FRECUENCIAS DE VIBRACION DE PLACAS PLANAS (*)

Por MIGUEL A. HACAR BENITEZ,
Ingeniero de Caminos.

Después de exponer las fórmulas fundamentales para el cálculo de las frecuencias de vibración de placas planas, presenta el autor unos ábacos que permiten calcular rápidamente y con facilidad dichas frecuencias en tres casos muy corrientes, como demuestra con un ejemplo, que resuelve al final del artículo.

El estudio de la vibración de placas (circulares, rectangulares) suele hacerse siguiendo los métodos de Rayleig y Ritz. Con ellos se obtienen las frecuencias fundamentales y los modos superiores de vibración.

El método de Ritz, que en realidad no es más que un perfeccionamiento del de Rayleig, consiste en *suponer* una curva o superficie (**) de flexión como representativa del modo de vibración. Esta curva o superficie (según se trate de vigas o placas) contendrá varios parámetros. Cumpliendo las condiciones de contorno, deben ser de valores tales *que reduzcan al mínimo la frecuencia de la vibración.*

Con su auxilio, en los cálculos de vibraciones, se obtienen como *frecuencias de vibración de las placas rectangulares apoyadas en su contorno*:

$$f = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g\,D}{\gamma\,h}}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right), \qquad [1]$$

siendo:

a, b = dimensiones de la placa en planta (cm.).
h = espesor de la placa (cm.).
g = aceleración gravedad (~ 981 cm./seg.^{2}).
m, n = números enteros.
ν = coeficiente de Poisson ($\sim \frac{1}{3}$, sin dimensión).

$$D = \frac{E\,h^3}{12(1-\nu^2)} = \text{rigidez de la placa (Kg./cm.) (***)}.$$

f = frecuencia propia de vibración (seg.^{1}).
γ = peso específico de la placa o peso por unidad de superficie de placa dividido por h (Kg./cm.^{3}).

(*) Interesa conocer las frecuencias fundamentales de vibración propia de los elementos constructivos de las estructuras. La igualdad de la frecuencia de vibración de una fuerza perturbadora (periódica) y la de vibración libre o natural da lugar a la *resonancia*.

(**) Suelen tomarse o expresiones polinómicas o sumas de dobles productos de senos y cosenos, por resultar muy fácil imponerles las condiciones en los bordes

(***) Desempeña el papel análogo al producto $E\,I$ en las *vigas*.

La frecuencia fundamental, de menor valor, se obtiene haciendo en [1] $m = n = 1$, que nos da:

$$f = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{g\,D}{\gamma\,h}}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right), \qquad [2]$$

que para las placas cuadradas $a = b$ resulta:

$$f = \frac{\pi}{a^2}\sqrt{\frac{g\,D}{\gamma\,h}}. \qquad [3]$$

En la obra de Timoshenko *Vibration Problems in Engineering* se hacen diversas aplicaciones del método de Ritz a membranas (*) y placas. Para placas cuadradas y circulares, vibrando libremente o con los bordes apoyados o empotrados, se obtiene para la frecuencia expresiones de la forma:

$$f = \frac{k}{a^2}\sqrt{\frac{g\,D}{\gamma\,h}}, \qquad [4]$$

siendo: a, el $\left\{\begin{matrix}\text{lado}\\ \text{radio}\end{matrix}\right\}$ de $\left\{\begin{matrix}\text{el círculo}\\ \text{el cuadrado}\end{matrix}\right\}$ y k un coeficiente que depende del modo de vibración definido, por ejemplo, por el número y disposición de las líneas nodales. En dicha obra se dan tablas con diversos valores de k.

* * *

Pero la vibración *de placas, que en planta tienen forma de paralelogramo* de lados a y b y ángulos θ y $180° - \theta$, no ha sido estudiada detalladamente hasta estos últimos años por R. Bereuter en su escrito: *Untersuchungen über die Eigenfrequenz parallelogrammförmiger Platten.* Exponemos a continuación las fórmulas fundamentales y unos ábacos que permiten calcular inmediatamente, con suma facilidad, las frecuencias fundamentales en tres casos muy corrientes.

(*) El capítulo III de *Waves*, de C. A. Coulson, está dedicado al estudio de ondas en membranas, con aplicación a problemas en membranas rectangulares y circulares.

La ecuación que da la superficie elástica $\omega = \omega(x, y)$ de una placa con intensidad de carga $p(x, y)$, es de la forma:

$$\Delta \Delta \omega = \frac{p}{D} \ (*), \qquad [5]$$

siendo Δ el operador de Laplace; en coordenadas cartesianas rectangulares:

$$\Delta \Delta \omega = \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right) = \\ = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2}.$$

La función $\omega(x, y)$ cumplirá además las condiciones de contorno.

El trabajo elástico de deformación por flexión es:

$$A = \frac{D}{2}\int\int\left\{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}\right)^2\right\} dx\, dy, \qquad [6]$$

estando la integral extendida a toda la superficie de la placa.

En vez de emplear coordenadas rectangulares, pasa a coordenadas oblicuas (paralelas a los lados de la placa) α, β, con lo que la expresión [5] se transforma en:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^4} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial \beta^4} + 2(1 + 2\cos^2\theta)\frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} - \\ - 4\cos\theta\left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha^3 \partial \beta} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial \alpha \partial \beta^3}\right) = \frac{p \operatorname{sen}^4\theta}{D}. \qquad [5']$$

Utilizando también *tensiones oblicuas* (paralelas a dichos ejes coordenados), el trabajo de deformación toma la expresión:

$$A = \frac{D}{2}\int\int\left\{\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}\right)^2 + \right. \\ + 2(\cos^2\theta + \nu\operatorname{sen}^2\theta)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2} + \\ + 2[2\cos^2\theta + (1-\nu)\operatorname{sen}^2\theta]\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^2 - \\ \left. - 4\cos\theta\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial \beta^2}\right)\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta}\right\} d\alpha\, d\beta \ (**). \qquad [6']$$

(*) Véase, por ejemplo, A. Peña Bœuf, *Mecánica Elástica*, 1930, § 83 [b'], o S. Timoshenko, *Theory of plates and shells*, 1940, § 32 [a]; en el § 70 generaliza estas ecuaciones para placas con grandes deformaciones.

Biezeno y Grammel, en el capítulo III de su *Dinámica técnica*, dan las expresiones de $\Delta\Delta F$ de una función en distintos sistemas de coordenadas, así como distintas soluciones de la llamada ecuación bipotencial $\Delta\Delta F = 0$.

(**) La expresión de esta energía es fundamental para el cálculo de f. Obtenida A en función de ω, la determinación de la frecuencia es un problema matemático de mínimo (véase Timoshenko, *Vibraciones*...).

Con auxilio de [5'] y [6'] aplica Bereuter los métodos de Rayleigh y Ritz, determinando varias soluciones como expresión de la superficie elástica $\omega(\alpha, \beta)$ y de la *frecuencia fundamental* f *de vibración de placas empotradas sometidas a su peso propio*. Los resultados de las cuatro soluciones difieren poco entre sí. Toma como frecuencia la de expresión más sencilla. En la figura 1.ª se representan los valores de la expresión sin dimensión:

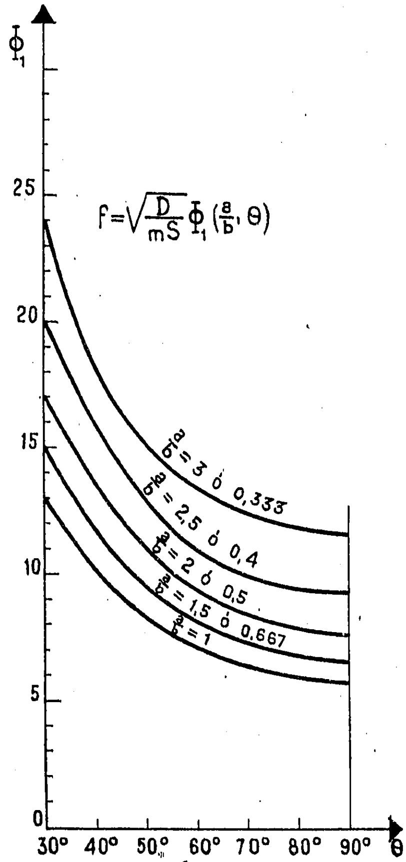

Figura 1.ª

$$\Phi_1\left(\frac{a}{b}, \theta\right) = \frac{f}{\sqrt{\dfrac{D}{(a\, b)(a\, b\, h\, \gamma/g)}}}.$$

Si llamamos S a la superficie de la placa $S = a\, b$ (cm.²), y a la masa total de la placa

$$m = a\, b\, h\, \frac{\gamma}{g} \ \ldots \ (\text{Kg./cm.}^{-1}/\text{seg.}^2),$$

podemos escribir:

$$f = \sqrt{\frac{D}{S \cdot m}} \cdot \Phi_1\left(\frac{a}{b}, \theta\right) (\text{seg.}^{-1}). \qquad [7]$$

El gráfico de la figura 2.ª, obtenido de modo análogo, nos permite calcular la *frecuencia menos de vibración de placas en forma de paralelogramo de masa* m *y con una carga de masa* M *colocada en su centro.* Si el peso de la placa es despreciable frente al de la carga $m = 0$:

$$f = \sqrt{\frac{D}{S\left(M + \frac{9}{64}\, m\right)}} \cdot \Phi_2 \left(\frac{a}{b},\ \theta\right) \ldots (\text{seg.}^{-1}). \quad [8]$$

Por último, la figura 3.ª nos permite calcular *la de las placas de masa* m *apoyadas en su contorno*, ya que:

$$f = \sqrt{\frac{D}{S\, m}}\ \Phi_3 \left(\frac{a}{b},\ \theta\right) \ldots (\text{seg.}^{-1}). \quad [9]$$

Observaciones:

1.ª) Si al utilizar la figura 2.ª hacemos $M = 0$, resulta:

$$f = \sqrt{\frac{D}{\frac{9}{64}\, m\, S}} \cdot \Phi_2 \left(\frac{a}{b},\ \theta\right) \ldots (\text{seg.}^{-1}).$$

Pero como la figura 1.ª nos hubiera dado

$$f = \sqrt{\frac{D}{m\, S}}\ \Phi_1 \left(\frac{a}{b},\ \theta\right) \text{seg.}^{-1},$$

y ambos valores deben ser iguales, resulta que $g\, \Phi_2 = 3\, \Phi_1$; lo que nos demuestra que las ordenadas de ambas figuras son proporcionales. Podemos, pues, prescindir de la figura 2.ª, y empleando sólo la figu-

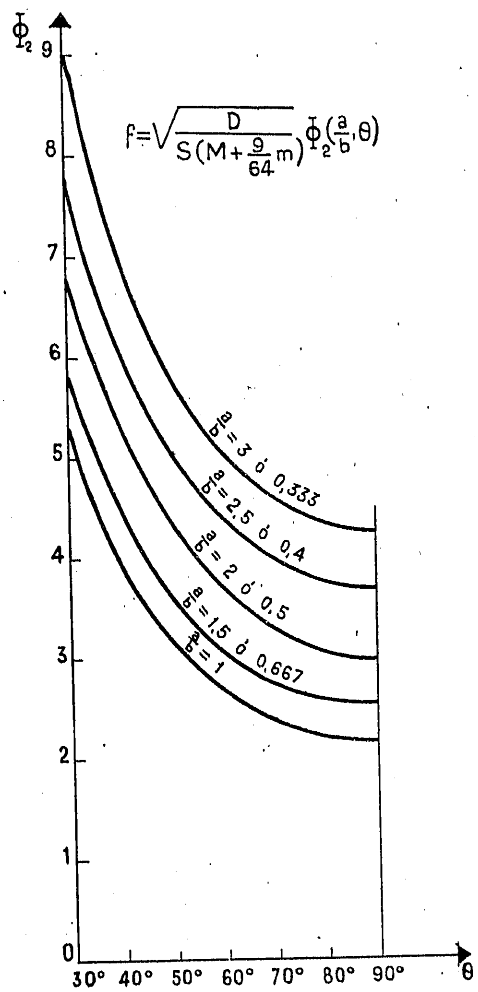

Figura 2.ª

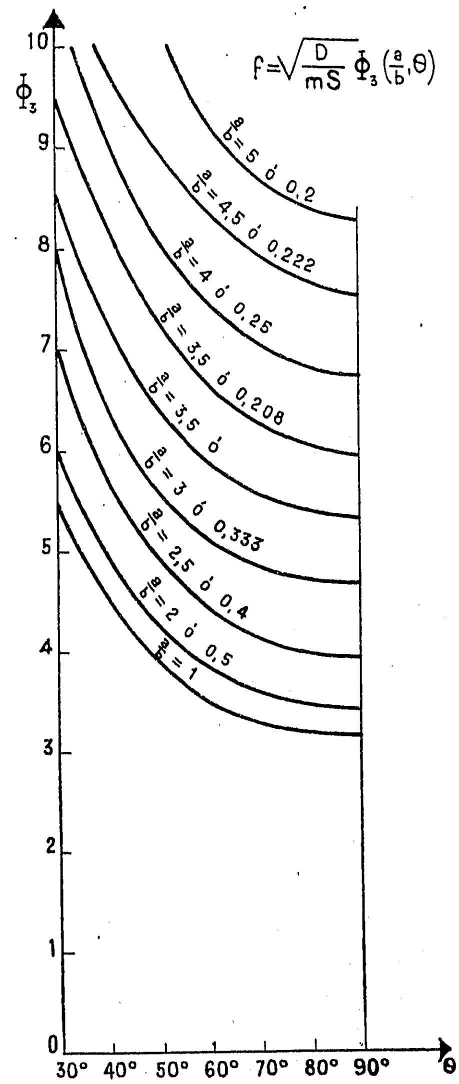

Figura 3.ª

ra 1.ª, calcular la frecuencia de las placas empotradas, en los dos casos, mediante la fórmula:

$$f = \sqrt{\frac{D}{S\left(m + \frac{64}{9} M\right)}} \cdot \Phi_1\left(\frac{a}{b}, \theta\right) \ldots (\text{seg.}^{-1}). \quad [10]$$

2.ª) Para $\theta = 90°$, obtendremos con la figura 3.ª los mismos valores que los dados por [2]; es decir, que:

$$\Phi_3\left(\frac{a}{b}, \theta = 90°\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) (*). \quad [11]$$

Si, además $\frac{a}{b} = 1$, placa cuadrada,

$$\Phi_3\left(\frac{a}{b} = 1, \theta = 90°\right) = \pi,$$

obteniendo para f un valor igual al expresado en [3].

3.ª) A la vista de los gráficos de las figuras 1.ª y 3.ª, se deduce que para ángulos que *no difieran demasiado de $\theta = 90°$, la frecuencia de vibración de las placas empotradas con sobrecarga uniforme es, aproximadamente, doble de las mismas placas, pero apoyadas* (**).

Ejemplo.— Calcular la frecuencia fundamental de vibración de una placa de hormigón armado, de 6 centímetros de espesor, de forma de paralelogramo de lados 1,60 × 2,40 m., que forman ángulos de 60° y 120° y empotrada en sus bordes. En el centro de la placa hay una carga de 250 kilogramos.

Solución:

Tomemos $E = 210\,000$ Kg./cm.² (*):

$$\nu = \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{ll} a = 240 \text{ cm.} & \theta = 60° \\ b = 160 \text{ cm.} & \gamma = 0{,}0024 \text{ Kg./cm.}^{-3} \\ h = 6 \text{ cm.} & g = 981 \text{ cm. /seg.}^{-2} \end{array} \right.$$

$$Mg = 250 \text{ Kgs.}$$

$$D = \frac{210\,000 \, . \, 6^3}{12\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)} = 4\,252\,500 \text{ Kg./cm.}$$

$$S = 240 \times 160 \times \text{sen } 60° = 33\,254 \text{ cm.}^2$$

$$M = \frac{250}{981} = 0{,}255 \text{ Kg./cm.}^{-1}/\text{seg.}^2$$

$$m = 33\,254 \times 6 \, \frac{0{,}0024}{981} = 0{,}488 \text{ Kg./cm.}^{-1}/\text{seg.}^2$$

En la figura 2.ª (**), para $\theta = 60°$ y $\frac{a}{b} = 1{,}5$ ó 0,667, hallamos $\Phi_2 = 3$; luego:

$$f = \sqrt{\frac{4\,252\,500}{33\,254\left(0{,}255 + \frac{9}{64}\, 0{,}488\right)}} \times 3 \simeq 120 \text{ seg.}^{-1}$$

(*) El eje vertical de la fig. 3.ª está graduado, por tanto:

$$\theta = 90° \left\{ \begin{array}{lllllllll} \frac{a}{b} = 1 & 2 & 2{,}5 & 3 & 3{,}5 & 4 & 4{,}5 & 5 \\ \Phi_3 = \pi & 1{,}25\,\pi & 1{,}45\,\pi & 1{,}666\,\pi & 1{,}893\,\pi & 2{,}125\,\pi & 2{,}361\,\pi & 2{,}6\,\pi \end{array} \right.$$

(**) Recordemos que en las vigas empotradas, de peso despreciable y cargadas en su centro, la frecuencia propia de vibración es *exactamente* doble que si la misma viga estuviese apoyada en sus extremos.

Esto se prueba inmediatamente considerando que la frecuencia vale:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\omega}},$$

siendo ω la flecha que la viga toma en cada caso. Las frecuencias de vibración están, pues, en razón inversa de las raíces cuadradas de las flechas.

(*) Aproximadamente $\frac{1}{10}$ del módulo de Young del hierro.

(**) Si de acuerdo con la observación 1.ª) utilizamos la figura 1.ª, obtenemos $\Phi_1 = 8$, y al aplicar [10], obtenemos para la frecuencia el mismo valor:

$$= \sqrt{\frac{4\,250\,000}{33\,200\left(0{,}488 + \frac{64}{9} \cdot 0{,}255\right)}} \times 8 \simeq 120 \text{ seg.}^{-1}$$