LAS ECUACIONES DE COMPATIBILIDAD DE LA TEORIA DE LA ELASTICIDAD, DEDUCIDAS DE LA EQUIVALENCIA DE FORMAS DIFERENCIALES CUADRATICAS

Por MIGUEL-ANGEL HACAR BENITEZ,
Ingeniero de Caminos.

Presenta el autor, a modo de ejemplo, una aplicación a la teoría de la Elasticidad de las condiciones de equivalencia de dos formas diferenciales cuadráticas, que aparecen expuestas en los tratados de Cálculo diferencial absoluto.

1. El cálculo diferencial absoluto.

También llamado cálculo tensorial, fué desarrollado por Darboux, Riemann, Christoffel, Levi-Civita, Ricci y otros. A pesar de sus grandes posibilidades de aplicación en todas las teorías de la Física Matemática, no pareció entrar de lleno en ella hasta que, en la segunda década del presente siglo, Einstein, genialmente, construyó su teoría de la Relatividad generalizada. Fué en cierto modo la coronación de los trabajos de los citados matemáticos; de una labor iniciada a mediados del pasado siglo.

Resultado de ello fué la invasión de la Mecánica y de la Física por la Geometría. El cálculo tensorial apareció como instrumento del físico para facilitar la exposición o síntesis de antiguas y nuevas teorías, para unificar o generalizar otras o para interpretar hechos de otra forma difíciles de explicar.

2. Una aplicación a la Elasticidad.

Vamos, a modo de ejemplo, a hacer una aplicación a la teoría de la Elasticidad. Veremos cómo las conocidas ecuaciones de compatibilidad de las deformaciones de un sólido no son sino las condiciones de equivalencia de dos formas diferenciales cuadráticas (del elemento diferencial de arco, antes y después de la deformación); dichas condiciones de equivalencia aparecen expuestas en todos los tratados de Cálculo diferencial absoluto.

No merecería la pena este estudio para la teoría ordinaria de la Elasticidad (deformaciones infinitesimales). Por medio muy sencillo fueron ya establecidas por Saint-Venant, y con ligeras modificaciones así aparecen en la mayoría de los tratados.

Pero es en la Elasticidad con deformaciones finitas, hoy tan en boga, y cuya aplicación para ciertos casos es ya imprescindible, donde la deducción de las ecuaciones de compatibilidad no es fácil si no se recurre, como decimos, al cálculo diferencial absoluto.

Como comprobación obtendremos, al suponer las deformaciones muy pequeñas (infinitesimales), las clásicas ecuaciones de Saint-Venant.

3. Ecuaciones de Saint-Venant.

En los tratados corrientes de Elasticidad, se acostumbra a llamar "ecuaciones de compatibilidad del estado de deformación" a las seis siguientes (1):

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2}$$

en las que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

---

(1) Que pueden escribirse simbólicamente en la forma:

$$\varepsilon_{ij,\,kl} + \varepsilon_{kl,\,ij} - \varepsilon_{ik,\,jl} - \varepsilon_{jl,\,ik} = 0;$$

donde:

$$\varepsilon_{ij,\,kl} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}, \text{ etc.}$$

(véase Sokolnikoff, *Math Theory of Elasticity*, 10).

siendo u, v, w los recorridos experimentados por una partícula (x, y, z).

Dichas ecuaciones, entre las derivadas parciales segundas de las ε_{ij}, fueron halladas por Saint-Venant.

Pueden obtenerse de modos muy diversos. Lo más sencillo es combinar las expresiones que dan $\varepsilon_{xx} \ldots$, $\varepsilon_{xy} \ldots$, por derivaciones adecuadas (1). También escribiendo que la expresión de los recorridos u, v, w es independiente del camino de integración, por lo que resulta una diferencial exacta (2).

Pero en estas deducciones se ha supuesto que las *deformaciones son infinitamente pequeñas.*

4. Deformaciones finitas.

Aparecen entonces también términos de segundo grado en las derivadas de los recorridos u, v, w, respecto a x, y, z. Las expresiones de las ε_{ij} son para deformaciones finitas:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$2\,\varepsilon_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$2\,\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\,\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$2\,\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

5. Equivalencia de formas diferenciales cuadráticas.

Las propiedades de las formas diferenciales cuadráticas nos permiten obtener las ecuaciones de compatibilidad, ya que no son otra cosa que el resultado de indicar que las formas diferenciales

$$d\,s'^2 = d\,x'^2 + d\,y'^2 + d\,z'^2$$

y

$$d\,s'^2 = (1 + 2\,\varepsilon_{xx})\,d\,x^2 + (1 + 2\,\varepsilon_{yy})\,d\,y^2 + \\ + (1 + \varepsilon_{zz})\,d\,z^2 + 2\,\varepsilon_{yz}\,d\,y\,d\,z + 2\,\varepsilon_{zx}\,d\,z\,d\,x + \\ + 2\,\varepsilon_{xy}\,d\,x\,d\,y.$$

que expresan el cuadrado del elemento lineal deformado, en función de las coordenadas x', y', z', del

(1) Véase Biezeno y Grammel, *Dinámica técnica*, 12.

(2) Sokolnikoff, obra cit., 10.

punto *después* de la deformación, o de las x, y, z, antes de la misma, sean *equivalentes* (1).

Pero la primera expresión de $d\,s'^2$ es de coeficientes constantes (unitarios), y el cálculo diferencial absoluto nos enseña que: "La condición necesaria y suficiente para que una forma diferencial cuadrática sea equivalente a una de coeficientes constantes, es que los símbolos de 4 índices de Riemann-Christoffel correspondientes a ella, sean todos nulos" (2).

Recordemos que, en general, una forma diferencial cuadrática puede escribirse:

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\mu,\nu=n} g_{\mu\nu}\,d\,x_\mu\,d\,x_\nu; \qquad \text{en que} \qquad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu};$$

y que llamaremos:

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

y $g^{(\mu\nu)} = g^{(\nu\mu)}$ al adjunto de $g_{\mu\nu}$ dividido por g.

6. Símbolos de Riemann-Christoffel.

Se denominan símbolos de Christoffel de tres índices de primera especie a (3):

$$\begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ \lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right).$$

(1) Dos formas diferenciales cuadráticas:

$$\sum_{rs} g_{rs}\,d\,x_r\,d\,x_s \ \text{ y } \ \sum_{rs} g'_{rs}\,d\,x'_r\,d\,x_s$$

(donde las g_{rs} son funciones dadas de las variables independientes $x_1, x_2 \ldots x_n$, así como las g'_{rs} lo son de las $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$), se dice son *equivalentes* cuando se puede pasar de la primera a la segunda mediante fórmulas de transformación que expresen las $x_1, x_2 \ldots x_n$ en función de las $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$.

(2) Entre las x y las x' evidentemente se verificará:

$$g'_{rs} = \sum_{ik} g_{ik}\,\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\,\frac{\partial x_k}{\partial x'_s},$$

o sea: $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaciones entre las derivadas parciales. Como en nuestro caso $n = 3$, quedan seis ecuaciones. Por tratarse de un caso muy especial (véase Plans y Freyre, *Cálculo diferencial absoluto*, págs. 16, 17 y 86), se reducen a la anulación de los símbolos de 4 índices $(r\,k,\ i\,h) = 0$.

(3) Los de segunda especie son:

$$\left\{\begin{matrix} \mu\ \nu \\ \lambda \end{matrix}\right\} = \sum_\alpha g^{(\lambda\alpha)} \begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{bmatrix}.$$

Los de primera especie en función de ellas son:

$$\begin{bmatrix} \mu\ \nu \\ \lambda \end{bmatrix} = \sum_\alpha g_{\lambda\alpha} \left\{\begin{matrix} \mu\ \nu \\ \alpha \end{matrix}\right\}.$$

Los símbolos de cuatro índices de Riemann-Christoffel pueden ser también de primera y de segunda especie.

Suele partirse de la definición de los de segunda especie, llegándose a determinar que los de primera son (1):

$$(r\,k,\,i\,h) = \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} r\,i \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} r\,h \\ k \end{bmatrix} +$$

$$+ \sum_{l\,m} g^{(l\,m}\left(\begin{bmatrix} r\,h \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,i \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k\,h \\ l \end{bmatrix}\right).$$

Así quedan sólo en función de los símbolos de tres índices de primera especie.

El número de estos símbolos diferentes de Riemann-Christoffel se demuestra que es $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$, que en nuestro caso, para $n = 3$ da 6, que son:

(12, 12)	(12, 13)
(23, 23)	(23, 21)
(31, 31)	(31, 32).

7. Ecuaciones de compatibilidad en el caso general.

Aplicado a nuestro caso, en que la forma cuadrática es:

$$d\,s'^2 = (1 + 2\,\varepsilon_{n\,x})\,d\,x^2 + (1 + 2\,\varepsilon_{y\,y})\,d\,y^2 + (1 +$$

$$+ 2\,\varepsilon_{z\,z})\,d\,z^2 + 2\,\varepsilon_{y\,z}\,d\,y\,d\,z + 2\,\varepsilon_{z\,x}\,d\,z\,d\,x + 2\,\varepsilon_{x\,y}\,d\,x\,d\,y$$

tenemos:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + 2\,\varepsilon_{x\,x} & \quad g_{23} &= \varepsilon_{y\,z} \\ g_{22} &= 1 + 2\,\varepsilon_{y\,y} & \quad g_{31} &= \varepsilon_{z\,x} \\ g_{33} &= 1 + 2\,\varepsilon_{x\,z} & \quad g_{12} &= \varepsilon_{x\,y} \end{aligned}$$

$$g = \begin{vmatrix} 1 + 2\,\varepsilon_{x\,x} & \varepsilon_{x\,y} & \varepsilon_{z\,x} \\ \varepsilon_{x\,y} & 1 + 2\,\varepsilon_{y\,y} & \varepsilon_{y\,z} \\ \varepsilon_{z\,x} & \varepsilon_{y\,z} & 1 + 2\,\varepsilon_{z\,z} \end{vmatrix}$$

Igualando ahora a cero las expresiones que dan los seis símbolos de cuatro índices, tendremos:

$$(12,\,12) = \frac{\partial}{\partial\,y}\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial\,x}\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} + \sum_{l,\,m=1}^{l,\,m=3} g^{(l\,m)}\left(\begin{bmatrix} 12 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 22 \\ l \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(23,\,23) = \frac{\partial}{\partial\,z}\begin{bmatrix} 22 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial\,g}\begin{bmatrix} 23 \\ 3 \end{bmatrix} + \sum_{l,\,m=1}^{l,\,m=3} g^{(l\,m)}\left(\begin{bmatrix} 23 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 32 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 33 \\ l \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(31,\,31) = \frac{\partial}{\partial\,x}\begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial\,z}\begin{bmatrix} 31 \\ 1 \end{bmatrix} + \Sigma\, g^{(lm)}\left(\begin{bmatrix} 31 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 33 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ l \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(12,\,13) = \frac{\partial}{\partial\,z}\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial\,x}\begin{bmatrix} 31 \\ 2 \end{bmatrix} + \Sigma\, g^{(lm)}\left(\begin{bmatrix} 31 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 \\ l \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(23,\,21) = \frac{\partial}{\partial\,x}\begin{bmatrix} 22 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial\,y}\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} + \Sigma\, g^{(l\,m)}\left(\begin{bmatrix} 12 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 23 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 22 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 31 \\ l \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(31,\,32) = \frac{\partial}{\partial\,y}\begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial\,z}\begin{bmatrix} 23 \\ 1 \end{bmatrix} + \Sigma\, g^{(l\,m)}\left(\begin{bmatrix} 23 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 31 \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 33 \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ l \end{bmatrix}\right) = 0,$$

que son las ecuaciones de compatibilidad en el caso general de deformaciones *finitas.*

---

(1) Se designan respectivamente por $(r\,k,\,i\,h)$ y $\{r\,k,\,i\,h\}$ a los de primera y segunda especie de cuatro índices. Entre ellos se verifica:

$$\{r\,\nu,\,i\,h\} = \sum_k g^{(\nu\,k)}\,(r\,k,\,i\,h)$$

$$(r\,k,\,i\,h) = \sum_\nu g_{k\,\nu}\,\{r\,\nu,\,i\,h\}$$

que son muy análogas a las que existen entre los símbolos de tres índices.

8. Desarrollo de las ecuaciones.

Desarrollemos los sumatorios; así resulta:

$$(12,\ 12)=\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}+g^{(11)}\left(\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}22\\1\end{bmatrix}\right)+2\,g^{(12)}\left(\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}22\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$+\,g^{(22)}\left(\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}22\\2\end{bmatrix}\right)+2\,g^{(23)}\left(\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}22\\2\end{bmatrix}\right)$$

$$+\,g^{(33)}\left(\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}11\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}22\\3\end{bmatrix}\right)+2\,g^{(31)}\left(\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}22\\3\end{bmatrix}\right)$$

(33, 23) = ...

(31, 31) = ...

$$(12,\ 13)=\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}31\\2\end{bmatrix}+g^{(11)}\left(\begin{bmatrix}31\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\1\end{bmatrix}\right)+2\,g^{(23)}\left(\begin{bmatrix}31\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$+\,g^{(22)}\left(\begin{bmatrix}31\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\2\end{bmatrix}\right)+2\,g^{(31)}\left(\begin{bmatrix}31\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$+\,g^{(33)}\left(\begin{bmatrix}31\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\3\end{bmatrix}\right)+2\,g^{(12)}\left(\begin{bmatrix}31\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}23\\2\end{bmatrix}\right)$$

(23, 21) = ...

(31, 32) = ...

9. Cálculo de los símbolos de tres índices.

El número de símbolos de tres índices es:

$$3\,C'^2_3=3\,C^2_{3+2-1}=3\,\frac{4\times 3}{1\times 2}=18.$$

Como

$$\begin{bmatrix}\mu\nu\\\lambda\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x_\nu}+\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda}\right)$$

a la vista de cada $g_{\mu\lambda}$ (función lineal muy sencilla de la respectiva $\varepsilon_{\mu\lambda}$) tenemos que los 18 símbolos son:

$$\begin{bmatrix}11\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial x}\qquad\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}\qquad\begin{bmatrix}31\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$\begin{bmatrix}12\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}\qquad\begin{bmatrix}22\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial y}\qquad\begin{bmatrix}23\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial z}$$

$$\begin{bmatrix}31\\3\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial x}\qquad\begin{bmatrix}23\\3\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial y}\qquad\begin{bmatrix}33\\3\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial z}$$

$$\begin{bmatrix}11\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}\quad,\quad\begin{bmatrix}22\\3\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial y}=\frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial z}$$

$$\begin{bmatrix}33\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{zx}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{xz}}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix}22\\1\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}\quad,\quad\begin{bmatrix}33\\2\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{zz}}{\partial y}$$

$$\begin{bmatrix}11\\3\end{bmatrix}=\frac{\partial\varepsilon_{zx}}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial z}$$

$$\begin{bmatrix}23\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$\begin{bmatrix}31\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_{zx}}{\partial y}\right)$$

$$\begin{bmatrix}12\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varepsilon_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\varepsilon_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial z}\right),$$

Valores que, sustituídos en las expresiones de los símbolos de cuatro índices, nos dan, al igualarlos a cero, las seis ecuaciones de compatibilidad que relacionan entre sí derivadas parciales primeras y segundas de las ε_{ij} con respecto a x, y, z.

Si los valores que tomamos para las ε_{ij} son los indicados en **4**, para deformaciones *finitas*, tendremos las ecuaciones de compatibilidad.

10. Comprobación de las fórmulas clásicas.

Tratándose de deformaciones infinitesimales, podemos considerar que las variaciones de las ε_{ij} con respecto a x, y, z, son despreciables, o sea que:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_i} \to 0,$$

con lo que resultan nulos los símbolos de Christoffel de tres índices (pero no sus derivadas). De este modo, los de cuatro índices resultan ser:

$$(r k, i h) = \frac{\partial}{\partial x_h}\begin{bmatrix} r i \\ k \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_i}\begin{bmatrix} r h \\ k \end{bmatrix},$$

anulándose las Σ.

Las condiciones de compatibilidad se simplifican muchísimo, pasando a ser:

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} 31 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} 22 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} 23 \\ 3 \end{bmatrix} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} 22 \\ 3 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} 31 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial y}\begin{bmatrix} 33 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} 23 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Al sustituir los [ ] por sus valores obtenidos en **9**, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x}\right) = 0$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y}\right) = 0$$

. . . .

. . . .

Efectuando operaciones, queda:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial z}\right)$$

. . . .

. . . .

que son las de Saint-Venant, como se quería probar.