CALCULO DE SECCIONES RECTANGULARES SOMETIDAS A FLEXION

Por ANDRES S. CRUZ JIMENEZ,
Ingeniero de Caminos.

En el primer párrafo explica el autor el contenido del presente artículo, que considera una ampliación o extensión del método que expuso en nuestra REVISTA *en agosto de 1948.*

En el número de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS de agosto de 1948, con el título de "Cálculo de secciones rectangulares de hormigón armado sometidas a simple flexión", expusimos un método de cálculo de esta clase de secciones, por estimarle grandes ventajas por su generalidad, facilidad de cálculo y poner de manifiesto, de forma clara, la influencia y dependencia entre sí de las distintas variables que intervienen, de manera que resulta fácil encontrar la solución más adecuada en cada caso.

Se trata ahora de la extensión del método al caso de flexión compuesta, flexión y fuerza normal positiva o negativa, es decir, compresión o tracción, del que el caso de flexión simple es sólo un caso particular, componente normal nula, sirviendo las mismas tablas o, mejor dicho, la tabla única que acompañamos; tabla general que sirve para toda clase de hormigones, para toda clase de relaciones K entre la armadura comprimida y extendida, para toda clase de excentricidades y para toda clase de trabajo a tracción del acero, puesto que la tabla abarca 200 a 2 000 Kg./cm.², límite a que se llega transformando en el producto comercial conocido por Tetracero, mediante su estirado en frío por torsión, con diferencias de 200 Kg./cm.², que estimamos suficiente.

Las mismas consideraciones que nos movieron en 1948 nos mueven ahora, acrecidos por lo anteriormente expuesto y estimulados por los testimonios de adopción recibidos para el caso de flexión simple, por lo que no dudamos de la mayor utilidad que encontrarán en la flexión compuesta.

Las notaciones que empleamos son:

M = momento flector en el centro de la sección, en kilogramos × cm.
F = fuerza normal, en Kg.
C = canto de la sección, en cm.
a = ancho de la sección, en cm.
x = profundidad de la fibra neutra, en cm.
φ = profundidad unitaria $x : c$.
$x' = 0{,}9\,x = 0{,}9\,c\,\varphi$, altura de la armadura de compresión sobre la fibra neutra.
α = sección de la armadura de tracción, en cm.².
α' = sección de la armadura de compresión, en cm.².
k = relación entre las armaduras.
e_1 = excentricidad unitaria $M : F \,.\, C$.
A = carga práctica de trabajo de la armadura de tracción, en Kg./cm.².
H = carga práctica del hormigón comprimido, en kilogramos/cm.².
γ = relación entre los coeficientes de elasticidad del hierro y del hormigón.

El artículo 26 de la Instrucción para el Proyecto y Ejecución de Obras de Hormigón Armado, aprobado por O. M. del Ministerio de Obras Públicas de 20 de marzo de 1940, fija para el valor de $\gamma \,.\, H = 666$ y para H el tercio de la carga de rotura del hormigón a los veintiocho días, medido en probeta cilíndrica, que son los valores que adoptamos. En agosto de 1948 adoptamos $\gamma \,.\, H = 648$, y a esto se deben las diferencias que existen en las tablas de entonces y en la actual.

Partimos de la ley de Hooke, o de la deformación plana, despreciando el trabajo del hormigón en la zona extendida por bajo de la fibra neutra.

En la figura, para que exista equilibrio entre las fuerzas exteriores y las reacciones de la sección, tiene que verificarse la igualdad de fuerzas y la igualdad de momentos. Tomando momentos con relación a la fibra neutra, resulta:

$$\left.\begin{aligned} M - F\,.\left(\frac{c}{2} - x\right) &= \int_{-(c-x)}^{x} t\,.\,a\,.\,dh\,.\,h \\ F &= \int_{-(c-x)}^{x} t\,.\,a\,.\,dh \end{aligned}\right\};$$

pero

$$\frac{t}{h} = \frac{H}{x}; \qquad t = \frac{H}{x}\,.\,h$$

sustituyendo:

$$M - F\left(\frac{c}{2} - x\right) = \frac{H}{x}\,.\int_{-(c-x)}^{x} a\,.\,h^2\,dh$$

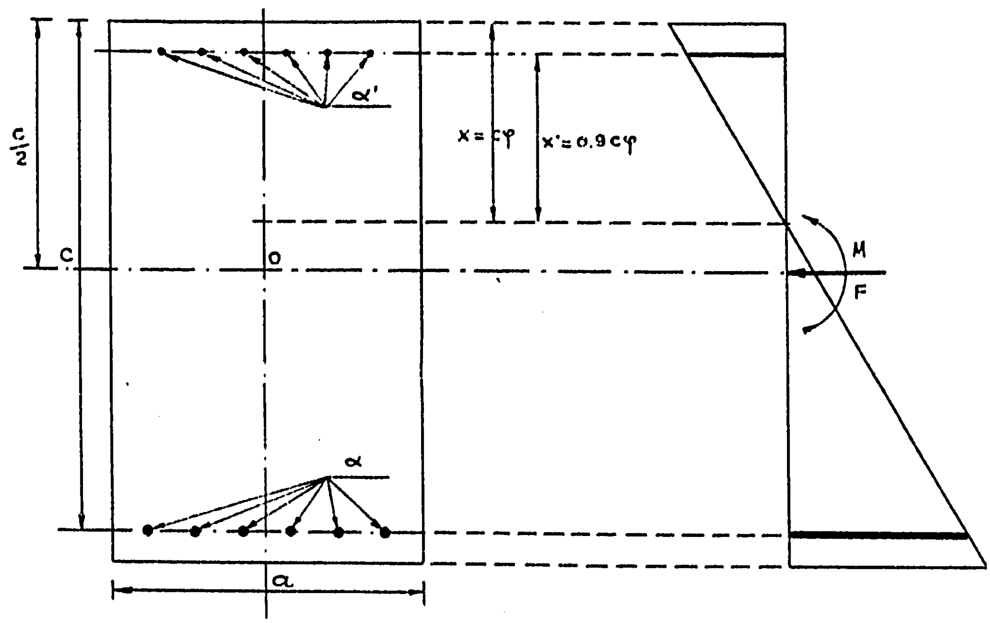
$$F = \frac{H}{x}\,.\int_{-(c-x)}^{x} a\,.\,h\,.\,dh,$$

ahora bien, las dos integrales son los momentos de inercia I y estático m de la sección con respecto a la fibra neutra, resultando en definitiva el sistema clásico:

$$\left.\begin{aligned} M - F \cdot \left(\frac{c}{2} - x\right) &= \frac{H}{x} \cdot I \\ F &= \frac{H}{x} \cdot m. \end{aligned}\right\} \qquad [I]$$

En la sección rectangular los valores de I y m tienen por expresión:

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{a \cdot x^3}{3} + \gamma \cdot \alpha \cdot (c - x)^2 + \gamma \cdot \alpha' \cdot x'^2 = \frac{a \cdot c^3 \varphi^3}{3} + \\ &\quad + \gamma \cdot \alpha \cdot c^2 \cdot (1 - \varphi)^2 + 0{,}81\, \gamma \cdot \alpha' \cdot \varphi^2 \\ m &= \frac{a \cdot x^2}{2} - \gamma \cdot \alpha \cdot (c - x) + \gamma \cdot \alpha' \cdot x'^2 = + \frac{a \cdot c^2}{2}\, \varphi^2 - \\ &\quad - \gamma \cdot \alpha \cdot c \cdot (1 - \varphi) + 0{,}90\, \gamma \cdot \alpha' \cdot \rho \end{aligned}\right\}$$



valores que sustituídos con el sistema [I] lo transforma:

$$\left.\begin{aligned} M - F \cdot c \cdot \left(\frac{1}{2} - \varphi\right) &= \frac{H}{c \cdot \varphi} \cdot \left[\frac{a \cdot c^3}{3} \cdot \varphi^3 + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \cdot \alpha \cdot (1 - \varphi)^2 + 0{,}81\, \gamma \cdot \alpha' \varphi^2 \right] \\ F &= \frac{H}{c \cdot \varphi} \cdot \left[\frac{a \cdot c^2}{2} \cdot \varphi^2 - \gamma \cdot \alpha \cdot (1 - \varphi) + \right. \\ &\quad \left. + 0{,}90\, \gamma \cdot \alpha' \varphi \right] \end{aligned}\right\} \qquad [II]$$

Si en este sistema [II] sustituímos la primera ecuación por la que resulta de restar miembro a miembro de la primera, la segunda multiplicada por $\frac{2}{3} c\, \varphi$, y despejamos a en la segunda, resulta después de simplificar:

$$\left.\begin{aligned} M - F \cdot c \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi}{3}\right) &= \frac{\gamma \cdot H \cdot c \cdot (1 - \varphi)(3 - \varphi)}{3\varphi} \cdot \\ &\quad \cdot \alpha + 0{,}21\, \gamma \cdot H \cdot c \cdot \varphi \cdot \alpha' \\ a &= \frac{1}{c \cdot H} \left[\frac{2\gamma \cdot H \cdot (1 - \varphi)}{\varphi^2} \cdot \alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1.8\gamma \cdot H}{\varphi} \cdot \alpha' \right] + \frac{F}{c \cdot H} \cdot \frac{2}{\varphi}. \end{aligned}\right\} \qquad [III]$$

Pero la ley de Hooke:

$$\frac{A}{\gamma H} = \frac{c - x}{x} = \frac{1 - \varphi}{\varphi},$$

de donde:

$$\varphi = \frac{\gamma \cdot H}{A + \gamma \cdot H},$$

y como

$$\gamma \cdot H = 666; \qquad \varphi = \frac{666}{A + 666},$$

de forma que sustituímos estos valores de $\gamma . H$ y φ en [III]; resulta después de simplificar:

$$\left.\begin{aligned} M - F . c . \frac{A + 222}{2(A + 666)} &= c . \left[\frac{A^2 + 444\,A}{A + 666} . \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \frac{0{,}21 \times 666^2}{A + 666} . \alpha' \right] \\ a = \frac{1}{c . H} . &\left[\frac{A^2 + 666\,A}{333} . \alpha - \right. \\ - 1{,}8\,(A + 666)\,\alpha' &\left. \right] + \frac{F}{c . H} . \frac{A + 666}{333} \end{aligned}\right\} \quad [IV]$$

expresión que podemos poner de la forma:

$$\left.\begin{aligned} M - F . c . Q &= c . (N . \alpha + P . \alpha') \\ a . c . H . - F . R &= T . \alpha - S . \alpha' \end{aligned}\right\} \quad [V]$$

y si llamamos

$$\frac{N}{P} = P_1 ; \qquad \frac{S}{T} = S_1 ; \qquad \alpha' = k . \alpha;$$

lo podemos poner también en esta otra:

$$\left.\begin{aligned} M - F . c . Q &= N . \alpha . c . (1 + P_1 . k) \\ a . c . H - F . R . &= T . \alpha . (1 - S_1 . k) \end{aligned}\right\} \quad [VI]$$

Estas expresiones resuelven el problema, y como los distintos paramentos sólo dependen de A, en la tabla adjunta están calculados sus distintos valores desde $A = 200$ Kg./cm.² hasta $A = 2\,000$ Kg./cm.², con diferencia de 200 Kg./cm.², figurando también para $A = 1\,140$ Kg./cm.², que hace $N = 1\,000$.

En caso de flexión simple $F = 0$, anulándose los términos $F_1\,c_1\,Q$ y $F_1\,R$, quedando las fórmulas de la flexión simple. Las pequeñas diferencias en los valores de los otros paramentos con los que aparecen en la publicación de agosto de 1948 se deben al distinto valor adoptado para $\gamma . H$, como ya hemos dicho.

En el caso de flexión y tracción los términos en F cambian de signo, puesto que vale todo lo expuesto.

Si llamamos $\frac{M}{F . c} = e_1$, o excentricidad unitaria, las primeras ecuaciones de los sistemas [V] y [VI] quedan en la forma:

$$F . (e_1 - Q) = N . \alpha + P . \alpha' = N\,\alpha\,(1 + P_1 . k). \quad [VII]$$

Como vemos, los sistemas [V], [VI] y [VII] establecen dos relaciones entre las fuerzas actuantes, las dimensiones de la sección $a_1\,c_1\,\alpha_1\,\alpha'$ o k y las cargas de trabajo del hierro A y del hormigón H, o sea entre las fuerzas exteriores y seis variables, de forma que, como el número de variables es superior al de ecuaciones, es indeterminado el sistema y es preciso fijar previamente el valor de 4, deduciéndose las dos restantes. Pero una cosa es el problema matemático y otra el real, pues si los valores de las variables fijadas no son adecuados, los valores obtenidos para las otras resultarán absurdos, negativos, en desarmonía con los fijados, o no prácticos, como puede ser para las cargas de trabajo.

TABLA GENERAL. — *Cálculo de secciones rectangulares de H . A sometidas a flexión.*

A K : m.²	φ	N	P	P_1	Q	T	S	S_1	R
200	0,7690	148,73	107,56	0,7232	0,2436	520,12	1 588,80	2,9970	2,6006
400	0,6248	316,70	87,38	0,2759	0,2917	1 280,48	1 918,80	1,4985	3,2012
600	0,5261	494,79	73,57	0,1487	0,3246	2 281,08	2 278,80	0,9990	3,8018
800	0,4543	678,85	63,54	0,0936	0,3486	3 521,92	2 638,80	0,7492	4,4024
1 000	0,3998	866,74	55,91	0,0645	0,3667	5 003,00	2 998,80	0,5994	5,0030
1 140	0,3688	1 000,00	51,57	0,0516	0,3771	6 182,70	3 250,80	0,5214	5,4234
1 200	0,3569	1 057,23	49,92	0,0472	0,3810	6 724,32	3 358,80	0,4995	5,6036
1 400	0,3224	1 249,56	45,09	0,0361	0,3925	8 685,88	3 718,80	0,4281	6,2042
1 600	0,2939	1 443,25	41,11	0,0285	0,4020	10 887,69	4 078,80	0,3746	6,8048
1 800	0,2701	1 637,95	37,77	0,0230	0,4100	13 329,73	4 438,80	0,3330	7,4054
2 000	0,2498	1 833,45	34,94	0,0191	0,4167	16 012,01	4 798,80	0,2997	8,0060

Si nos fijamos en la expresión [VII], tiene que verificarse $e_1 > Q$, y como Q disminuye con A en los casos de pequeña excentricidad, esto sólo se consigue de forma que el hierro trabaje a cargas reducidas. El caso límite $A = 0$ da para valor de $Q = \frac{1}{6}$ y $e_1 = \frac{1}{6}$ corresponde a estar la fuerza aplicada al extremo del núcleo central, de forma que para esta excentricidad y menores se trata de compresión excéntrica.

Debido a esta circunstancia de excentricidades pequeñas, es por lo que hemos incluído en la tabla los valores correspondientes a los valores pequeños de A.

Del examen de la tabla se desprenden las mismas consideraciones que hicimos para la flexión simple:

1.ª La resistencia de la sección es directamente proporcional a la sección de las armaduras y al canto.

2.ª El ancho de la pieza es directamente proporcional a la sección de las armaduras e inversamente proporcional al canto y a la carga práctica del hormigón.

3.ª Las armaduras de compresión no aumentan sensiblemente la resistencia de la sección para valores de A de 1 000 Kg./cm.² y superiores, pero, sin embargo, tienen gran influencia en el ancho de la sección, contribuyendo de forma importante a su disminución o al de la carga de trabajo del hormigón.

Fórmulas prácticas.

Tomando de la tabla los valores de $A = 1\,140$ kilogramos/cm.² y haciendo $H = 41{,}22$ Kg./cm.², que son cargas usuales para trabajo del hormigón y del hierro, despreciando el valor de P_1, resulta:

$$\left.\begin{aligned} M &= 1\,000 \,.\, a \,.\, c + 0{,}38\, F \,.\, c \\ a \,.\, c &= 150\,(1 - 0{,}52\, k) + 0{,}13\, F \end{aligned}\right\}$$

fórmulas que son aplicables para excentricidades unitarias e_1 superiores a 0,38.