

# UN NUEVO METODO PARA CALCULAR ESTRUCTURAS RETICULADAS

Por FLORENCIO DEL POZO,  
Ingeniero de Caminos,  
y ARTURO CERNUDA.  
Alumno de la Escuela de Caminos.

Se expone en este artículo un nuevo método de iteración para el cálculo de esfuerzos en estructuras reticuladas, cuyo uso se ha extendido en los países de Europa Central y que presenta considerables ventajas sobre los métodos de iteración hasta ahora empleados.

Entre los métodos iterativos para calcular estructuras reticuladas, el más ampliamente usado en los últimos años ha sido el método de Cross. De todos es conocido el proceso operatorio que se sigue para obtener los momentos totales en cada uno de los extremos de las diferentes piezas que forman la estructura.

Sin embargo, desde hace poco tiempo existe en Alemania un nuevo procedimiento iterativo, debido al Dr. Ingeniero G. Kani, cuyo empleo se ha extendido bastante debido a su sencillez y a sus indudables ventajas.

Una de las principales es el ahorro de tiempo que representa con respecto al método de Cross. Según ejemplos comparativos que se han realizado para diversos casos de estructuras y de sobrecargas, se ha llegado a la conclusión de que el ahorro supone normalmente más del 30 % del tiempo empleado cuando se usa el método de Cross. Sin embargo, y aun siendo ésta una ventaja interesantísima, no es la más importante, ya que se puede considerar como fundamental lo que podríamos llamar "eliminación automática de errores de cálculo". Todo el que ha manejado el método de Cross, sabe la facilidad con que se cometan equivocaciones durante el desarrollo del cálculo, que obligan a revisarlo por completo cuando se observa que la suma de los momentos en algún nudo no es igual a cero. Con el método de Kani es más difícil cometer errores, ya que el cálculo se hace repitiendo una sola operación: pero, aun en el caso de que se presente alguno, se elimina automáticamente sin más que proseguir el cálculo, sin preocuparse de corregir. Es decir, un error lo único que representa es alargar la operación en una o dos iteraciones más. Desde luego se comprende que, al hablar de errores, nos referimos a los que puedan presentarse durante el proceso de cálculo, y no a algún error en los números de que se parte, que son los momentos de empotramiento rígido y los números  $R = \frac{1}{l}$ .

Otra ventaja que tiene el método de Kani sobre el de Cross, es su empleo para estructuras con nudos

traslacionales. Para estos casos, el de Cross obliga a cálculos larguísimos y pesados, mientras que con el método de Kani no supone más que un pequeño aumento de operaciones y de tiempo, con respecto al caso de estructura intrasacional.

También es interesante indicar que cuando haya que variar las dimensiones de alguna pieza, no es preciso comenzar un nuevo cálculo, sino que se ponen los nuevos momentos de empotramiento y números  $R$  y se prosigue desde la última iteración a que se había llegado, lo que representa bastante menos trabajo que repetir desde el principio.

El método de Kani sirve también para el caso de estructuras en las que haya piezas de sección variable. Dentro de este tipo de piezas, las que se presentan más frecuentemente en las obras de hormigón armado son las acartabonadas, para las que hay tablas que facilitan considerablemente el cálculo. Sin embargo, en este tipo de piezas el método de Kani no presenta unas ventajas tan claras como en los casos citados anteriormente.

## Estructuras de nudos intrasacionales.

El método de Kani en este caso es de aplicación muy sencilla, pues consiste en realizar una sola operación, repitiéndola sucesivamente en cada nudo, en un orden determinado.

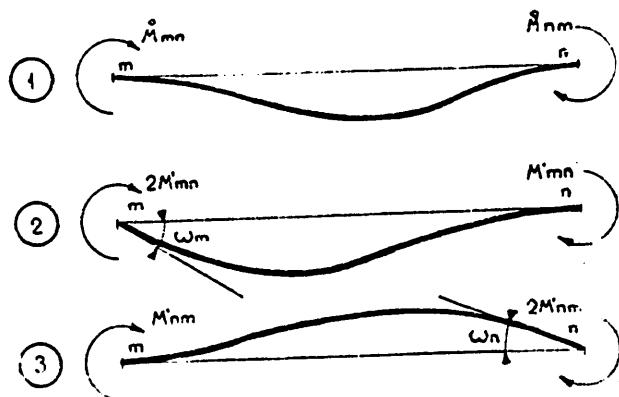


Figura 1.\*

Consideremos la pieza  $m\bar{n}$  de la estructura. Por efecto de las sobrecargas que actúan sobre ella, aparecen en sus extremos unos giros  $\omega_m$  y  $\omega_n$ . Para llegar a este estado final, podemos imaginar los tres pasos sucesivos siguientes que se ven en la figura 1.º:

1.º Se suponen en los nudos unos momentos de sujeción que impiden los giros de los extremos de la barra, y se considera entonces como viga empotrada rigidamente en sus extremos.

2.º Se anula el momento de sujeción en el extremo  $m$ . Aparece en éste un giro  $\omega_m$ , mientras que el extremo opuesto,  $n$ , permanece empotrado.

3.º Se anula el momento de sujeción en el extremo  $n$ . Aparece en él un giro  $\omega_n$ , en tanto que el extremo  $m$  permanece empotrado.

Así, pues, el momento total  $M_{mn}$ , que se desea hallar en el extremo  $m$  estará formado por las tres partes siguientes:

$\overset{\circ}{M}_{mn}$ , momento de empotramiento perfecto debido a la sobrecarga.

$2M'_{mn}$ , debido al giro del extremo  $m$ .

$M'_{nm}$ , debido al giro del extremo opuesto  $n$ .

Por tanto, se puede escribir:

$$M_{mn} = \overset{\circ}{M}_{mn} + 2M'_{mn} + M'_{nm}. \quad [1]$$

El Dr. G. Kani llama momento de sujeción  $\overset{\circ}{M}_m$  del nudo  $m$ , a la suma de todos los momentos de empotramiento de los extremos de las barras que concurren en el nudo  $m$ , es decir,  $\overset{\circ}{M}_m = \sum_{(m)} \overset{\circ}{M}_{mn}$ . ( $\sum_{(m)}$  indica la suma extendida a los extremos de todas las barras que concurren en el nudo  $m$ .)

En todo lo que sigue,  $M'_{mn}$  representa el momento debido al giro, cuyo valor es:

$$M'_{mn} = 2E \frac{I_{mn}}{l_{mn}} \omega_m = 2ER_{mn} \omega_m \quad [2]$$

siendo  $R = \frac{I}{l}$  un coeficiente característico de la barra, que se obtiene dividiendo su momento de inercia por la longitud. Según se ve en la ecuación [2], los momentos  $M'$  sólo dependen del giro  $\omega$  y del número  $R$  correspondiente a la barra.

Cuando en un nudo se produce un giro  $\omega$ , cada barra empotrada en él gira el mismo ángulo  $\omega$ . Si sólo gira el nudo  $m$  de la estructura, y se supone conocida la suma  $\sum M'_{mn}$  de los momentos debidos

al giro del nudo  $m$ , se puede hallar cada uno de éstos repartiendo dicha suma proporcionalmente a los nú-

meros  $R$  de las barras que concurren en el nudo. Es decir:

$$M'_{mn} = \frac{R_{mn}}{\sum_{(m)} R_{mn}} \sum_{(m)} M'_{mn} \quad [3]$$

Para que el nudo  $m$  esté en equilibrio, se ha de verificar que:

$$\sum_{(m)} M_{mn} = 0$$

y sustituyendo  $M_{mn}$  por su valor dado en [1], se tiene:

$$\sum_{(m)} \overset{\circ}{M}_{mn} + 2 \sum_{(m)} M'_{mn} + \sum_{(m)} M'_{nm} = 0$$

y como  $\sum_{(m)} \overset{\circ}{M}_{mn} = \overset{\circ}{M}_m$  (momento de sujeción):

$$\overset{\circ}{M}_m + 2 \sum_{(m)} M'_{mn} + \sum_{(m)} M'_{nm} = 0,$$

de donde:

$$\sum_{(m)} M'_{mn} = -\frac{1}{2} \left[ \overset{\circ}{M}_m + \sum_{(m)} M'_{nm} \right] \quad [4]$$

Por tanto, conocidos los momentos  $M'_{nm}$ , debidos a los giros de los extremos no adyacentes de las barras que concurren en el nudo  $m$ , se pueden hallar los  $M'_{mn}$  debidos al giro del nudo  $m$ , ya que  $\overset{\circ}{M}_m$  es conocido.

Si se tuviera el valor exacto de los momentos  $M'_{nm}$ , se hallaría el valor exacto de los  $M'_{mn}$ ; pero si aquellos valores son solamente aproximados, se hallarán valores aproximados de éstos.

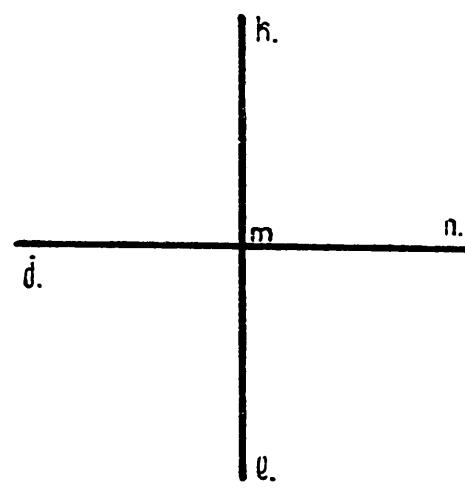


Figura 2.º

Aplicando la ecuación [3] sucesivamente en cada nudo, se obtienen valores para los momentos  $M'_{mn}$ ,

y por iteración se llega a obtener el grado de aproximación que se desee.

Se puede facilitar el cálculo introduciendo los factores de giro  $\mu$ , que son:

$$\vartheta_{mn} = -\frac{1}{2} - \frac{R_{mn}}{\sum_{(m)} R_{mn}}$$

Es decir, en la figura 2.<sup>a</sup> se tendrá:

$$\vartheta_{mn} = -\frac{1}{2} - \frac{R_{mn}}{R_{mn} + R_{mj} + R_{mk} + R_{ml}}$$

De acuerdo con lo anterior, el momento debido al giro del nudo  $m$  en la barra  $mn$ , aplicando la ecuación [3], será:

$$M'_{mn} = \frac{R_{mn}}{\sum_{(m)} R_{mn}} \sum_{(m)} M'_{nm}$$

y sustituyendo el valor de  $\sum_{(m)} M'_{nm}$  de la ecuación [4], se tiene:

$$M'_{mn} = \frac{R_{mn}}{\sum_{(m)} R_{mn}} \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \left[ \overset{\circ}{M}_m + \sum_{(m)} M'_{nm} \right]$$

o lo que es igual:

$$M'_{mn} = \vartheta_{mn} \left[ \overset{\circ}{M}_m + \sum_{(m)} M'_{nm} \right] \quad [5]$$

A continuación se desarrolla un ejemplo.

*Ejemplo de estructura con nudos intraslacionales.* Se trata de un pórtico doble, cuyas dimensiones se dan en la figura 3.<sup>a</sup>.

Como en el método de Cross, hay que empezar por determinar los momentos de inercia y los valores de las rigideces en cada una de las barras, que en este caso valdrán:

Para S-1:

$$I = \frac{a b^3}{12} = \frac{3^4}{12} = 6,75, \quad R = \frac{I}{l} = \frac{6,75}{4} = 1,6875.$$

Para S-2:

$$I = \frac{a b^3}{12} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31,25, \quad R = \frac{I}{l} = \frac{31,25}{5} = 7,81.$$

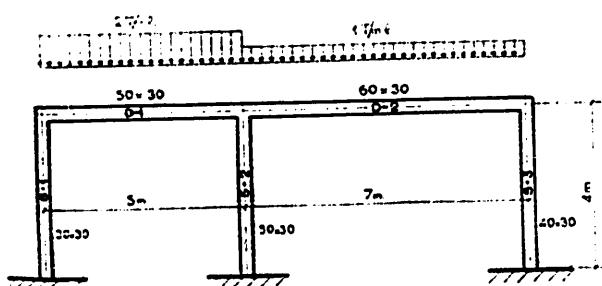


Figura 3.<sup>a</sup>

Para S-3:

$$I = \frac{a b^3}{12} = \frac{3 \cdot 4^3}{12} = 16, \quad R = \frac{I}{l} = \frac{16}{4} = 4.$$

Para D-1:

$$I = \frac{a b^3}{12} = \frac{3 \cdot 5^3}{12} = 31,25, \quad R = \frac{I}{l} = \frac{31,25}{5} = 6,25.$$

Para D-2:

$$I = \frac{a b^3}{12} = \frac{3 \cdot 6^3}{12} = 54, \quad R = \frac{I}{l} = \frac{54}{6} = 7,711.$$

El valor de la sobrecarga total = peso propio + sobrecarga será:

$$\text{En D-1: } 2 + 2,4 \cdot 0,50 \cdot 0,30 = 2,36 \text{ T./m. l.}$$

$$\text{En D-2: } 1 + 2,4 \cdot 0,60 \cdot 0,30 = 1,43 \text{ T./m. l.}$$

y los momentos de empotramiento  $\overset{\circ}{M}$ , que serán:

$$\text{En D-1: } \overset{\circ}{M} = \frac{p E}{12} = \frac{25}{12} \cdot 2,36 = 4,917 \text{ m. T.}$$

$$\text{En D-2: } \overset{\circ}{M} = \frac{p E}{12} = \frac{49}{12} \cdot 1,43 = 5,839 \text{ m. T.}$$

El proceso operatorio que se sigue es el que a continuación se indica. En los extremos de las piezas con sobrecarga se escriben los momentos de empotramiento  $\overset{\circ}{M}_{mn}$  (fig. 4.<sup>a</sup>).

En el centro del nudo, y dentro de un círculo, se ponen los momentos de sujeción  $\overset{\circ}{M}_m = \sum_{(m)} \overset{\circ}{M}_{nm}$ . También se escriben en cada nudo los factores de giro  $\mu = \frac{1}{2} - \frac{R}{\sum R}$ . Como comprobación de estos factores, la suma en cada nudo debe valer  $-0,5$ .

Una vez preparado el esquema, se puede empezar el cálculo, para lo cual se fija un orden a los nudos con el fin de efectuar las operaciones en ellos según este orden; como norma, se debe empezar siempre por el nudo más descompensado, en este caso el primero de la derecha; es decir, el orden de los nudos será de derecha a izquierda.

En cada nudo se efectúa la suma del momento de sujeción  $\overset{\circ}{M}_m$  y de los momentos debidos a los giros en los extremos opuestos de las barras que concurren en él; esta suma se multiplica por los factores de giro  $\mu$  y se apuntan los productos en las barras correspondientes. Esto equivale a aplicar la fórmula:

$$M'_{mn} = \vartheta_{mn} \left[ \overset{\circ}{M}_m + \sum_{(m)} M'_{nm} \right].$$

En la primera iteración se toma generalmente  $M'_{nm} = 0$ , a no ser que se haga un conteo previo, con lo cual el número de iteraciones sería menor.

Se termina el cálculo cuando en cada nudo se obtienen dos iteraciones sucesivas iguales dentro del grado de aproximación que se desee obtener.

Para calcular los momentos definitivos totales de cada barra, se hace uso de la expresión.

$$M_{mn} = \overset{\circ}{M}_{mn} + 2M'mn + M'nm.$$

o bien:

$$M_{mn} = \overset{\circ}{M}_{mn} + M'mn + (M'mn + M'nm)$$

donde los momentos  $M'$  son los obtenidos en la última iteración. Estos momentos totales se pueden ver en la figura 5.<sup>a</sup>.

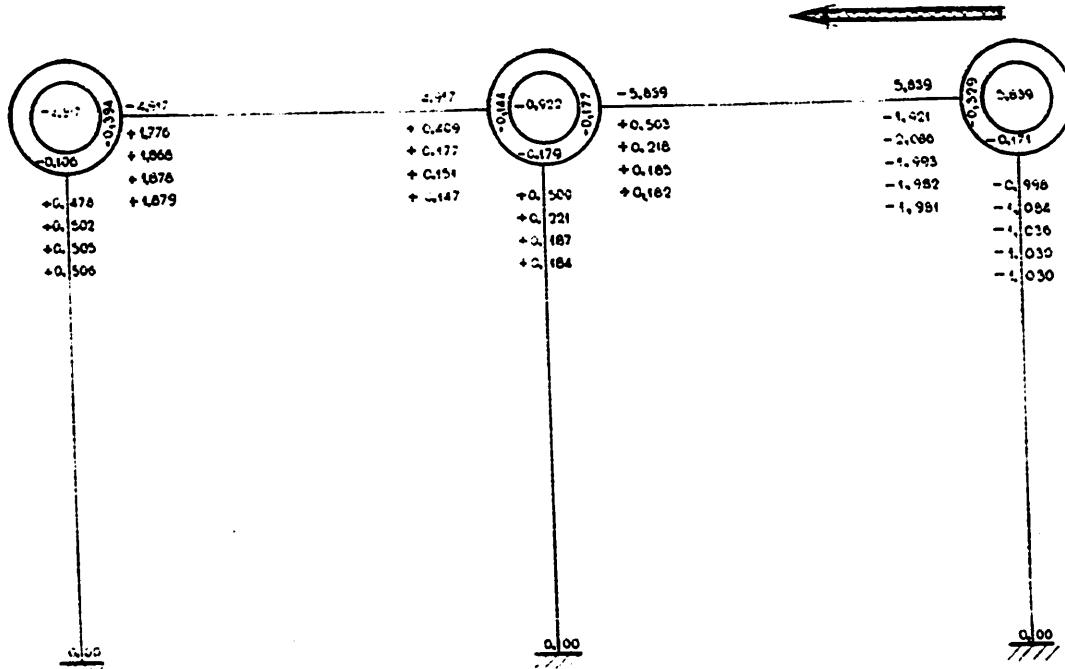


Figura 4.<sup>a</sup>

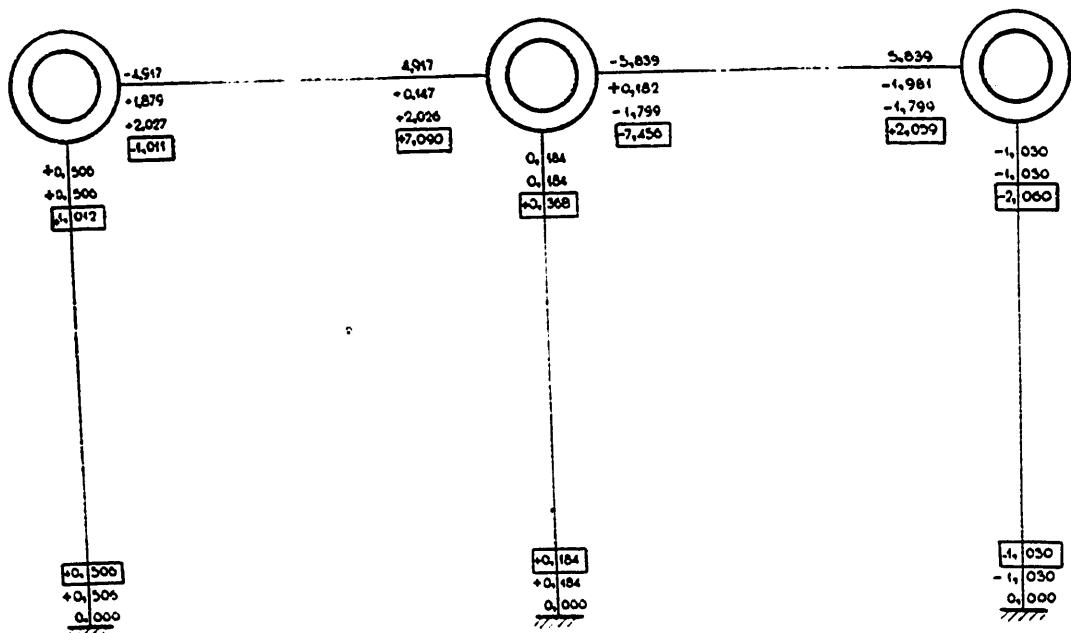


Figura 5.<sup>a</sup>

## Estructuras con nudos translacionales.

En el caso de estructura con nudos translacionales, es seguramente donde más se notan las ventajas que tiene el método de Kani sobre el de Cross, por su sencillez y el gran ahorro de tiempo que se consigue.

Como es corriente en estructuras reticuladas, normales, únicamente se tendrán en cuenta los corrimientos horizontales  $\delta$ .

Si se considera el soporte  $m n$ , para llegar a su deformada final se puede pasar por cuatro estados de deformación sucesivos. Estos se indican esquemáticamente en la figura 6.<sup>a</sup> y son los siguientes:

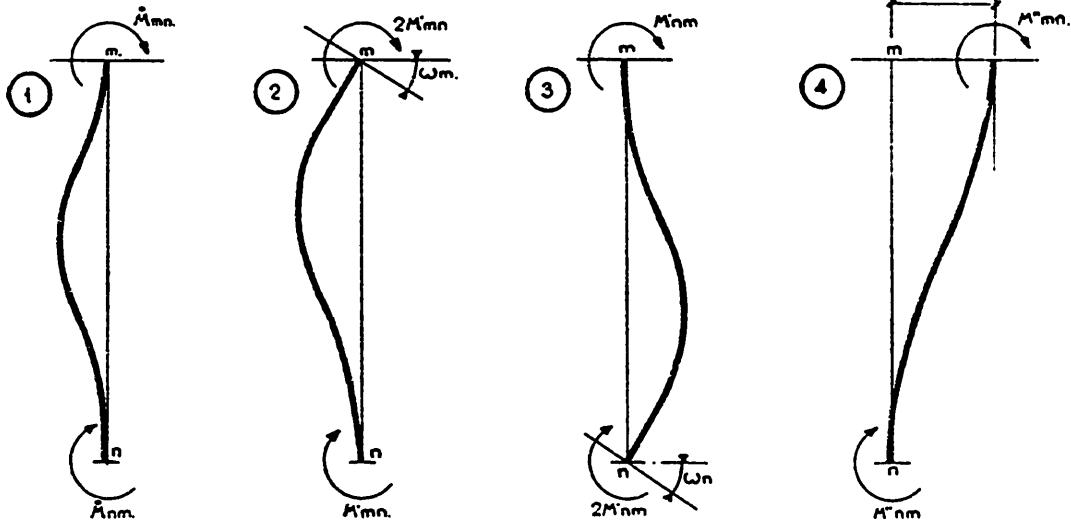


Figura 6.<sup>a</sup>

1.<sup>a</sup> Se suponen aplicados en los nudos, en que están empotrados los extremos de la pieza  $m n$ , unos momentos de sujeción, que impiden cualquier giro de aquellos nudos, y unas fuerzas de sujeción, que evitan que aparezcan corrimientos en ellos. En estas condiciones, la barra  $m n$  es una viga empotrada en sus extremos.

2.<sup>a</sup> Se anula el momento de sujeción en el extremo  $m$ , apareciendo en él un giro  $\omega_m$ , mientras que el extremo opuesto,  $n$ , permanece empotrado.

3.<sup>a</sup> Se anula el momento de sujeción del nudo  $n$ . Aparece en éste un giro  $\omega_n$ , en tanto que el extremo  $m$  de la pieza permanece empotrado.

4.<sup>a</sup> Se hace desaparecer la fuerza de sujeción que actúa sobre el nudo  $m$ , y entonces los extremos  $m$  y  $n$  de la pieza trasladan relativamente la magnitud  $\delta$ ; pero sin que ninguno de ellos gire.

Por tanto, el momento total del extremo  $m$  está formado por las cuatro componentes siguientes:

$\overset{\circ}{M}_{mn}$ , momento de empotramiento perfecto.

$2M'mn$ , momento debido al giro del extremo  $m$ .

$M'n'mn$ , momento debido al giro del extremo opuesto  $n$ .

$M''mn$ , momento debido al corrimiento relativo  $\delta$ .

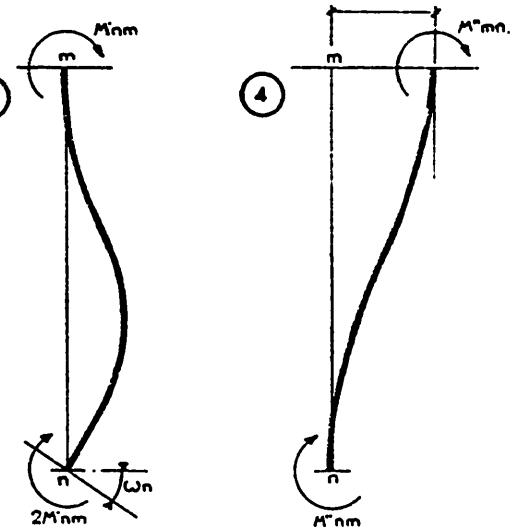
Para piezas de sección constante es  $M''mn = M''nm$ .

Así, pues, se llega a la siguiente expresión, que da el momento total:

$$M_{mn} = \overset{\circ}{M}_{mn} + 2M'mn + M'n'mn + M''mn.$$

Según se puede observar, los tres primeros estados y las tres primeras componentes correspondientes del momento total, son los mismos que los del caso de estructura con nudos intraslacionales.

Haciendo un razonamiento análogo al seguido



para estructuras intraslacionales, se llega a la expresión:

$$\sum_{(m)} M'mn = -\frac{1}{2} \left[ \overset{\circ}{M}_m + \sum_{(m)} (M'n'mn + M''mn) \right]$$

y llamando

$$\mathfrak{u}_{mn} = -\frac{1}{2} \frac{R_{mn}}{\sum_{(m)} R_{mn}};$$

a los factores de giro, igual que en el caso anterior, se obtiene la expresión para hallar el momento debido al giro del extremo  $m$ :

$$M'mn = \mathfrak{u}_{mn} \left[ \overset{\circ}{M}_m + \sum_{(m)} (M'n'mn + M''mn) \right]. \quad [6]$$

Si se considera ahora el piso  $r$  y se da un corte horizontal por éste a todos los soportes (fig. 7.<sup>a</sup>), para que exista equilibrio se ha de verificar que:

$$\sum_{(r)} Q_{mn} = \sum_{i=1}^r H_i,$$

siendo  $H_i$  las fuerzas horizontales que actúan sobre la estructura por encima del piso  $r$ .

Si todos los soportes del piso  $r$  tienen la misma altura,  $h_r$ , se tiene:

$$\sum_{(r)} Q_{mn} = Q_r = -\frac{1}{h_r} \sum_{(r)} \left[ 3(M'_{mn} + M''_{mn}) + 2M'_{nm} \right].$$

de donde:

$$\sum_{(r)} M''_{mn} = -\frac{3}{2} \left[ \frac{Q_r \cdot h_r}{3} + \sum_{(r)} (M'_{mn} + M'_{nm}) \right].$$

( $\sum$  indica suma extendida a todos los soportes del piso  $r$ ).

Haciendo  $\bar{M}_r = \frac{Q_r \cdot h_r}{3}$  y llamando factores de corrimiento a los números

$$\gamma_{mn} = -\frac{3}{2} \frac{R_{mn}}{\sum_{(r)} R_{mn}}$$

se llega a la expresión:

$$M''_{mn} = \gamma_{mn} \left[ \bar{M}_r + \sum_{(r)} (M'_{mn} + M'_{nm}) \right] \quad [7]$$

que da los momentos debidos al corrimiento.

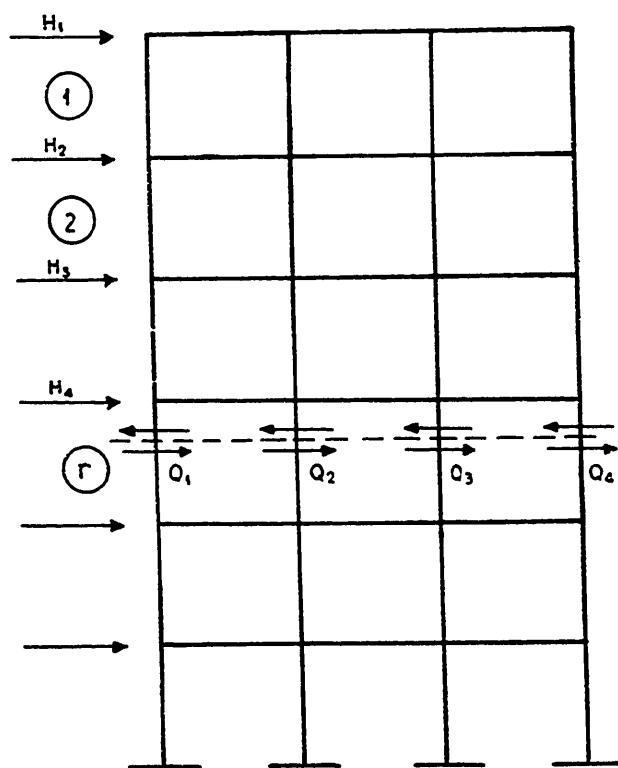


Figura 7.\*

En el caso de que la sobrecarga solamente fuese vertical, se tendría que  $H_i = 0$ , y por tanto,  $Q_r = 0$ ; luego  $M_r$  sería nulo y se obtendría la siguiente expresión para hallar los momentos debidos al corrimiento:

$$M''_{mn} = \gamma_{mn} \left[ \sum_{(r)} (M'_{mn} + M'_{nm}) \right].$$

En una forma análoga se pueden obtener las fórmulas para el caso en que todos los soportes del piso  $r$  no tengan la misma longitud.

En cuanto al proceso de cálculo, y si se supone que solamente hay fuerzas verticales, se realiza de forma análoga al caso de nudos intraslacionales, si bien hay que hacer intervenir en cada soporte unos nuevos factores  $\varphi$  de corrimientos  $\gamma$ .

Se empieza por dar una vuelta a todos los nudos, igual que en el caso de nudos intraslacionales; a continuación, y por pisos, se suman los momentos  $M'$  (obtenidos en la vuelta anterior) de los dos extremos de todos los soportes del piso, y esta suma se multiplica por los factores  $\gamma$  de cada soporte y se obtienen los  $M''$ . Una vez terminada esta vuelta con todos los pisos, se vuelve a los nudos, sumando en cada

uno de ellos el momento de sujeción  $M_r$ , con los  $M'$  de los extremos opuestos de las barras que concurren en el nudo y los  $M''$  de los soportes que concurren en él, se multiplica esta suma por los factores  $\gamma$  y se obtienen unos nuevos  $M'$ . Cuando se termina con los nudos, se continúa con los pisos, y alternando estas operaciones de reparto en nudos y en pisos, se continúa la operación hasta obtener valores iguales para los momentos  $M'$  y  $M''$  en dos iteraciones consecutivas.

Si hay sobrecarga horizontal al efectuar la suma de los momentos  $M'$  en los dos extremos de todos los soportes de un piso, habrá, para obtener los momentos  $M''$ , que sumar una constante, que es el momento de piso  $M_r$ ; por lo demás, el cálculo es en todo análogo al caso anterior.

### Consideraciones finales.

Hemos expuesto sucintamente el método original del Dr. Ingeniero G. Kani, que, como anticipábamos, tiene ventajas sobre los métodos iterativos que hasta ahora se venían empleando. Sin embargo, el método se puede, en algunos casos, mejorar, y principalmente para estructuras con nudos traslacionales puede conseguirse que la convergencia de las iteraciones sea más rápida, tomando como primeros valores para los momentos debidos a los giros los obtenidos de un tanteo previo en lugar de tomarlos iguales a cero.