemano el consumo de agua, ya que depende no sólo de la demanda de energía sino también del estado de nivel en que se encuentra en cada momento el embalse.

En este caso, por no conocer los caudales consumidos, el diagrama de Rippl no puede aplicarse suponiendo proporcionalidad directa entre potencias y caudales consumidos, como suele hacerse, y sólo puede resolvernos el problema procediendo por tanteos para

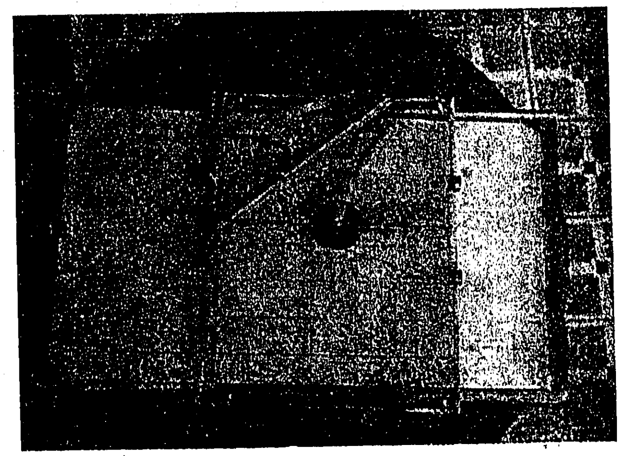

Figura 3.ª

cortos espacios de tiempo con sus correspondientes rectificaciones.

Veamos cuál puede ser la resolución gráfica y mecánica más sencilla. Si W es la potencia necesaria bruta, expresada en metros cúbicos de agua por metros de altura, es decir, en millares de kilográmetros, y H la altura del agua sobre la salida de las turbinas, $q = W/H$, y la ecuación de continuidad:

$$\frac{dV}{dt} = Q - q$$

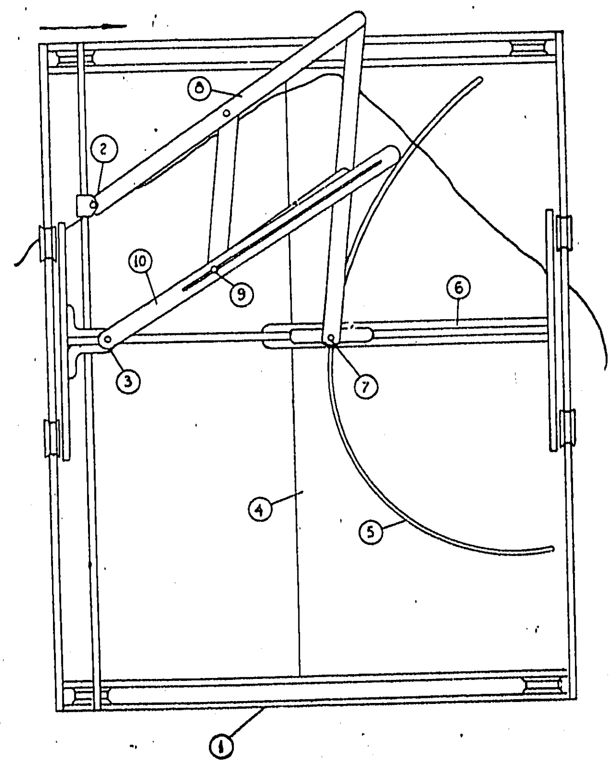

Figura 4.ª

puede escribirse así:

$$S \cdot \frac{dH}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = Q - q;$$

o bien:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Q - q}{S \dfrac{dH}{dq}}.$$

De $H = W/q$, deducimos:

$$\frac{dH}{dq} = -\frac{W}{q^2} dq;$$

y sustituyendo:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{Q - q}{-S \dfrac{W}{q^2}}.$$

Se dibujaría, de modo análogo a como hicimos antes, la curva Q de aportaciones y la curva $-S \cdot W/q^2$, que puede construirse en función de q suponiendo W constante, y se procedería del mismo modo a partir de puntos iniciales de Q y de q, tratando de formar la curva cuyo coeficiente angular sea $(Q - q)/-S \cdot \frac{W}{q^2}$, que es la curva de caudales consumidos.

Con un bastidor como el anteriormente descrito se puede resolver este problema. Formaríamos la ranura con la curva $-S \cdot W/q^2$ a la izquierda en lugar de a la derecha (para tener en cuenta el signo menos) de la línea vertical del índice Q y de la ruedecilla trazadora, y la guía de la trazadora se orientaría del mismo modo antes señalado.

Cuando la potencia W sea variable en función del tiempo, puede resolverse formando varias ranuras para los distintos valores de W y haciendo que el pivote se aloje en la ranura correspondiente a la energía demandada en el intervalo de tiempo considerado.