

# DETERMINACION DE LA DISTRIBUCION DEL OLEAJE EN PROFUNDIDADES REDUCIDAS

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ,  
Ingeniero de Caminos.

En este segundo artículo se hacen también resaltar las concordancias del método expuesto con el método general de los planos de oleaje en profundidades reducidas, que es donde aquél únicamente pudiera ser empleado. Numerosas de las pretendidas modificaciones extranjeras, posteriores a la publicación del método de los planos de oleaje, se refieren al trazado de las normales a las líneas de onda, reconociéndose en varias de ellas que no es posible el trazado de dichas normales mediante sus radios de curvatura, generalmente mayores que los permitidos por el compás, aunque pudieran ser trazadas estas curvas por otros procedimientos.

## 9. Construcciones gráficas.

La expresión anterior nos indica que si llamamos  $\theta$  al ángulo que la dirección del rayo forma con el gradiente de profundidades, es claro que (fig. 7.º):

$$\frac{1}{R} = |\text{grad } \log c| \sin \theta.$$

$$\overline{BA} = \frac{d}{d\sigma} \log c \overrightarrow{S};$$

$$\overline{CA} = \text{grad } \log c;$$

$$\overline{BC} = \frac{1}{R} \overrightarrow{n};$$

en que  $\overrightarrow{S}$  y  $\overrightarrow{n}$  son vectores unitarios tangente y normal, respectivamente, al rayo.

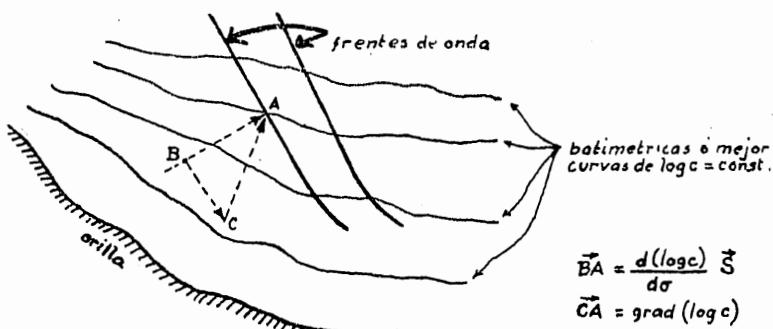


Figura 7.º

El modo de avanzar la ola queda claro y fácilmente determinado. Las normales a los frentes de onda (rayos), representados por los vectores unitarios  $\overrightarrow{S}$  son desviados a causa de la variación de la profundidad. La fórmula [8-2] expresa esto con toda generalidad y explica el conocido fenómeno de la tendencia a ponerse las olas paralelamente a la orilla al ir avanzando hacia ella por un fondo en declive.

La construcción es inmediata. En primer lugar, si tenemos un plano con curvas

batimétricas de equidistancia  $\Delta H$ , que puede ser  $1/2$  ó  $1$  m., se determinan (fig. 8.º) en diversos puntos,  $A$ , los vectores  $\text{grad } (\log c)$ . Para ello, si  $H$  y  $H + \Delta H$  son dos batimétricas consecutivas, si  $\delta$  es la distancia entre ellas en cada punto, entonces:

$$|\text{grad } \log c| = \left| \frac{\log c(H) - \log c(H + \Delta H)}{\delta} \right|.$$

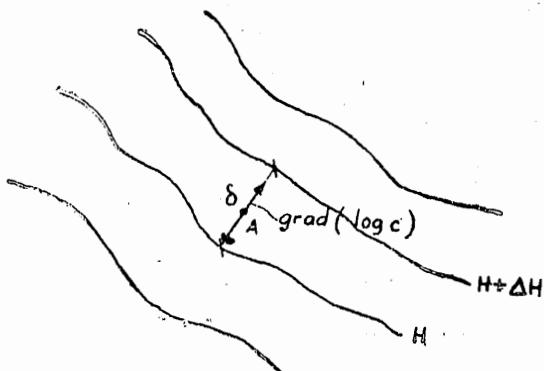


Figura 8.º

Como  $c(H) = \sqrt{gH}$  resulta, en definitiva, después de simplificar:

$$|\text{grad } \log c| = \frac{2\delta}{\log(H + \Delta H) - \log H}.$$

En puntos  $A$  entre cada dos curvas y perpendicularmente a ambas se dibuja el vector  $\text{grad } \log c$  (que irá dirigido hacia las profundidades mayores, o sea en dirección contraria a la orilla). Estos vectores nos sirven para todos los oleajes a estudiar, cualquiera que sea su dirección.

Al tratarse de un frente de onda determinado (figura 9.º) formado en alta mar, al ir encontrando distintos fondos es influido por los vectores  $\text{grad } (\log c)$  antes determinados, con los que componen los radios de curvatura sucesivas  $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{R_3}, \dots$  que determinan las trayectorias  $A_1, A_2, A_3$ .

En las expresiones anteriores se comprueba que si  $c$  es constante, o sea, en profundidad invariable, como  $\text{grad}(\text{const}) = 0$ , resulta  $R = \infty$ ; es decir, las ondas avanzan sin curvarse.

Desarrollemos algunos cálculos:

$$\begin{aligned} |\text{grad} \log c| &= |\text{grad} \log \sqrt{gH}| = \left| \text{grad} \left( \frac{1}{2} \log H \right) \right| = \\ &= \left| \text{grad} \left( \frac{1}{2} \log H \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \text{grad}(\log H) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\log(H + dH) - \log H}{dS} = \frac{\log \left( 1 + \frac{dH}{H} \right)}{2dS}, \end{aligned}$$

estando tomado  $dS$  y  $dH$  en el sentido de las líneas de máxima pendiente del fondo.

Desarrollando en serie:

$$\log \left( 1 + \frac{dH}{H} \right) = \frac{dH}{H} - \frac{(dH)^2}{2H^2} + \frac{(dH)^3}{3H^3} - \dots$$

y sustituyendo:

$$\begin{aligned} |\text{grad} \log c| &= \frac{1}{2dS} \left( \frac{dH}{H} - \frac{(dH)^2}{2H^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2H} \frac{dH}{dS} \left( 1 - \frac{dH}{2H} + \dots \right). \end{aligned}$$

Se puede sólo tomar el primer término con tal de que las curvas estén suficientemente próximas. Si las batimétricas están a 1 m. de equidistancia, el error será menor del 5 % para  $\frac{\Delta H}{2H} < \frac{5}{100}$ , o sea para profundidades  $H$  mayores de 10 m.

En cambio, para profundidades entre 5 y 10 m., se tomarán las batimétricas de forma que:

$$\frac{\Delta H}{2 \times 5} \leq \frac{5}{100};$$

o sea a equidistancia  $\Delta H = 0,50$  m. Es decir, que la equidistancia será para estar dentro del 5 % de error a cada profundidad, por lo menos igual a 1/10 de dicha profundidad. Es una regla que podemos aplicar a las construcciones gráficas del método.

De lo expuesto resulta que:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2H} \frac{dH}{dS} \text{sen} \theta.$$

Pero  $\frac{dH}{dS} = K$  es la expresión de la máxima pendiente  $K$  del fondo en cada punto, y  $2H$ , el doble de la profundidad; luego:

$$R = \rho / \text{sen} \theta \quad (\text{fig. 10});$$

siendo:

$$\rho = \frac{2H}{K}$$

y teniendo la representación indicada en la figura 10.

Por ello, dibujados los  $\rho$  de distintos puntos, queda determinado el radio de curvatura  $R$  del rayo que pase por cada punto.

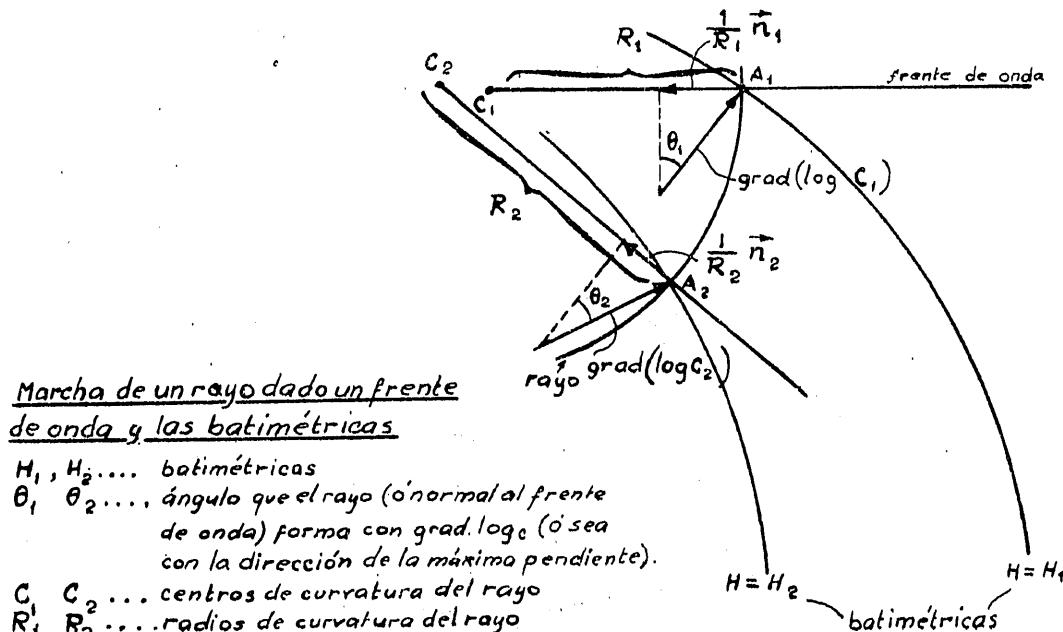


Figura 9.

El lugar geométrico de los centros de curvatura de los distintos rayos correspondientes a las olas que puedan llegar a un punto  $A_i$  es una recta que (figura II) dista  $|\rho_i|$  de dicho punto y que es perpendicular en el extremo de  $\rho_i$ .

En la figura vemos claramente cómo se dibujan los centros de curvatura y se modifica por dicha curvatura la marcha de los rayos.

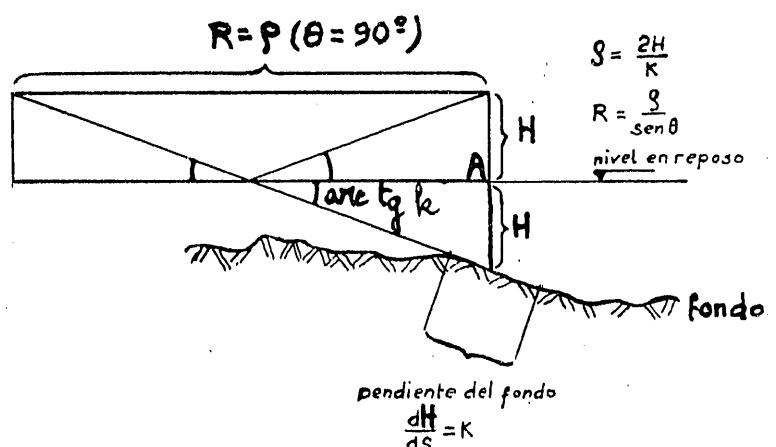
Con  $\rho$  se expresa, pues, el radio de curvatura  $R$  que tendrían los rayos que avanzasen *paralelamente* a las batimétricas.

## 10. Casos particulares.

En el caso en que las batimétricas son rectas paralelas a la orilla (en general, no serán equidistantes), las líneas de frentes de onda se obtendrán unas de otras por traslación paralela a la orilla. Tomaremos los ejes como se indica en la figura 12. El  $OY$  será la orilla y el  $OX$  la perpendicular. Por tanto, la profundidad  $H$  será sólo función de  $x$ .

Como:

$$|\text{grad } \psi|^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2.$$



$R = g/k$  es el radio de curvatura (mínimo) correspondiente a un frente de onda paralelo a la máxima pendiente del fondo,  $\theta = 90^\circ$

$R = \infty$  es el radio de curvatura máximo correspondiente a un frente de onda perpendicular a la máxima pendiente del fondo,  $\theta = 0^\circ$

Figura 10.

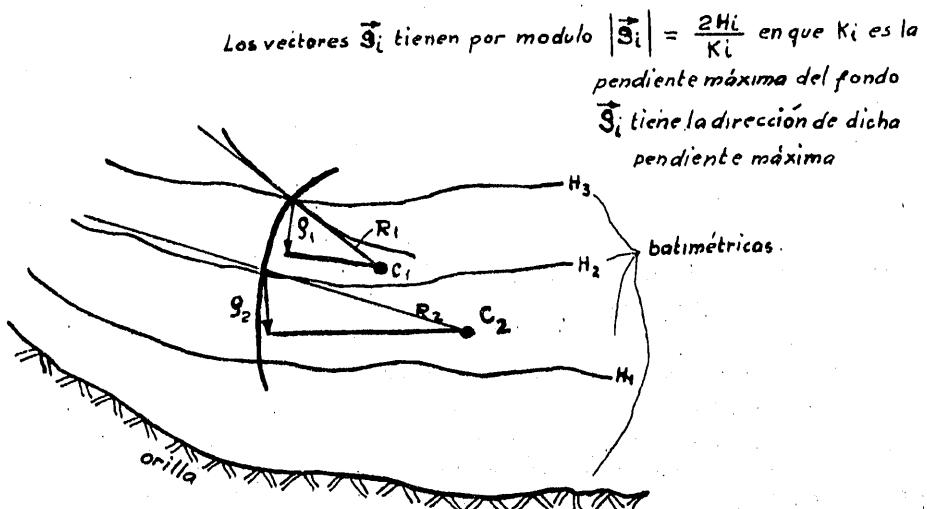


Figura II.

la ecuación del frente de ondas puede escribirse en la forma:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 = \frac{c^2_0}{c^2}.$$

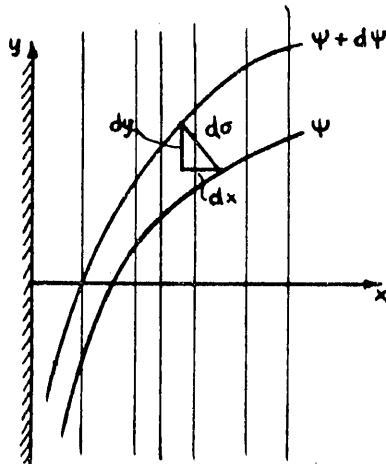


Figura 12.

Como  $c$  es función sólo de  $x$ , por serlo la profundidad:

$$\left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y}\right)^2 = \frac{c^2_0}{c^2(x)}.$$

Como vimos que a lo largo de un rayo se verifica que (fig. 12):

$$\frac{d}{d\sigma} \left( \frac{1}{c} \frac{dy}{d\sigma} \right) = - \frac{\frac{dc}{dy}}{c^2},$$

al ser  $c$  función sólo de  $x$ , el segundo miembro es nulo, quedando:

$$\frac{c_0}{c} \frac{dy}{d\sigma} = \psi_y = \text{const} = a \frac{dy}{d\sigma},$$

es, pues, el seno del ángulo  $\alpha$  que el rayo forma con el eje  $OX$ ; pero por ser  $d\sigma$  y  $dS$  perpendiculares si  $y'$  es el coeficiente angular del frente de avance:

$$\frac{dy}{d\sigma} = \frac{dx}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

de donde:

$$\frac{c_0}{c \sqrt{1+y'^2}} = a;$$

de donde:

$$y' = \pm \frac{\sqrt{c^2_0 - a^2 c^2}}{a c},$$

se integra inmediatamente, y como  $\psi_y = a$ :

$$\psi = a y + \text{función de } x = a y \pm \int^x \frac{\sqrt{c^2_0 - a^2 c^2}}{a c} dx = c_0 t \quad [10-1]$$

Que nos da el haz de curvas con un parámetro  $t$  de los frentes de onda.

Como dijimos al principio, son curvas trasladadas una respecto a otra una cantidad  $\frac{c_0(t_2 - t_1)}{a}$  en la dirección del eje  $Y$ .

El valor de  $a$  representa (hagamos  $c = c_0$ ) el coseno del ángulo  $\theta$ , que en profundidad grande forma el frente de la onda con la normal a la orilla.

En la anterior expresión de  $y'$  vemos que si  $\theta = 90^\circ$ ,  $a = \cos \theta = 0$ ,  $y' = \infty$ , o sea que los frentes de onda continúan hasta el final paralelos a la playa, como era de esperar.

En el caso particularísimo de una playa indefinida de máxima pendiente  $K$  constante:

$$H = k x, \quad c = \sqrt{g H} = \sqrt{g k x}, \quad [10-2]$$

y por la ecuación anterior los frentes de onda resultan ser:

$$a y \pm \int \sqrt{\frac{x_0 - a^2 x}{a^2 x}} dx = c_0 t, \quad [10-3]$$

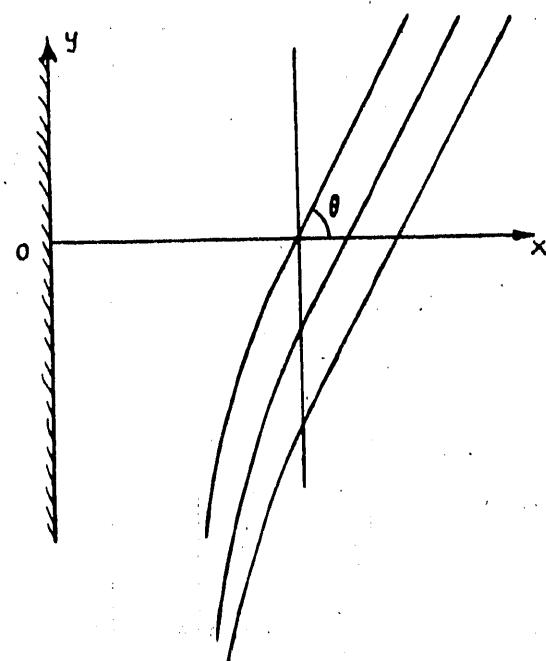


Figura 13.

que se integra inmediatamente, haciendo el cambio de variable:

$$a^2 x = x_0 \operatorname{sen}^2 u$$

que da:

$$ay \pm \frac{x_0}{a^2} (u + \operatorname{sen} u \cos u) = c_0 t,$$

o:

$$ay \pm \frac{x_0}{a^2} \left[ \operatorname{arc sen} \left( \frac{a^2 x}{x_0} \right) + \sqrt{\frac{a^2 x}{x_0}} \sqrt{1 - \left( \frac{a^2 x}{x_0} \right)} \right] = c_0 t.$$

Tomemos como nuevas variables:

$$X = \frac{a^2 x}{x_0}, \quad Y = \frac{a^3 y}{x_0},$$

con lo que resulta:

$$Y = \mp \left[ \operatorname{arc sen} \sqrt{X} + \sqrt{X(1-X)} \right] + \frac{c_0 a^2}{x_0} t. \quad [10-4]$$

La curva  $Y = \operatorname{arc sen} \sqrt{X} + \sqrt{X(1-X)}$  tiene la representación indicada en la figura 14, dando a  $X$  valores entre 0 y 1.

Esta curva tiene las siguientes propiedades:

- 1.º Es adimensional (también  $\frac{c_0 a^2}{x_0} t$  carece de dimensiones, pues  $a$  es un coseno y  $c_0$  una velocidad).
- 2.º Con escalas apropiadas, o sea efectuando las dilataciones

$$x = \frac{x_0}{a^2} X, \quad y = \frac{x_0}{a^3} Y,$$

según los ejes  $O X$ ,  $O Y$ , obtenemos todos los casos posibles.

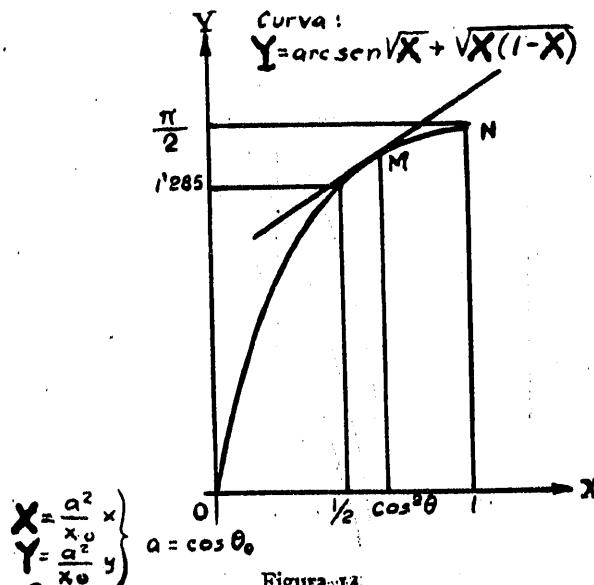


Figura 14.

3.º Hay que fijarse que si  $\theta$  es el ángulo que la dirección de las olas (de los rayos, o sea del temporal) forma con la orilla, el valor máximo que tomaremos de  $X$  será  $\cos^2 \theta$ . O sea, sólo utilizaremos la parte de curva  $OM$ .

### 11. Variación de la amplitud de onda.

Desarrollando la segunda de las ecuaciones fundamentales, la [6-2] que llamamos ecuación de transporte, como:

$\operatorname{div} (|U|_2 \operatorname{grad} \psi) = |U|_2 \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} |U|_2 \cdot x \operatorname{grad} \psi$ , que, al sustituir en la citada ecuación, nos da:

$$|U|_2 \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi + 2 \operatorname{grad} |U|_2 \cdot x \operatorname{grad} \psi = 0 \quad [11-1]$$

( $x$  es símbolo de producto escalar).

Como  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi$  y  $|\operatorname{grad} \psi| = \frac{c_0}{c}$ , y además la proyección de  $\operatorname{grad} |U|_2$  sobre  $\operatorname{grad} \psi$  es:

$$\frac{d |U|_2}{d \sigma},$$

resulta que:

$$\operatorname{grad} |U|_2 \cdot x \operatorname{grad} \psi = \frac{d |U|_2}{d \sigma} \frac{c_0}{c},$$

valores que, sustituídos en [11-1], nos dan:

$$\frac{d |U|_2}{d \sigma} = - \frac{|U|_2 c}{2 c_0} \Delta \psi.$$

Esta ecuación diferencial nos permite determinar  $U = c \zeta$ , y, por tanto, las amplitudes  $\zeta$ , ya que  $c$  es función conocida de cada punto ( $c = \sqrt{g H}$  en el caso más sencillo en que  $H$ , profundidad, es función de  $x$  e  $y$ ).

Escrita en la forma:

$$\frac{\frac{d |U|_2}{d \sigma}}{|U|_2} = - \frac{c \Delta \psi}{2 c_0},$$

se integra inmediatamente a lo largo de un rayo, resultando:

$$|U|_2 = |U_0|_2 e^{-\frac{1}{2} \int_0^s \frac{c}{c_0} \Delta \psi d\sigma} \quad [11-2]$$

siendo  $e = 2,717$  la base de los logaritmos neperianos.

Como  $\vec{S}$  es el vector unitario que tiene la dirección del grad de  $\psi$ :

$$\vec{S} = \frac{\text{grad } \psi}{|\text{grad } \psi|} = \frac{\text{grad } \psi}{c_0/c} \quad \text{o} \quad \frac{\text{grad } \psi}{c_0} = \frac{\vec{S}}{c};$$

tomando divergencias, queda:

$$\frac{\Delta \psi}{c_0} = \frac{1}{c} \text{ div } \vec{S} - \frac{1}{c^2} \vec{S} \times \text{grad } c$$

( $\times$  indica producto escalar), o sea, multiplicando por  $c$  los dos miembros:

$$\frac{c}{c_0} \Delta \psi = \text{div } \vec{S} - \vec{S} \times \left( \frac{\text{grad } c}{c} \right);$$

pero:

$$\vec{S} \times \frac{\text{grad } c}{c} = \vec{S} \times \text{grad} (\log c) = \frac{d(\log c)}{d\sigma}$$

—ya que  $\vec{S}$  un vector unitario y la proyección de  $\text{grad} (\log c)$  sobre  $\vec{S}$  tiene por valor  $\frac{d(\log c)}{d\sigma}$ —;

luego:

$$\frac{c}{c_0} \Delta \psi = \text{div } \vec{S} - \frac{d(\log c)}{d\sigma}. \quad [11-3]$$

Si aplicamos el teorema de Gauss (fig. 15) del cálculo integral al elemento de área limitado por dos rayos y dos frentes de onda próximos, como se indica en la figura, resulta:

$$\text{div } \vec{S} = \frac{d(\log l)}{d\sigma}.$$

Sustituyendo en [11-3] este valor, queda:

$$\frac{c}{c_0} \Delta \psi = \frac{d(\log l)}{d\sigma} - \frac{d(\log c)}{d\sigma} = \frac{d\left(\log \frac{l}{c}\right)}{d\sigma}.$$

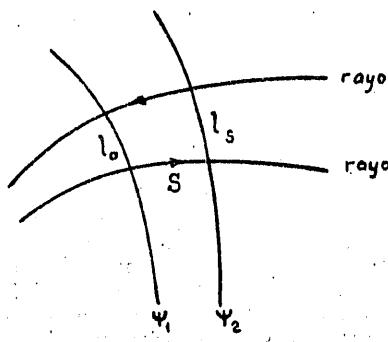


Figura 15.

Que al pasarlo a [11-2], obtenemos:

$$\frac{|U|_2^2}{|U_0|_2^2} = \sqrt{\frac{c}{c_0} \frac{l_0}{l}}.$$

Como:

$$|U|_2^2 = c |\zeta|_2^2$$

por [4-4]:

$$|U_0|_2^2 = c_0 |\zeta_0|_2^2$$

al sustituir resulta:

$$\frac{|\zeta|_2^2}{|\zeta_0|_2^2} = \sqrt{\frac{c_0}{c} \frac{l_0}{l}} \quad [11-4]$$

Si adoptamos:

$$c = \sqrt{g H},$$

$$c_0 = \sqrt{g H_0},$$

queda:

$$\frac{|\zeta|_2^2}{|\zeta_0|_2^2} = \sqrt{\frac{l_0}{l}} \sqrt[4]{\frac{H_0}{H}} \quad [11-5]$$

La cantidad  $l$  es proporcional a la separación de los rayos o normales. Podemos denominarla factor de separación y la relación  $l/l_0$  es la denominada expansión frontal en los planos de oleaje.

El otro factor,  $\sqrt[4]{H_0/H}$ , sólo sería aplicable siendo ambas profundidades,  $H$  y  $H_0$ , reducidas y en la hipótesis de conservación de la energía, pero

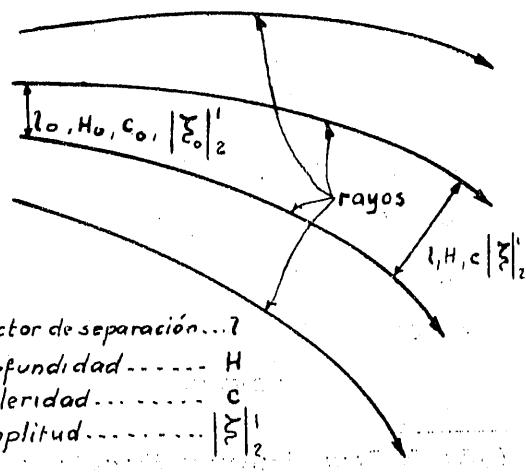


Figura 16.

no al oleaje que es preciso comenzar a estudiar en grandes profundidades,  $H_0 \geq L$ , y cuyo consumo de energía, sobre las plataformas costeras, es importante.

En el caso particular (fig. 17) en que las batimétricas sean rectas paralelas a la orilla, como el factor de separación  $l$  es proporcional al  $\cos \theta$  (siendo  $\theta$  el ángulo que forma el rayo en cada punto con la orilla), por obtenerse los frentes de ondas por traslación paralela al eje  $OY$ :

$$AB = BC = CD = \dots = MN;$$

$$l = \overline{MN} \cos \theta;$$

$$\frac{l_0}{l_0} = \frac{\cos \theta_0}{\cos \theta} \quad (*);$$

## 12. El método de los planos de oleaje.

Vamos a estudiar el método de los planos de oleaje del Profesor Iribarren, cotejándolo con las fórmulas obtenidas.

Determina el Sr. Iribarren el frente de onda por el que llama cuadrilátero de avance. Fijando el punto céntrico del mismo de forma aproximada, determina su profundidad  $H$ . Con  $\frac{H}{L_0}$  entra en los valores de un cuadro, o con su curva (4) determina  $\frac{H}{L}$ . Lo

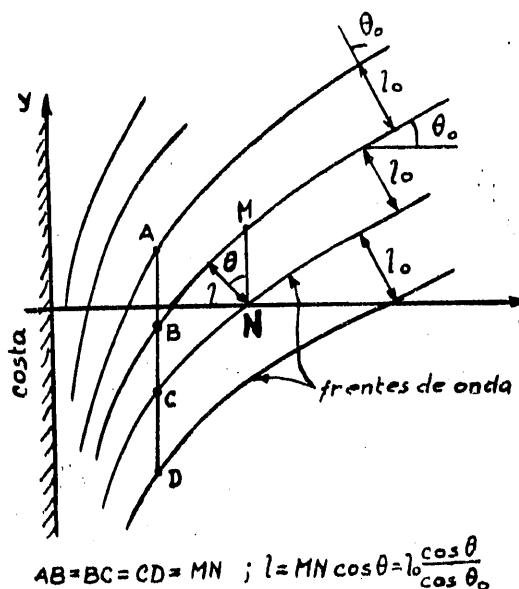


Figura 17.

(\*) Ver H. Rouse: *Engineering Hydraulics*, 1950, página 744.

que hace es resolver cómodamente la ecuación trascendente:

$$L = \frac{1}{K} L_0 = \operatorname{tg} h \frac{\pi H}{L} L_0. \quad [12-1]$$

Con  $H$  y  $L$  se determina la celeridad, que vale:

$$c = \sqrt{\frac{g L}{\pi} \operatorname{tg} h \frac{\pi H}{L}} \quad [12-2]$$

en la teoría trocooidal.

En su teoría de los planos de oleaje en segunda aproximación, el Prof. Iribarren (REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, 1949), aborda el estudio de la pérdida de energía de la ola al avanzar en la plataforma costera, determinando un coeficiente,  $Q$ , que depende del rozamiento en el fondo, y que lo deduce interpolando una función hiperbólica en una serie de medidas hechas en las costas de Australia. También estudia las disimetrías producidas en el avance de las olas (\*).

En el método clásico de los planos de oleaje se determinan las superficies de avance  $\psi$  por la ecuación:

$$|\operatorname{grad} \psi| = \frac{c}{c_0};$$

en la que:

$$c = \sqrt{\frac{g}{\pi} L \operatorname{th} \frac{\pi H}{L}},$$

es función de  $H$  y de  $L_0$  o  $L$ , pues aunque figura la longitud  $L$ ,  $H$  y  $L$  están relacionadas por la ecuación  $L = \operatorname{tg} h \frac{\pi H}{L} \cdot L_0$ , como dijimos al principio.

En cuanto a la variación de la amplitud de la onda en su avance, emplea el Sr. Iribarren la expresión [12-4]:

$$\frac{h}{h_0} = \sqrt{\frac{A_0}{A}},$$

(\*) Recientemente, Keulegan y Patterson han hecho un detenido estudio teórico de las ondas denominadas *cnoidales*, cuyas características parecen corresponder a olas en profundidades inferiores al décimo de su longitud total o  $H < L/5$ . La razón de tal denominación procede de entrar en la expresión de su perfil la función elíptica  $cn$ , interviniendo en su cálculo funciones elípticas completas de primera y segunda especie. Se prueba, además, que cuando la profundidad disminuye o cuando  $L/H$  crece indefinidamente, la ola tiende a convertirse en la ola solitaria (Rouse: *Engineering Hydraulics*, 1950, pág. 744).

Como trabajos interesantes, sobre todo desde el punto de vista teórico, tenemos los de Miche (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1944) y posteriormente los de Stoker (*Quarterly of Applied Mathematics*, 1947). En los de Friedrichs (*Communications on Applied Mathematics*) y mediante el empleo de funciones analíticas, se dan varias expresiones asintóticas aplicables a la ola en las proximidades de la orilla.

o sea que están las amplitudes en razón inversa de las raíces cuadradas de la variación del ancho en el frente.

Dedujo esto de la expresión aproximada, tenida cuenta del consumo de energía

$$\rho g h^2 A_0 = \rho g h^2 A.$$

En la ponencia española del Congreso de Navegación de Lisboa, 1949, de los Sres. Iribarren y Nogales, se estudia esta cuestión con más detalle, tenida cuenta de la celeridad de propagación de la energía y otras interesantes circunstancias, comprobándose que el grado de aproximación de la simplificación admitida es aceptable.

### 13. Conclusiones.

La expresión [11-5] es la llamada ley de Green en Hidrodinámica, hallada en 1837 en su trabajo "On the Motion of Waves in a Variable Canal of Small Depth and Width", publicado en *Transactions Cambridge Philosophical Society*, volumen VI. Ha sido estudiada y desarrollada posteriormente por Scott-Russell en *Report of the 14th Meeting of the British Association*, 1844. En el estudio de la onda de marea ha sido obtenida por los Sres. Iribarren y Muñoz Laborde (REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, 1942, página 333). En un estudio de mi compañero Rodríguez Pérez (REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, 1946, página 338 [7]) da, en vez de

$$\sqrt{\frac{H_0}{H}}, \quad \left(\frac{H_0}{H}\right)^{\frac{\beta-\alpha}{4\beta}}$$

en que  $\beta$  es la pendiente de la plataforma costera y  $\alpha$  una "pendiente compensadora". Con ello se tienen en cuenta los rozamientos. Para  $\alpha=0$ , el exponente vale  $1/4$  y se obtiene la ley de Green.

En cierto modo, con la aplicación de la expresión de  $\frac{h_0}{h} = \sqrt{\frac{A_0}{A}}$  utilizada corrientemente en el método de los planos de oleaje, se tiene en cuenta en gran parte la pérdida de energía de la ola al avanzar, como acertadamente indica el Prof. Iribarren.

Como resumen, podemos decir que nuestros cálculos comprueban el método de los planos de oleaje. Este es una construcción gráfica de la ecuación que da el gradiente de  $\psi$  ( $x$  y) en función de la variación de la profundidad, obteniéndose así los frentes o líneas de avance de la ola a partir de una conocida y sobre un fondo que no es posible definir analíticamente.

En cuanto a la expresión de  $c$ , procede tomarse a profundidades bastante grandes, en que la teoría trocooidal es más exacta, lo indicado por el Sr. Iribarren, o sea:

$$c = \sqrt{\frac{g}{\pi}} L \operatorname{th} \frac{\pi H}{L},$$

que es general, y en profundidades reducidas, en la que  $\operatorname{th} \frac{\pi H}{L} \approx \frac{\pi H}{L}$ , se reduce a  $c = \sqrt{g H}$ .

El método que hemos expuesto es cómodo para determinar la trayectoria de los rayos. Los frentes de onda se deducen inmediatamente por ser ortogonales a los rayos.

El método expuesto tiene la particularidad de que, dibujados *una sola vez* en un plano de batimétricas los vectores  $\operatorname{grad}(\log c)$ , en que  $c$  es la celeridad, los rayos para cada frente de onda que llega (dependiente de la dirección del temporal) se determinan con sencillez (fig. 9.º).

Las figuras 10 y 11 nos indican lo facilísimo que es, dibujando el vector  $\vec{\rho}$  de cada punto (dependiente únicamente lo mismo que el  $\operatorname{grad} \log c$  de la estructura de fondo), seguir la marcha de los rayos.