

# CALCULO ELASTICO DE PLACAS PLANAS DE CONTORNO POLIGONAL

Por MIGUEL-ANGEL HACAR BENITEZ,  
Ingeniero de Caminos.

*Presenta el autor un estudio general sobre el tema arriba reseñado, y hace aplicaciones a casos particulares, tendiendo a demostrar que cuando los polígonos tienen más de 5 ó 6 lados hay poca diferencia en considerar la placa como circular.*

## 1. Introducción.

El cálculo elástico de placas planas de espesor uniforme <sup>(1)</sup> se hace partiendo de una ecuación en derivadas parciales de cuarto orden con dos variables independientes. Estas son, en general, las coordenadas curvilíneas de un punto del plano medio de la placa antes de la deformación. La función, que llamamos  $W$ , representa la elástica, o sea, la flecha que toma placa en cada punto. Dicha ecuación diferencial se resuelve en cada caso particular al tener en cuenta las condiciones en los límites. El caso más corriente, de placa rectangular, ha sido tratado ampliamente, y en todos los tratados de Elasticidad puede verse cómo se aborda el problema y se resuelve utilizando una serie doble de Fourier. La flexión de una placa triangular <sup>(2)</sup> apoyada en su contorno ha sido ya estudiada, reduciéndose el problema al conocido de la torsión de un prisma de sección también triangular. Las placas circulares y elípticas también han sido objeto de extensos estudios, tanto para sobrecargas uniformes como para cargas puntuales céntricas y excéntricas.

Una vez determinada la superficie elástica, el momento en cada punto, en las direcciones principales (de curvatura máxima y mínima de dicha superficie), queda determinado, así como las tensiones máxima y mínima.

Siguiendo a Navier, Saint-Venant, Hencky <sup>(3)</sup>, Timoshenko, etc., despreciaremos la deformación

debida al esfuerzo cortante <sup>(1)</sup>, lo cual es admisible si el espesor de la placa es pequeño comparado con las dimensiones en planta de la misma.

Supondremos que la deformación de la placa es pequeña comparada con el espesor, y que el material sigue la ley de Hooke.

En lo que sigue, partiremos de la ecuación general de las placas planas de material homogéneo. de espesor constante, pero elásticamente anisótropo. En el caso de isotropía se simplifica dicha ecuación. Sustituyendo entonces las dos coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , representativas de un punto del plano medio de la placa, por el complejo  $z$  de dicho punto y su conjugado  $\bar{z}$ , la ecuación clásica de las placas toma una forma tan sencilla que es inmediato la obtención de una solución particular (solución fundamental), a la cual hemos de superponer las soluciones de la ecuación biarmónica sin segundo miembro (funciones propias). Estas últimas pueden expresarse con auxilio de dos funciones,  $\Phi$  y  $\psi$ , de variable compleja.

Para el estudio de placas poligonales nos es de suma importancia hacer la representación conforme de un polígono en el semiplano, lo cual conseguimos por la transformación de Schwarz-Christoffel. Con otra transformación elemental queda representado el polígono en el círculo unitario.

Como caso particular interesante estudiamos las placas poligonales regulares con sobrecarga uniforme empotradas en sus bordes. Exponemos el modo de calcular los coeficientes del desarrollo de  $W$  en serie doble de coordenadas polares  $\rho, \theta$ , en el plano  $\xi$  del círculo unitario, resultado de las transformaciones efectuadas con el plano  $z$  del polígono.

Calculamos las flechas máximas, en el centro, para placas de contorno poligonal regular, de  $n = 3, 4, 5$  y  $6$  lados, comprobando que para  $n = \infty$ , o sea para la circular, la flecha obtenida comprueba la que conocíamos.

<sup>(1)</sup> E. Reisser, en el trabajo: "On the bending of elastic plates", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol 5, 1947, páginas 55-68; estudia la influencia del esfuerzo cortante, demostrando que en rigor hay que tenerlo en cuenta para determinar las condiciones en los bordes.

<sup>(1)</sup> El cálculo de placas de espesor variable se aborda en el conocido libro de Timoshenko *Theory of Plates and Shells*, 1940, pág. 283.

Para el caso de ser circulares, ver también Pichler: *Die Biegung Kereisymmetrischer Platten von Veränderlicher Dicke*, Berlín, 1928. Para placas de espesor variable, según una ley cuadrática y sometidas a sistemas de cargas disimétricas, ver "Unsymmetrische Biegung des Kreisringplatte von quadratisch veränderlicher Steifigkeit", de G. Olsson, en *Ingenieur Archiv*, 1939, 1940, 1942 y 1943.

<sup>(2)</sup> Ver Seth: "Bending of an equilateral plate", en los *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, octubre 1945, págs. 234-238.

<sup>(3)</sup> Ver la tesis doctoral de Hencky. Berlín, 1913, *Der Spannungszustand in rechteckigen Platten*.

Damos también la expresión de los momentos flectores, especialmente en el contorno, hallando su valor máximo, que tiene lugar en los puntos medios de los lados.

Los resultados obtenidos comprueban la convergencia de valores y la escasa importancia que tiene, para un número de lados superior a 5 ó 6, considerar la placa como circular.

## 2. Ecuación de la superficie elástica.

Para una placa anisótropa <sup>(1)</sup>, de espesor uniforme  $h$ , la ecuación diferencial que determina la flexión de la misma es:

$$b_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 3 b_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2 (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 3 b_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + b_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{12 p(x, y)}{h^3}, \quad [2-1]$$

en la cual las  $b_{ij}$  son las constantes elásticas;  $p(x, y)$  es la carga por unidad de superficie en el punto de coordenadas  $(x, y)$ .

Se supone únicamente que el plano  $xy$ , de la placa, es de simetría elástica.

Por ello el número de constantes o coeficientes, que sería de 15 <sup>(2)</sup> (cristal sometido a las condiciones de Cauchy), se reduce a 6.

La ecuación [2-1] puede ponerse en la forma simbólica:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 w = \frac{12 p(x, y)}{h^3}, \quad [2-2]$$

en que las  $D_i$  son los operadores lineales:

$$D_i = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_i \frac{\partial}{\partial x}, \quad [2-3]$$

en los que las  $\mu_i$  son las raíces de la ecuación característica:

$$b_{22} \mu^4 + 3 b_{16} \mu^3 + 2 (b_{12} + b_{66}) \mu^2 + 3 b_{16} \mu + b_{11} = 0. \quad [2-4]$$

Como las  $b_{ij}$  son reales, las cuatro  $\mu_i$  serán, en general, cantidades complejas conjugadas dos a dos:

$$\mu_1 = \alpha + \beta i; \quad \mu_2 = \gamma + \delta i; \quad \mu_3 = \bar{\mu}_1; \quad \mu_4 = \bar{\mu}_2. \quad [2-5]$$

La solución general de la ecuación [2-1] será:

$$w = w_0(x, y) + \sum_{k=1}^4 F_k(x + \mu_k y), \quad [2-6]$$

en la cual  $w_0(x, y)$  es una solución particular de [2-1], y las  $F_k$  son funciones arbitrarias.

(1) El caso de placa rectangular puede verse desarrollado en el trabajo de Hajimu Okubo "Stress systems in an anisotropic rectangular plate", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, vol. 21, 1941, págs. 162-176.

(2) Ver el libro clásico de Mathieu *Elasticité des corps solides*, primeros capítulos, y el de L. Brillouin *Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité*, págs. 232-237.

Como  $W$  es real, las  $F_k$  tienen que ser conjugadas dos a dos, con lo cual toma la forma:

$$w = w_0(x, y) + \Phi(z_1) + \bar{\Phi}(\bar{z}_1) + \psi(z_2) + \bar{\psi}(\bar{z}_2), \quad [2-7]$$

siendo:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= x + \mu_1 y, \\ z_2 &= x + \mu_2 y, \end{aligned} \right\} \quad [2-8]$$

y las  $\Phi$  y  $\psi$ , funciones arbitrarias.

Al establecer las condiciones de contorno se suele llegar a una sucesión de ecuaciones funcionales <sup>(1)</sup>, que pueden resolverse transformando las regiones  $R_1$  y  $R_2$  en que están  $z_1$  y  $z_2$  ( $z = x + iy$  está en una región  $R$ , la superficie media de la placa; al moverse  $z$  por [2-8],  $z_1$  y  $z_2$  se mueven en sus regiones) en el círculo unitario  $|\zeta| \leq 1$  en el plano auxiliar  $\zeta$ .

\* \* \*

En el caso de que el material de la placa tenga tres planos de simetría con respecto a sus propiedades elásticas y los tomamos como coordenados  $b_{16} = b_{26} = 0$ , simplificándose la ecuación diferencial <sup>(2)</sup>.

\* \* \*

Si el material es isotrópico:

$$b_{11} = b_{22} = b_{66} = \frac{E}{1 - \sigma^2}, \quad b_{16} = b_{12} = b_{26} = 0,$$

resultando la ecuación:

$$^{(3)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}, \quad [2-9]$$

siendo:  $\sigma$ , el coeficiente de Poisson, y  $D = E \frac{h^3}{1 - \sigma^2}$

la llamada rigidez de la placa a flexión.

(1) Del tipo, generalmente:

$$a_{1j} \Phi'(z_1) + a_{2j} \psi'(z_2) + \overline{a_{1j} \Phi'(z_1)} + \overline{a_{2j} \psi'(z_2)} = A_j(s); \quad j = 1, 2,$$

en las que las  $a_{ij}$  son constantes conocidas y  $A_j(s)$  son funciones conocidas en el contorno  $C$  de  $R$ .

(2) Este caso de anisotropía lo examina Timoshenko en el capítulo V de su *Theory of plates and Shells*.

(3) La ecuación característica se ha reducido a:

$$\mu^4 + 2\mu^2 + 1 = 0, \quad \text{ó} \quad (\mu^2 + 1)^2 = 0,$$

que tiene por raíces:

$$\mu = \pm i \text{ (dobles).}$$

Los operadores son de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \pm i \frac{\partial}{\partial x},$$

cuyo producto es, evidentemente,  $\Delta$  ( $\Delta$ ), ya que simbólicamente:

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} - i \frac{\partial}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} + i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 = \Delta \Delta.$$

El primer miembro de [2-9] puede escribirse en la forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

o en la  $\Delta \Delta w$ , en que  $\Delta$  ó  $\nabla$  es el operador de Laplace.

\* \* \*

Si en [2-9] cambiamos las variables  $x, y$  por otras  $z$  y  $\bar{z}$ , tales que:

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ \bar{z} = x - iy, \end{cases} \quad [2-10]$$

como entonces:

$$\begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \end{cases} \quad [2-11]$$

derivando:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}};$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right) i.$$

Derivando de nuevo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}.$$

Sumando miembro a miembro se deduce, al ampliar otra vez el laplaciano:

$$\Delta \Delta w = 16 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2}. \quad [2-12]$$

Si  $p(x, y)$ , o sea la sobrecarga por unidad de superficie, es constante, si llamamos:

$$k = \frac{p}{D}, \quad [2-13]$$

una solución particular de [2-9] es:

$$w_0 = \frac{1}{64} k z^2 \bar{z}^2, \quad [2-14]$$

ya que comprueba:

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \frac{k}{16}.$$

y por [2-12]:

$$\Delta \Delta w_0 = k.$$

La solución de la ecuación biarmónica  $\Delta \Delta w = 0$  <sup>(1)</sup> la obtenemos mejor escribiéndola con auxilio de [2-12] en la forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0,$$

que inmediatamente vemos tiene por solución:

$$w = z \Phi(\bar{z}) + \bar{z} \lambda(z) + \psi(z) + \mu(\bar{z}), \quad [2-15]$$

siendo  $\Phi, \lambda, \psi, \mu$ , funciones arbitrarias.

Como  $W$  es real, serán conjugadas dos a dos y  $W$  podrá ponerse en la forma:

$$w = z \Phi(\bar{z}) + \bar{z} \Phi(z) + \psi(z) + \overline{\psi(z)}. \quad [2-16]$$

La solución general de la elástica es:

$$w = \frac{1}{64} k z^2 \bar{z}^2 + z \Phi(\bar{z}) + \bar{z} \Phi(z) + \psi(z) + \overline{\psi(z)}, \quad [2-17]$$

suma de las dos anteriores, o sea de [2-14] y [2-16].

### 3. Transformación de Schwarz-Christoffel.

La representación de un área poligonal (plano  $z$ ) sobre el semiplano (plano  $t$ ), se realiza por la conocida transformación de Schwarz-Christoffel:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= A (t_1 - t)^{\alpha_1 - 1} \cdot (t_2 - t)^{\alpha_2 - 1} \dots (t_n - t)^{\alpha_n - 1} = \\ &= A \prod_{r=1}^n (t_r - t)^{\alpha_r - 1} \end{aligned} \quad [3-1]$$

en que  $A$  es una constante compleja en general;  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , valores reales representativos de los puntos, indicados en la figura del eje real del plano  $t$ , correspondientes a los vértices  $z_1, z_2, \dots, z_n$  del contorno poligonal (fig. 1.<sup>a</sup>).

Los ángulos internos del polígono son:

$$\pi \alpha_1, \pi \alpha_2, \dots, \pi \alpha_n,$$

y los exteriores:

$$\beta_1 = \pi (1 - \alpha_1), \quad \beta_2 = \pi (1 - \alpha_2), \dots, \beta_n = \pi (1 - \alpha_n).$$

(1) Ver los interesantes trabajos de Kolossoff, entre ellos "Théorèmes d'existence relatifs au problème biharmonique et aux problèmes d'élasticité à deux dimensions", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, París, 1931, vol. 192, páginas 221-223.

(2) Estas funciones,  $\Phi$  y  $\psi$ , se llaman también "potenciales complejos". Intervienen en la ecuación de equilibrio en el contorno; como puede verse en "Problemas elásticos planos", Milne Thomson, *Revista Matemática Hispanoamericana*, 1949, núm. 3, págs. 112-117.

Por consideraciones de Geometría elemental, resulta inmediato que:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^n \pi \alpha_r &= (n-2) \pi & \delta & \sum_{r=1}^n \alpha_r = n-2 \\ y \\ \sum_{r=1}^n (1 - \alpha_r) &= n - \sum_{r=1}^n \alpha_r = 2^{(1)} \end{aligned} \right\} [3-2]$$

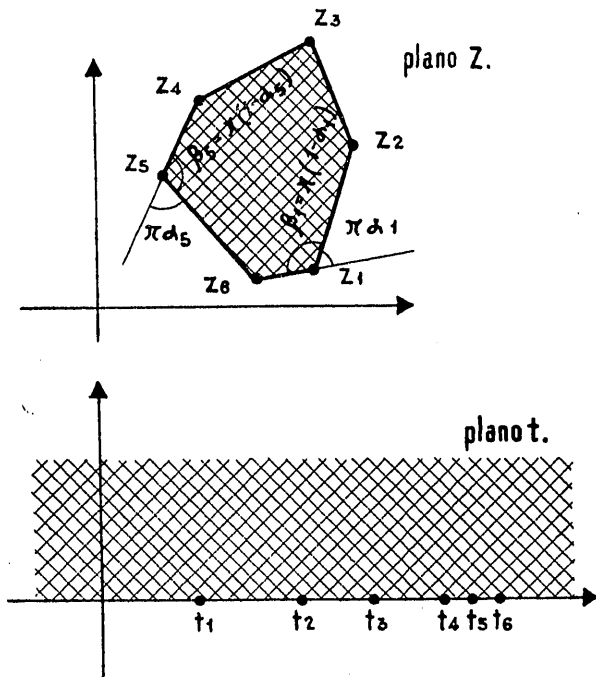


Figura 1.<sup>a</sup>

La expresión [3-1] puede ponerse en la forma:

$$z = A \int (t_1 - t)^{-\frac{\beta_1}{\pi}} \cdot (t_2 - t)^{-\frac{\beta_2}{\pi}} \dots (t_n - t)^{-\frac{\beta_n}{\pi}} dt + B, \quad [3-3]$$

en que  $\beta_r = \pi(1 - \alpha_r)$  son los ángulos exteriores del polígono, y en la cual  $B$ , del mismo modo que  $A$ , es una constante también compleja.

Si las  $t_r$  y las  $\beta_r$  están dadas, el polígono queda, en su forma, completamente definido. La constante compleja  $A$  afecta sólo a la escala, y la  $B$ , a la orientación del polígono.

Estas representaciones tienen extraordinaria importancia en Hidrodinámica, para el estudio del movimiento de un líquido en dos dimensiones <sup>(2)</sup>.

(1) Véase, por ejemplo, "Rectilinear polygon represented on a half-plane", en el capítulo XX de la *Theory of Functions of a Complex variable*, de Foryth, 2.<sup>a</sup> ed., 1900.

(2) Como puede verse en el capítulo IV de la *Hydrodynamics*, de Lamb, 6.<sup>a</sup> ed., 1945.

#### 4. Representación en el círculo unitario.

Para la representación de un polígono sobre círculo de radio unidad <sup>(1)</sup>, hay que pasar del plano  $t$  a otro,  $\zeta$ , de tal modo que el semiplano superior  $t$  se convierta en el interior de círculo unitario del  $\zeta$ , lo cual se logra, como se ve en la figura, haciendo la transformación (fig. 2.<sup>a</sup>):

$$\zeta = \frac{i-t}{i+t}. \quad [4-1]$$

Como:

$$\frac{i-t}{i+t} = \frac{t^2-1}{t^2+1} - \frac{2t}{t^2+1}i,$$

cada punto  $t_r$  del eje real del plano  $t$  se transforma en un punto de la circunferencia unitaria del plano, cuyo argumento  $\theta$  es tal que su tangente vale:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2 t_r}{t_r^2 - 1}, \quad [4-2]$$

o también:

$$\theta = \pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{t_r}. \quad [4-3]$$

Los planos  $z$  y  $\zeta$  quedan por medio de [3-1] y [4-1] perfectamente relacionados, ya que:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{d\zeta}; \quad [4-4]$$

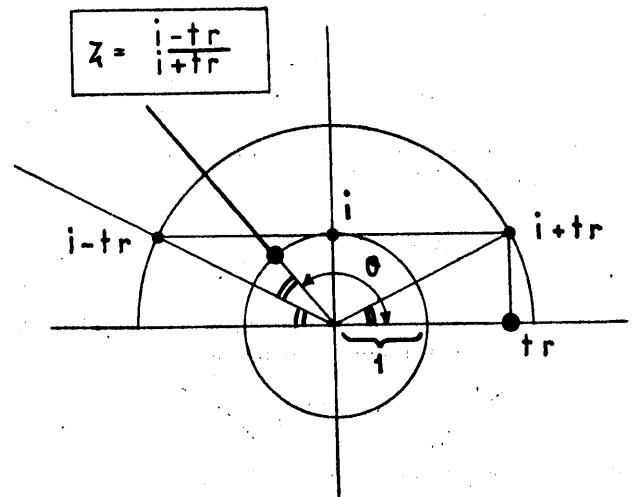


Figura 2.<sup>a</sup>

(1) Lo cual es posible por el teorema fundamental de la representación conforme de Riemann, que nos dice que "Dado un recinto simplemente conexo, se puede determinar una función regular en dicho recinto, por la cual queda representado el mismo biunívoca y conformemente en el interior del círculo del radio unidad".

$dz/dt$  se obtiene de [3-1], pero sustituyendo  $t$  por su valor, en función de  $\zeta$ , deducido de [4-1]:

$$\frac{dz}{dt} = A \prod_{r=1}^n \left[ i \frac{1-\zeta}{1+\zeta} - t_r \right]^{a_r-1} \quad [4-5]$$

$\frac{dt}{d\zeta}$  se obtiene directamente de [4-1]:

$$\frac{dt}{d\zeta} = - \frac{2i}{(1+\zeta)^2} \quad [4-6]$$

Sustituyendo en [4-4] los valores [4-5] y [4-6] resulta:

$$\frac{dz}{d\zeta} = -2i \prod_{r=1}^n (i - t_r)^{a_r-1} \cdot A \prod_{r=1}^n \left( 1 - \zeta \frac{i+t_r}{i-t_r} \right)^{a_r-1} \quad [4-7]$$

Si representamos por  $C$  la cantidad (constante) compleja:

$$C = -2i \prod_{r=1}^n (i - t_r)^{a_r-1} \cdot A, \quad [4-8]$$

resulta, en definitiva, que:

$$\frac{dz}{d\zeta} = C \prod_{r=1}^n \left( 1 - \zeta \frac{i+t_r}{i-t_r} \right)^{a_r-1} \quad [4-9]$$

es la transformación que buscamos, que nos representa el interior del polígono en el del círculo unidad. Como:

$$\left| \frac{i+t_r}{i-t_r} \right| = 1,$$

y en el interior de dicho círculo:

$$|\zeta| < 1,$$

resulta que:

$$\left| \zeta \frac{i+t_r}{i-t_r} \right|$$

es inferior a la unidad en la región que nos interesa transformar, por lo cual podemos desarrollar  $z$  en serie de potencias:

$$z = A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 + \dots \quad [4-10]$$

donde las  $A_i$  son constantes, complejas en general.

## 5. Condiciones de contorno.

Si las dos funciones,  $\Phi(z)$  y  $\psi(z)$ , que nos definen la elástica  $w(z, \bar{z})$  las suponemos desarrolladas en serie de potencias:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r \\ \psi(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} c_r z^r \end{aligned} \right\} \quad [5-1]$$

Con auxilio de [4-10] y escribiendo  $\zeta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$  obtenemos como expresión (real) de  $W$ :

$$w = f_0(\rho) + f_1(\rho) \cos \theta + f_2(\rho) \cos 2\theta + \dots \quad [5-2]$$

Si se trata, por ejemplo, de una placa de contorno que no toma flecha, tendremos que para (fig. 3.<sup>a</sup>):

$$\rho = 1, \quad w \equiv 0,$$

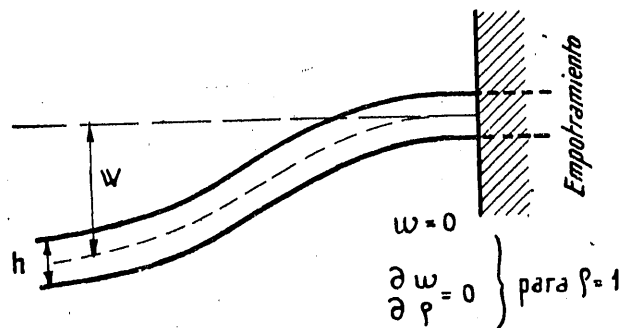


Figura 3.<sup>a</sup>

o sea que:

$$f_0(1) = 0; \quad f_1(1) = 0; \quad f_2(1) = 0; \quad [5-3]$$

y si además está empotrada, para:

$$\rho = 1; \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0; \quad [5-4]$$

de donde:

$$f'_0(1) = 0; \quad f'_1(1) = 0; \quad f'_2(1) = 0; \quad [5-5]$$

con lo cual obtenemos una sucesión infinita de ecuaciones que determinan las constantes desconocidas que resuelven el problema <sup>(1)</sup>.

(1) Ver Seth: "Bending of clamped rectilinear plates", en *The Philosophical Magazine*, núm. 279, abril 1947, páginas 292-297.

## 6. Representación de un polígono regular <sup>(1)</sup> sobre el círculo unidad.

Un polígono regular de  $n$  lados en el plano  $z$  que tenga su centro en el origen y tal que uno de sus vértices esté sobre el eje real a la unidad de distancia del origen, puede ser representado de modo conforme en un círculo, en el plano  $\zeta$ , de centro el origen y radio unidad, por medio de la relación:

$$z \int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{2}{n}} dx = \int_0^{\zeta} (1-\zeta^n)^{-\frac{2}{n}} d\zeta. \quad [6-1]$$

El interior del polígono y el del círculo se corresponden en la representación;  $n$  es el número de lados del polígono <sup>(2)</sup>.

Calculemos el valor de:

$$\int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{2}{n}} dx \quad [6-2]$$

para distintos valores de  $n$ :

Es fácil probar que su valor puede reducirse al cálculo de una integral euleriana. En efecto <sup>(3)</sup>:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-x^n)^{-\frac{2}{n}} dx &= \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 x^{\frac{1}{n}-1} (1-x)^{\left(1-\frac{2}{n}\right)-1} dx = \\ &= \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{2}{n}\right), \end{aligned}$$

que es una integral euleriana de primera especie.

Por la fórmula de reducción a la de segunda especie,  $\Gamma$ :

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

se obtiene como valor de la integral, que llamaremos  $k_n$ :

$$k_n = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)};$$

recordando que:

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

<sup>(1)</sup> El triángulo isósceles se representa sobre el círculo unitario mediante la transformación:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(1-\zeta)^{1-3\alpha}}{(1-\zeta^2)^{1-\alpha}}$$

en la que  $\pi\alpha$  es el valor de los ángulos iguales.

<sup>(2)</sup> Consúltese en el capítulo citado del libro de Forysth, en la pág. 642, el Ex. 3.

<sup>(3)</sup> Sobre funciones eulerianas de primera y segunda especie, ver, por ejemplo, E. Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, 5.ª ed., 1933, §§ 90 y 128.

resulta:

$$\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (\text{fig. 4.ª}),$$

con lo que la integral se reduce a:

$$k_n = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{\pi}{n} \left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 \Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right). \quad [6-3]$$

La curva representativa de  $\Gamma(x)$  tiene la forma indicada en la figura.

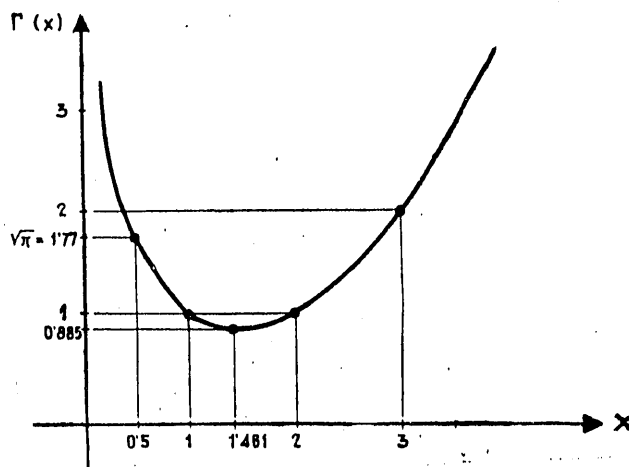


Figura 4.ª

Además, la función  $\Gamma(x)$  está tabulada <sup>(1)</sup>.

Sustituyendo en [6-3] los valores correspondientes, obtenemos para  $k_n$  los indicados en el siguiente cuadro:

Polígono	Triángulo equilateral	Cuadrado	Pentágono regular	Exágono regular		Círculo
$n = \text{núm. de lados} \dots$	3	4	5	6	....	$\infty$
$k_n$	1,768	1,312	1,175	1,098	....	1

[6-4]

Podemos, a la vista de [6-1] y [6-2], considerar a  $k_n$  como el radio del círculo circunscrito que resulta de transformar el círculo unitario mediante la relación:

$$\frac{dz}{d\zeta} = (1-\zeta^n)^{-\frac{2}{n}} \quad (\text{fig. 5.ª}) \quad [6-5]$$

<sup>(1)</sup> De Gauss, existe una tabla con los  $\log \Gamma(x)$ , desde  $x=1$  a  $x=2$ , con 20 cifras decimales. Werke, tomo III, página 161. Gotinga, 1866.

Desarrollamos esta expresión:  
Por la fórmula del binomio

$$\begin{aligned}(1 - \zeta^n)^{-\frac{2}{n}} &= 1 + \frac{1}{1!} \frac{2}{n} \zeta^n + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \zeta^{2n} + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \left(\frac{2}{n} + 2\right) \zeta^{3n} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{r!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \left(\frac{2}{n} + 2\right) \dots \\ &\dots \left(\frac{2}{n} + r - 1\right) \zeta^{rn} + \dots\end{aligned}$$

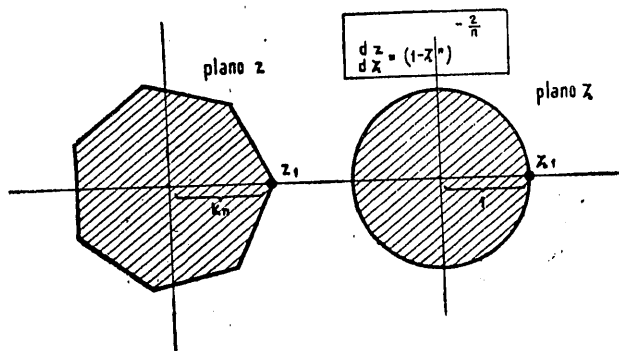


Figura 5.

Integrando por términos, resulta:

$$\begin{aligned}z &= \zeta + \frac{1}{1!} \frac{2}{n} \frac{1}{n+1} \zeta^{n+1} + \\ &+ \frac{1}{2!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \frac{1}{2n+1} \zeta^{2n+1} + \\ &+ \frac{1}{3!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \left(\frac{2}{n} + 2\right) \frac{1}{3n+1} \zeta^{3n+1} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{r!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \left(\frac{2}{n} + 2\right) \dots \\ &\dots \left(\frac{2}{n} + r - 1\right) \frac{1}{rn+1} \zeta^{rn+1} + \dots = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \left(\frac{2}{n} + 2\right) \dots \\ &\dots \left(\frac{2}{n} + r - 1\right) \frac{1}{rn+1} \zeta^{rn+1}\end{aligned}$$

o más abreviadamente:

$$z = \sum_{r=0}^{\infty} a_{rn+1} \zeta^{rn+1} \quad [6-6]$$

siendo:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1 \quad y \quad a_{rn+1} = \frac{1}{r!} \frac{2}{n} \left(\frac{2}{n} + 1\right) \left(\frac{2}{n} + 2\right) \dots \\ &\dots \left(\frac{2}{n} + r - 1\right) \frac{1}{rn+1}, \quad [6-7]\end{aligned}$$

como  $z = x + iy$  y  $\zeta = \rho (\cos \theta + i \sin \theta)$  y las  $a_{rn+1}$  son reales, de [6-6] se deduce que:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{r=0}^{\infty} a_{rn+1} \rho^{rn+1} \cos(rn+1)\theta; \\ y &= \sum_{r=0}^{\infty} a_{rn+1} \rho^{rn+1} \sin(rn+1)\theta; \quad [6-8]\end{aligned}$$

ya que por la fórmula de Moivre:

$$\zeta^k = \rho^k [\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)].$$

## 7. Expresión de la superficie elástica.

Para hallar la expresión de la elástica, calculemos primeramente el valor de  $z^2 \bar{z}^2$  en función de  $\rho$  y de  $\theta$ :

$$z^2 \bar{z}^2 = (x + iy)^2 (x - iy)^2 = (x^2 + y^2)^2.$$

Tomando de [6-8] los valores de  $x$  e  $y$  en función de  $\rho$  y de  $\theta$  y efectuando operaciones, resulta:

$$\begin{aligned}z^2 \bar{z}^2 &= [\rho^4 + 4a_{n+1}^2 \rho^{2n+4} + \\ &+ (a_{n+1}^2 + 2a_{2n+1})^2 \rho^{4n+4} + \dots]; \\ &+ 2\rho^n \cos n\theta [2a_{n+1} \rho^4 + \\ &+ 2a_{n+1} (a_{n+1}^2 + 2a_{2n+1}) \rho^{2n+4} + \dots]; \\ &+ 2\rho^{2n} \cos 2n\theta [(a_{n+1}^2 + 2a_{2n+1}) \rho^4 + \\ &+ 4a_{n+1} (a_{n+1} a_{2n+1} + a_{3n+1}) \rho^{2n+4} + \dots]; \\ &+ \dots = \sum f_r(\rho) \cdot \rho^{nr} \cos n\theta. \quad [7-1]\end{aligned}$$

La elástica se puede, pues, escribir en la forma:

$$\begin{aligned}w &= \frac{1}{64} k z^2 \bar{z}^2 + x \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn+1} \rho^{rn+1} \cos(rn+1)\theta + \\ &+ y \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn+1} \rho^{rn+1} \sin(rn+1)\theta + \\ &+ \sum_{r=0}^{\infty} B_{rn} \rho^{rn} \cos rn\theta, \quad [7-2]\end{aligned}$$

donde las  $A$  y las  $B$  son coeficientes desconocidos que determinaremos.

Sustituyendo en [7-2] el valor [7-1] queda  $W$  en la forma:

$$w = \Sigma [B_{ns} + \sum_{r=0}^{\infty} (a_{rn+1} A_{rn+ns+1} + a_{rn+ns+1} A_{rn+1}) \rho^{2rn+2} + \frac{1}{64} k f_s(\rho)] \rho^{ns} \cos ns\theta. \quad [7-3]$$

### 8. Cálculo de sus coeficientes.

Las  $A$  y las  $B$  (pues las  $a$  se calcularon en [6-7], se obtienen de las ecuaciones de contorno, que en el apartado anterior vimos que para placas empotradas eran las indicadas en [5-3] y [5-5], que en este caso se convierten en:

$$\left. \begin{aligned} B_0 + \sum_0^{\infty} a_{rn+1} A_{rn+1} + \frac{1}{64} k f_0(1) &= 0; \\ \sum_0^{\infty} (rn+1) a_{rn+1} A_{rn+1} + \frac{1}{64} k f'_0(1) &= 0; \end{aligned} \right\} \quad [8-1]$$

$$\left. \begin{aligned} B_n + \sum_0^{\infty} (a_{rn+1} A_{rn+n+1} + a_{rn+n+1} A_{rn+1}) + \frac{1}{64} k f_1(1) &= 0; \\ n B_n + \sum_0^{\infty} (2rn+n+2) (a_{rn+1} A_{rn+n+1} + a_{rn+n+1} A_{rn+1}) + \frac{1}{64} k f'_1(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [8-2]$$

Si eliminamos las  $B$ , obtenemos una serie infinita de ecuaciones para las  $A$  obtenidas, dando en la expresión:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (rn+1) (a_{rn+1} A_{rn+ns+1} + a_{rn+ns+1} A_{rn+1}) + \frac{1}{128} k [f'_s(1) + ns f_s(1)] = 0, \quad [8-3]$$

valores a  $s$  desde 1 a  $\infty$ . Todas estas ecuaciones son de primer grado en las  $A$ .

### 9. Determinación de la flecha máxima.

Determinadas éstas, la primera de las ecuaciones [8-1] da  $B_0$ , que es proporcional a la flecha en el centro de la placa.

Vale:

$$\frac{1}{64} k B_0,$$

en el caso de placa poligonal regular de bordes empotrados y de radio de la circunferencia circuns-

crita  $k_n$  (que en los cálculos transformamos en el círculo unitario).

Como las flechas son proporcionales a las cuartas potencias del radio de la placa, si el de la que consideramos es  $c_n$ , resulta que la flecha en el centro valdrá:

$$w_0 = \frac{1}{64} k \frac{c_n^4}{k_n^4} B_0. \quad [9-1]$$

Las  $k_n$  fueron obtenidas en [6-4].

Calculando  $B_0$  para  $n=3$ , se obtiene, aproximadamente, 0,8. para  $n=4$ ,  $B_0$  vale casi 1. Por [9-1] vemos que en el caso de plana circular, o sea,  $n=\infty$ , como  $k_n$  vale 1 y  $c_n$  es el radio, forzosamente  $B_0$  valdrá 1, ya que por el cálculo clásico de placas circulares sabemos que entonces:

$$w_0 = \frac{1}{64} k c^4. \quad [9-2]$$

Es decir que, exceptuando el caso de la placa triangular, resulta que, aproximadamente,  $B_0=1$ . La flecha máxima, en el centro de la placa, vendrá dada por:

$$w_0 = \frac{1}{64} k c_n^4 \cdot \xi_n, \quad [9-3]$$

en la cual:

$$\xi_n \simeq \frac{1}{k_n^4} \quad [9-4]$$

y, como de costumbre,  $k = \frac{p}{D}$ , siendo  $p$  la sobrecarga por unidad de superficie y  $D$  su rigidez a flexión.

Para distintos polígonos, tenemos así:

N.º de lados : $n =$	3	4	5	6	...	$\infty$ (círculo)
Coefficiente : $\xi_n =$	0,0800	0,3360	0,5270	0,684...		1,000

[9-5]

### 10. Momentos flectores.

Conocida la expresión analítica de la superficie elástica  $w = w(x, y)$ , los momentos flectores por unidad de ancho en las direcciones  $OX$  y  $OY$  se deducen, como sabemos, de:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D \left( \frac{1}{r_x} + \sigma \frac{1}{r_y} \right) \\ M_y &= D \left( \frac{1}{r_y} + \sigma \frac{1}{r_x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{fig. 6.ª}), \quad [10-1]$$



en las que  $r_x, r_y$  son los radios correspondientes de curvatura. Como:

$$r_x = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}, \quad r_y = \frac{\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}},$$

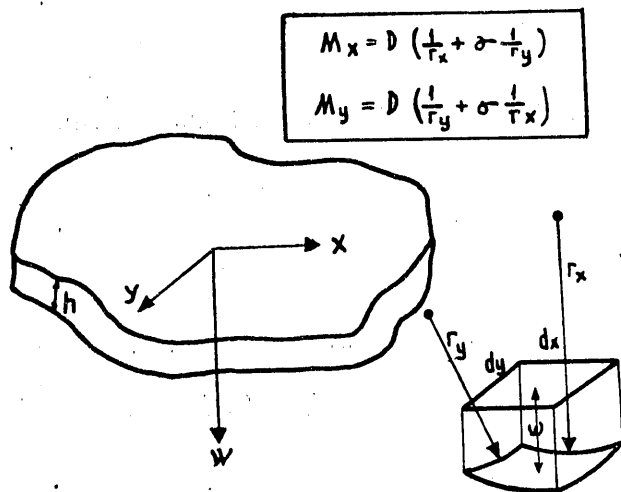


Figura 6.<sup>a</sup>

y por tratarse de pequeñas deformaciones  $\frac{\partial w}{\partial x}$  y

$\frac{\partial w}{\partial y}$  son despreciables, resulta:

$$\frac{1}{r_x} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{r_y} \approx \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad [10-21]$$

y las [10-1] se convierten en:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad [10-3]$$

Al pasar en la transformación del plano  $z$  al  $\zeta$ , si  $s$  y  $v$  son direcciones perpendiculares, tangente y normal al contorno, como éste se transforma en la circunferencia unitaria  $\theta, \rho = 1$ , las derivadas (direccionales y de segundo orden) de  $W$  con respecto a  $\left\{ \begin{smallmatrix} v \\ s \end{smallmatrix} \right\}$ , pasan a ser, respectivamente en el plano  $\zeta$ , las de  $W$  con relación a  $\left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \theta \end{smallmatrix} \right\}$ . Por tratarse de derivadas segundas, estarán éstas en proporción al cuadrado de la escala, o sea que:

$$\frac{\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}} = \frac{\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}}{\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2 \quad (\text{fig. 7.}^a) \quad [10-4]$$

Con lo cual el momento de empotramiento resulta ser:

$$\left. \begin{aligned} M &= D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) = \\ &= D \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad [10-5]$$

## 11. Momentos de empotramiento: máximos.

Al ser el empotramiento inmóvil, la curvatura de la superficie elástica en la dirección de la tangente al borde es nula, o sea que  $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0$  para  $\rho = 1$ . Los coeficientes de los  $\cos(s_n x)$  son cero en el contorno. Por esto, el momento máximo tiene lugar en los puntos medios de los lados, que corresponden a:

$$\theta = \frac{2k' + 1}{n} \cdot \pi, \quad [11-1]$$

con lo cual y de [6-5] se deduce que:

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \left| (1 - \zeta^n)^{\frac{2}{n}} \right| = (1 - 2\rho^n \cos n\theta + \rho^{2n})^{\frac{1}{n}}. \quad [11-2]$$

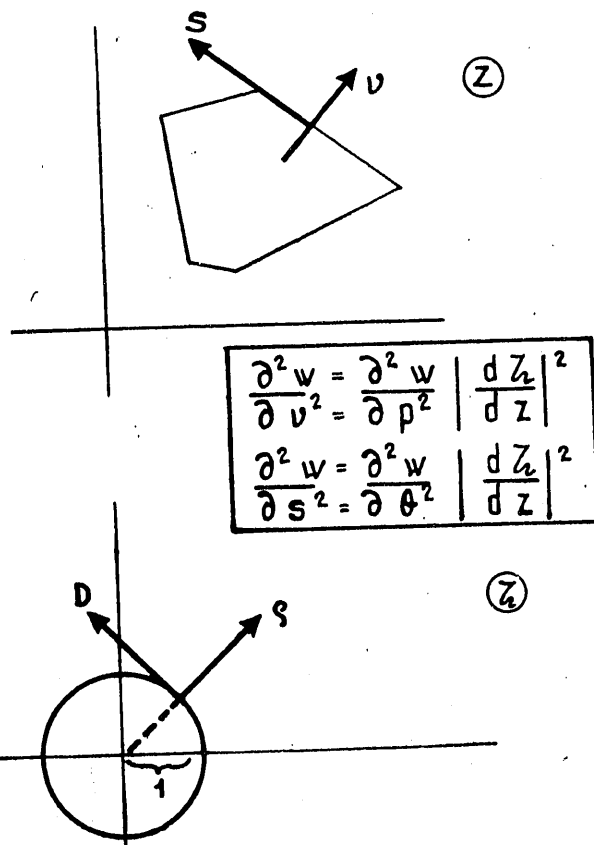


Figura 7.<sup>a</sup>

Por ejemplo, en el punto medio:

$$k' = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{n}, \quad \cos n\theta = -1,$$

y como  $\rho = 1$ , queda:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 2 \frac{2}{n}. \quad [11-3]$$

De las expresiones de la elástica dadas en 7 y por lo indicado en 10, se deduce inmediatamente que:

$$M_{\max} = D \Delta w = \frac{1}{4} k (x^2 + y^2) + \left. + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn+1} \rho^{rn+1} \cos(rn+1)\theta \right] \right\} [11-4]$$

siendo  $\frac{\partial}{\partial x}$  el resultado de aplicar el operador:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial x}{\partial \rho} - \frac{\partial}{\rho \partial \theta} \frac{\partial y}{\partial \rho} \right] \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|. \quad [11-5]$$

Para el punto medio del lado del polígono tenemos en el círculo unitario el punto  $\rho = 1$ ,  $\theta = \frac{\pi}{n}$  por lo cual resultan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \rho} &= \cos \frac{\pi}{n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) a_{rn+1}, \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \sin \frac{\pi}{n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) a_{rn+1}, \end{aligned} \right\} [11-6]$$

y también que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn+1} \rho^{rn+1} \cos(rn+1)\theta \right] &= \\ &= \cos \frac{\pi}{n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) A_{rn+1} \\ \frac{\partial}{\rho \partial \theta} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn+1} \rho^{rn+1} \cos(rn+1)\theta \right] &= - \\ &= -\sin \frac{\pi}{n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) A_{rn+1} \end{aligned} \right\} [11-7]$$

Así, la expresión [11-4] se convierte en:

$$M_{\max} = D \frac{k}{4} \left[ \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r a_{rn+1} \right]^2 + \left. + 2 \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) A_{rn+1} \right\} [11-8]$$

Teniendo en cuenta las relaciones de las  $k_n$  con las  $a_{rn+1}$  antes obtenidas, resulta que:

$$M_{\max} = D \left[ \frac{k}{4} c_n^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} + \left. + 2 \frac{1}{n} \frac{c_n^2}{k_n^2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) A_{rn+1} \right] \right\} [11-9]$$

Si en vez del radio  $c_n$  del polígono utilizamos el lado y le llamamos  $2a$ , como  $a = c_n \sin \frac{\pi}{n}$ , el momento anterior se expresa por:

$$M_{\max} = D \left\{ \frac{k}{4} a^2 \cot^2 \frac{\pi}{n} + \left. + 2 \frac{1}{n} \frac{a^2}{k_n^2} \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) A_{rn+1} \right\} \right\} [11-10]$$

## 12. Casos del triángulo, cuadrado y círculo.

Las series:  $\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (rn+1) A_{rn+1}$  toman valores comprendidos entre:

$$-\frac{k}{64} \quad \text{y} \quad -\frac{4k}{64}. \quad [12-1]$$

Para el triángulo equilátero y el cuadrado  $-\frac{k}{64}$  puede aceptarse, con lo cual, según [11-9]:

Triángulo:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\max}}{D c_3^2} &= \frac{k}{4} \cos^2 \frac{\pi}{3} - \frac{2^{1+\frac{2}{3}}}{k_3^2} \frac{k}{64} = \\ &= (0,0626 - 0,0159) k = 0,0467 k, \end{aligned}$$

y como:

$$k = \frac{p}{D}, \quad \frac{M_{\max}}{p c_3^2} = 0,0467. \quad [12-2]$$

Del mismo modo para el cuadrado:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\max}}{D c_4^2} &= \frac{k}{4} \cos^2 \frac{\pi}{4} - \frac{2^{1+\frac{2}{4}}}{k_4^2} \frac{k}{64} = \\ &= (0,125 - 0,025) k = 0,100 k. \end{aligned} \quad [12-3]$$

Para la circunferencia el valor de la  $\Sigma$  resulta ser, precisamente,  $-\frac{4k}{64}$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\max}}{D c_{\infty}^2} &= \frac{k}{4} \cos^2 0^\circ - \frac{2^{1+\frac{2}{\infty}}}{c_{\infty}^2} \frac{4k}{64} = \frac{k}{8}; \\ \frac{M_{\max}}{p \cdot c_{\infty}^2} &= 0,125. \end{aligned} \quad [12-4]$$

Por tanto, formamos el siguiente cuadro:

POLÍGONO	Triángulo equilátero	Cuadrado		Círculo
$n = \text{número lados} \dots\dots\dots$	3	4	....	$\infty$
$\frac{M_{\max}}{p c_n^2} \text{ (puntos medios lados).}$	0,0467	0,1000	...	0,125