Año CV • Revista de Obras Públicas • Núm. 2903

CONSTRUCCION, PROYECTO Y CALCULO

Por CARLOS FERNANDEZ CASADO,
Ingeniero de Caminos.

En esta segunda parte del trabajo, que por su extensión se desarrollará en dos artículos, el autor desmenuza hasta sus últimos detalles el problema del cálculo, particularizándolo a las estructuras reticulares, lo cual le permite, además, fijar su posición en este tema, tan debatido en esta REVISTA.

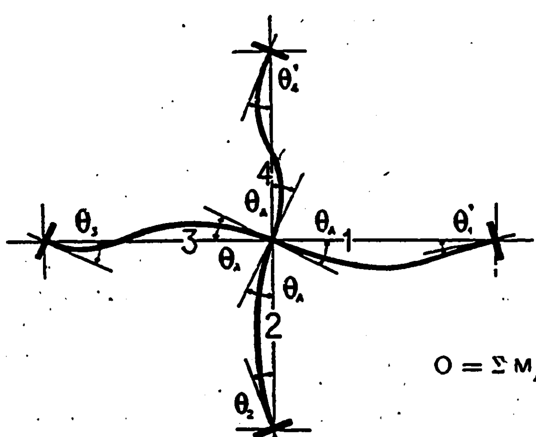
El cálculo de las estructuras reticulares.

Como ya indicamos en el artículo anterior, vamos a dedicarnos en éste a las estructuras reticulares, para llegar hasta el último detalle en el problema del cálculo y centrar en el artículo tercero el problema del proyecto, alrededor del cual debe girar toda la teoría de estructuras del ingeniero.

El cálculo, como ya dijimos en el artículo anterior, no tiene valor inventivo, es el resumen del desarrollo intuitivo y experimental anterior. Da lo presupuesto en él. Su valor está en ahorrar tiempo y esfuerzo al ordenar y resumir las posibilidades en un momento determinado, e incluso servir de punto de partida para avanzar, por extrapolación, más allá de él. Pero si en este último caso llegamos a un fracaso, éste no debe achacarse a las fórmulas. Del cálculo en general insistiremos principalmente en lo que se refiere a su valoración en cuanto a método instrumental.

En la valoración de un método de cálculo hay una serie de factores subjetivos, que conviene tener en cuenta antes de sentar un criterio que sirva de base para dicha operación.

Muchas veces las preferencias dependen de circunstancias fortuitas: la ocasión en que se aprendió el método, el grado de odiosidad con que nos lo enseñaron, el haberlo encontrado por nuestros propios



$$M_1 = \mu_1 - k_1\left(\theta_A + \frac{1}{2}\theta'_1\right)$$

$$M_2 = \mu'_2 - k_2\left(\theta_A + \frac{1}{2}\theta_2\right)$$

$$M_3 = \mu'_3 - k_3\left(\theta_A + \frac{1}{2}\theta_3\right)$$

$$M_4 = \mu_4 - k_4\left(\theta_A + \frac{1}{2}\theta'_4\right)$$

$$O = \Sigma M_A = \Sigma_A \mu - \theta_A \Sigma_A k - \frac{1}{2}\Sigma k \theta_x$$

$$\theta_A = \frac{\Sigma_A \mu - \frac{1}{2}\Sigma k \theta_x}{\Sigma_A k}$$

Primera aproximación: $\theta_x = O$ $\qquad \theta^{I}_A = \dfrac{\Sigma_A \mu}{\Sigma_A k}$

Segunda aproximación: θ_x $\qquad \theta^{II}_A = \theta^{I}_A - \dfrac{1}{2}\dfrac{\Sigma k \theta_x}{\Sigma_A k}$

Fig 1.ª — Resumen esquemático del método de Maney (fig. 158 de *Cálculo de Estructuras Reticulares*, 2.ª ed., 1940).

medios, el éxito obtenido en la primera aplicación, etc. Otras son de tipo temperamental: preferencia por los métodos analíticos o los gráficos, no querer dar nuestro brazo a torcer ante otro método aparentemente mejor del que uno sabe, aferrarse al método difícil que ha costado un gran esfuerzo en adquirir, para no reconocer como perdido el tiempo empleado en aprenderlo, etc. Las cosas se complican cuando uno ha puesto o ha creído poner algo en el perfeccionamiento del método. En estos casos se llega a verdaderos extravíos mentales, pues cualquier ingenua variante pone en vivo el orgullo paternal de su autor, y normal la operación de *compensación*. para equilibrar los esfuerzos cortantes en los conjuntos de barras afectadas por cada desplazamiento independiente. La figura básica es la 2.ª, que tomamos de la primera edición de nuestro libro (Madrid, 1934). Zaytzeff se lo asignó denominándolo "de los esfuerzos cortantes diferenciales". y ha pasado por suyo a los libros franceses, pero ya en la nota bibliográfica de *La méthode de Cross*, de Charon, publicada en esta Revista por el Ingeniero Sr. Carralero, se advertía que el método "Cross-Zaytzeff" no era otro que el denominado método directo por nosotros. Lo más pinto-

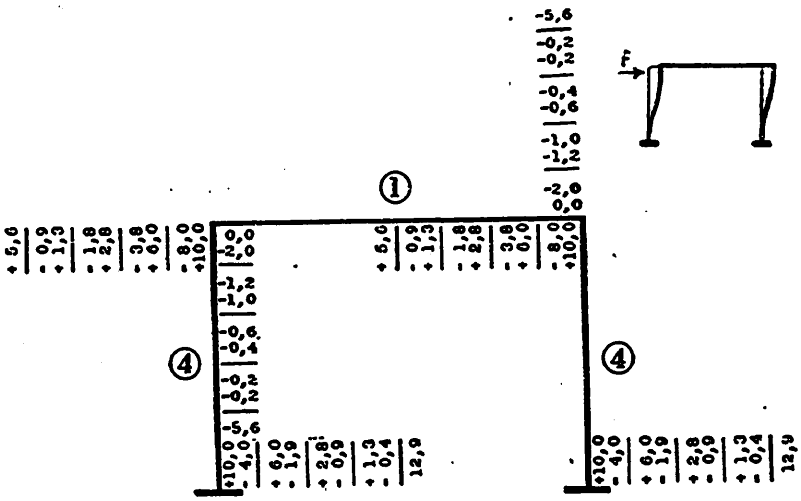


Fig. 2.ª — Figura fundamental del procedimiento directo para la distribución de momentos en una estructura con desplazamiento horizontal (fig. 44 de *Cálculo de Estructuras Reticulares*, 1.ª ed., 1934).

en ciertos países no se toleran métodos que no hayan inventado o reinventado los nacionales. Podríamos presentar muestras de toda clase de apropiaciones indebidas y descubrimientos de mediterráneos, pero nos vamos a limitar, como muestra, a los llamados métodos de Kanmüller y de Zaytzeff.

El método de Kanmüller resulta ser el redescubrimiento del método de Maney, que nosotros hemos denominado de *distribución de giros de nudos*, publicándolo en extracto desde la segunda edición de nuestro *Cálculo de Estructuras Reticulares*, Madrid, 1940, según artículos de revistas americanas del año 1931. Basta comparar la figura 1.ª tomada de nuestro libro, con el artículo dedicado a dicho método por el Ingeniero Sr. Blanco Villoria en esta misma Revista (agosto 1956).

El llamado método de Zaytzeff no es más que el designado por nosotros *método directo* para resolver los desplazamientos de nudos en estructuras de retícula rectangular, en el cual, al hacer la distribución de momentos se introduce al final de cada ciclo resco del caso es que la segunda edición del Zaytzeff se ha enriquecido con 80 páginas tomadas directamente de nuestro libro (el total son 224 páginas). entre las cuales, el ejemplo íntegro de viga Vierendeel resuelto por el método directo, que ha pasado a un libro italiano (Erosciuchi: *Il gratiacielo in cemento armato*) como resuelta por el "método Zaytzeff".

Dejando estas pequeñas cuestiones a un lado, veamos qué condiciones deben exigirse a todo método de cálculo, que se destine a calcular estructuras resistentes. Nos aparecen las siguientes:

a) *Adecuación a la materia*, que en nuestro caso tiene una realidad concretísima, plástica, afectada por fenómenos físicos.

b) *Máxima fidelidad* a sus normas, debiendo utilizar el mismo esquema formal o las mismas fórmulas en todos los casos.

c) *Mínimo artificio conceptual*, debiendo basarse en un conjunto de intuiciones directoras, enraizadas en fenómenos físicos fáciles de recordar.

d) *Seguridad de aplicación* en cuanto a mínimo de riesgos de error y máximo de posibilidades en la comprobación de resultados parciales y finales.

e) *Elasticidad de empleo* que permita tanteos rápidos o resultados afinados, según los casos, y, además, modificaciones en la estructura o corrección de errores sin perder todo el trabajo realizado.

Mediante las condiciones *a*, *b* y *c*, que nos dan el valor teórico del método, conseguimos, además, el mayor rendimiento pedagógico, pues reduciendo al máximo el artificio y avanzando siempre en contacto con el fenómeno físico, tenemos un aprendizaje directo del comportamiento estructural. Las condiciones *b*, *c* y *d* son esenciales para poder dejar la mayor labor de cálculo en manos de auxiliares, y la *e*, da el máximo rendimiento en este sentido, permitiendo al Ingeniero llegar a valores aproximados en tanteos rápidos, que luego afinará el auxiliar hasta conseguir el grado de exactitud requerida.

El valorar un método de cálculo por el ahorro de tiempo que supone, es completamente secundario, pues la mayor parte de este tiempo se va en horas de auxiliares. En cambio, hay que aquilatar en las horas del Ingeniero preparando el esquema de desarrollo, y no por economía, sino porque este tiempo se roba al proyecto propiamente dicho. No hay duda que lo económico es una de las categorías decisivas en Ingeniería, pero esto no debe llevarse hasta envenenar la labor misma del Ingeniero. Conseguir lo estricto supone muchas veces un verdadero derroche de tiempo y energía.

Son los puntos de vista teóricos los que nos aseguran la excelencia de un método de cálculo. Se trata de llegar a formas estructurales óptimas, que por ello han de poseer una armonía grata especialmente al sentido de la vista. Esta razón obliga a tener presente el esquema formal inicial, para que opere a lo largo del proceso imaginativo de proyectar, dando tiempo a que madure la forma definitiva. En este aspecto tienen primacía los métodos gráficos, pero el de Cross está en la misma línea que ellos, con la ventaja de estar despojado del artificio inherente a todas las construcciones geométricas.

En esta cuestión de métodos no hay que confundir los objetivos diferentes de un método expositivo y de un método operativo. Ambos deben tener en su base intuiciones adecuadas que ha de realizar el que los utiliza, pero así como en el método expositivo-didáctico éstas han de poner en vivo toda la evolución de la disciplina (desde Ritter, Mohr, etc., en nuestro caso), en el método operativo el rigor histórico no es obligatorio y manda más la eficacia, por lo cual las intuiciones pueden tomarse de donde convenga.

Vamos a ponernos en contacto con los diferentes métodos de cálculo de estructuras reticulares, recurriendo a experiencias personales, a través de la pequeña historia de nuestra relación con ellos. Esto, además de animar el análisis, dejará en claro los factores subjetivos que nos llevaron a la elección del método de Cross, en la cual nos ratificamos plenamente hoy día.

Al iniciar nuestra actividad profesional en el año 1925, el único método que teníamos a mano para calcular estructuras reticulares era el de las *masas elásticas*, desarrollado por D. Juan Manuel de Zafra en su libro *Cálculo de Estructuras*, diez años antes. Este libro, en la fecha de su publicación, era uno de los tratados más completos de la teoría de estructuras, y en la rama de los reticulares reflejaba fielmente el estado de la cuestión. Aprovechamos esta ocasión para llamar la atención de los jóvenes sobre esta excelsa figura de la Ingeniería española, que, con la de D. Eugenio Ribera, llenan toda la evolución del hormigón armado en el primer cuarto de nuestro siglo. Zafra, especialmente, llegó a conseguir ese difícil equilibrio entre ciencia y arte de la construcción que consideramos como meta a la que debe aspirar todo Ingeniero constructor. Creemos que ha sido injustamente relegado al olvido y, aunque sólo sea como desagravio, recomendamos a los interesados en estas cuestiones, leer o releer todo el capítulo décimocuarto del libro citado (tomo II, págs. 515 a 557), modelo de exposición clara y rigurosa. Nosotros comenzaremos por resumirlo en lo que sigue.

En el epígrafe *492* aborda Zafra el estudio de la *flexión propagada* a través de una barra cualquiera en un *entramado reticular*, llegando a definirla por el punto en que la *flexión propagada* M *se anula* (figura 3.ª), obteniendo como elemento de cálculo *la abscisa derecha* δ (para la propagación de derecha a izquierda), con la que se hermana la *abscisa izquierda* i (para propagación de izquierda a derecha), deducida del mismo modo en el epígrafe *495*. Simultáneamente obtiene las variaciones angulares de las extremidades izquierda y derecha, respectivamente.

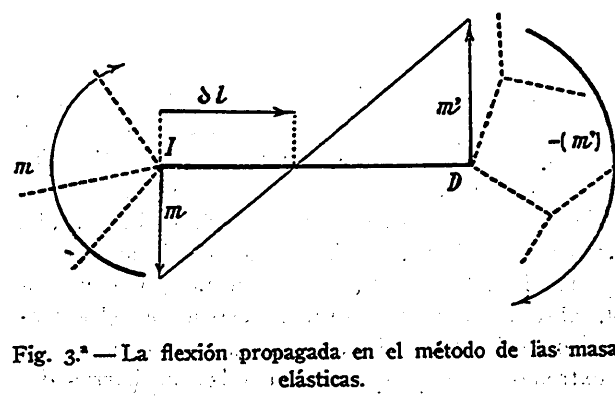


Fig. 3.ª — La flexión propagada en el método de las masas elásticas.

En el epígrafe *493*, además de introducir las dos condiciones de nudo rígido, nulidad de la suma de los momentos flectores en los extremos de sus barras, e igualdad de los ángulos de giro de estos extremos, define la magnitud fundamental del método: *la masa elástica*, como relación entre la acción-momento aplicada en uno de los extremos de la barra y la variación angular sufrida por ese mismo extremo. Un detalle que no debemos olvidar es que hay que articular este extremo, desgajando la barra del nudo total.

Introduciendo las masas elásticas en las condiciones de nudo, se obtiene en el epígrafe *494* la relación [1], que es la clave del *modus operandi*, entre la abscisa derecha de una barra y la suma de masas elásticas izquierdas, de las que confluyen en su extremo derecho. Hay que exceptuar siempre la barra de que se trata, lo cual, a nuestro modo de ver, es un defecto sistemático del método. La relación simétrica de la anterior entre abscisa izquierda de una barra y suma de masas elásticas derechas, de las que confluyen en el extremo izquierdo, se obtiene en el epígrafe *495*.

$$\partial = \frac{1}{3' + \dfrac{6\,Ei}{l \sum \varepsilon'_i}}$$

$$i = \frac{1}{3 + \dfrac{6\,Ei}{l \sum \varepsilon_d}} \qquad [1]$$

Estas fórmulas [1] nos dan abscisas en función de masas elásticas, y como también son necesarias las fórmulas inversas [2], masas elásticas en función de abscisas, se deducen en el epígrafe *496*.

$$\varepsilon' = \frac{6\,Ei}{l} \, \frac{1-\partial}{2-3\partial}$$

$$\varepsilon = \frac{6\,Ei}{l} \, \frac{1-i}{2'-3'i} \qquad [2]$$

Con ayuda de las fórmulas anteriores, se puede ordenar un proceso operatorio en el cual se calculen alternativamente abscisas y masas elásticas de las sucesivas barras. El mecanismo es el siguiente: conociendo las masas elásticas derechas de las que concurren en el extremo izquierdo, se deduce la abscisa izquierda de la barra en cuestión, y conocida esta abscisa, deducimos su masa elástica en el extremo izquierdo. Las mismas operaciones se hacen en el extremo derecho, y esto con todas las barras del entramado, partiendo, como se indica en el epígrafe *497*, de las que estén directamente sustentadas por empotramiento o articulación, ya que en las extremidades sustentadas conocemos las masas elásticas correspondientes a la otra extremidad, las cuales son las rigideces de Cross $\frac{4\,EI}{L}$ para empotramiento, y $\frac{3\,EI}{L}$ para articulación. El punto fijo correspondiente está en la articulación o en el tercio de la luz junto al empotramiento (esto último si la barra es de sección constante).

$$\begin{aligned} (2' + \rho)\, m + 1\, m' &= -\mu' \\ 1\, m + (2 + \rho')\, m' &= -\mu \end{aligned} \qquad [3]$$

Para la flexión directa establece Zafra un sistema de dos ecuaciones [3], mediante el cual se calculan los momentos de empotramiento en los extremos de una barra partiendo de la flexión isostática correspondiente (intervienen las dos sumas de masas elásticas de las barras que arrancan de sus respectivos extremos). Estos momentos de empotramiento son los que han de propagarse por las demás barras de la estructura, repartiéndose en cada nudo en razón de las masas elásticas y anulándose en variación lineal al pasar por los puntos que marcan las abscisas δ o i correspondientes. Al repartir en cada nudo hay que exceptuar la barra que aporta el momento, y aquí es donde vemos un defecto metódico, como ya habíamos anticipado, puesto que el número de coeficientes de reparto es $n(n-1)$, en lugar de las n correspondientes a Cross.

Volviendo al cálculo de las características elásticas de cada barra: masa elástica y abscisa derecha e izquierda, vemos inmediatamente que para no romper el mecanismo en que se eslabonan alternativamente ambas características es preciso poder llegar a todas las barras, conociendo las masas elásticas derechas de las que concurren en su extremo izquierdo, y las izquierdas de las que concurren en el derecho. Esto exige que la estructura sea de *malla abierta*, pues en cuanto tenga una célula cerrada desaparece dicha posibilidad.

Este es uno de los graves fallos, no sólo del método de las masas elásticas, sino de todos los que intentan obtener directamente las características elásticas de la estructura. Al llegar a las estructuras de malla cerrada, tienen que abandonar su aparente superioridad de obtener resultados mediante fórmulas, para conseguirlos por aproximaciones sucesivas.

La perfección de estos métodos queda virgen cuando nos limitamos a la viga de varios vanos, o a su homólogo el pórtico múltiple de un solo piso, que en realidad eran las únicas estructuras continuas de principio de siglo. Pero ya Zafra apunta que: *son frecuentísimos los entramados para edificios industriales con pilares y vigas, lo mismo metálicos que de hormigón armado* (fig. 277, pág. 540, tomo II).

La solución que da Zafra para estos casos es la de evaluar las masas elásticas entre $\frac{3EI}{l}$ (articulación) y $\frac{4EI}{l}$ (empotramiento), "según se acerca más a uno u otro caso extremo dicho nudo, a la articulación si es relativamente flexible, o al empotramiento si posee bastante rigidez".

Pero, aparte de lo inadmisible que sería una aproximación de este tipo en el momento actual, el fallo metódico no le corresponde a las masas elásticas de Zafra, sino, como ya hemos establecido, a todos los métodos que pudiéramos llamar de distribución directa. Hay una evidente falta de fidelidad a sus principios. En Strassner, por ejemplo, resulta verdaderamente triste ver cómo después de dedicar 116 páginas a la viga de varios vanos y al pórtico de un solo piso, se pasa sobre ascuas en 10 páginas (117 a 126 de la edición española) dedicadas a los entramados. Se hallan los focos de las barras fijándolos *a priori por estimación*, para repetir los cálculos por falsa posición hasta llegar a una coincidencia entre los valores tomados como datos y los obtenidos al final. Lorente de Nó, al enfrentarse en defensor de estos métodos, con la cuestión de la malla cerrada, tiene que confesar el mismo fracaso teórico: *el método de los puntos fijos resuelve la dificultad mediante tanteos*, es decir, *"que el método de los puntos fijos es, en estas estructuras, un método aproximado que nos conduce al mismo grado de aproximación más rápida y sencillamente que esos* distribution-methods". No entramos a discutir la mayor rapidez y sencillez, que para lo que estamos estableciendo es completamente secundario.

El otro fallo del método de las *masas elásticas* está en que su aplicación queda limitada a las estructuras con nudos indesplazables, pues aunque Zafra estudia el problema de los desplazamientos en los epígrafes 503 a 507, *Estudio más riguroso*, no expone resultados aplicables, sino que, por el contrario, llega a la conclusión escéptica de que "el cálculo de una estructura de nudos sensiblemente deformables se hace imposible". Recomienda para los casos en que no sea muy sensible esta deformabilidad, "la estimación prudencial de las masas elásticas entre 3 y 4,5 veces $(Ei:l)$, si corresponden a barras empotradas, y entre 2,5 y 3,25, si se refieren a otras articuladas".

En realidad, el método de las masas elásticas tiene su especial aplicación a la viga de varios vanos o pórtico múltiple de un solo piso sin desplazamiento de dintel. Todas las recetas que se han dado para abordar otros tipos de estructuras son verdaderamente ingenuas y muchas erróneas.

Insistimos de nuevo en que estos fallos no son privativos del método de las masas elásticas de Zafra, que en realidad no es otra cosa que un estado intermedio en la evolución del método de los puntos fijos, sino que son comunes a todos los métodos de la misma época. Hay que tener en cuenta que el horizonte estructural en que se iniciaron con Ritter, fué el de la presencia exclusiva de la viga de varios tramos, apareciendo después el pórtico múltiple de un solo dintel. La otra dirección, con Mohr, hacía las deformaciones angulares parte del problema de los esfuerzos secundarios en las triangulaciones de las jácenas metálicas.

Es tópico que los métodos de cálculo de estructuras reticulares derivan de Ritter y de Mohr; pero a veces se dice esto como si todo estuviera ya en estos autores, surgiendo después las modalidades sucesivas por evolución interna, como se desarrolla la planta a partir de su semilla. Esto es erróneo no sólo desde el punto de vista material, pues vemos a distintas personalidades que intervienen aportando más o menos granos de arena, sino también desde el punto de vista teórico, pues lo que se proponían Ritter o Mohr no es lo mismo que lo propuesto en el momento actual. El horizonte en que nos movemos hoy es completamente distinto al que determinó las aportaciones iniciales de estos investigadores. No hay más que abrir un libro de aquella época para encontrarnos asaltados por las estructuras metálicas, arcos o jácenas, típicos de entonces, cosas que en la actualidad tienen que interesarnos poco.

En uno de los primeros proyectos de nuestra actuación profesional tratamos de aplicar, sin éxito alguno, el método de las masas elásticas a una estructura sencilla: el marco rectangular doble correspondiente al entramado transversal de un depósito de agua de dos compartimientos, con cubierta y fondo de hormigón armado. El caso de carga total lo resolvimos por simetría reduciéndolo a dos pórticos sencillos; pero el de carga en un solo compartimiento resultaba inabordable directamente, pues la cerrazón de las mallas rompía el encadenamiento necesario para el cálculo de los coeficientes elásticos. Pero más radicalmente, el problema estaba en que no veíamos cómo podía tenerse en cuenta el fenómeno físico del desplazamiento transversal de la estructura para actuación de fuerzas horizontales en dintel, o simplemente por asimetría en las cargas.

Este último problema se plantea ya en el pórtico sencillo simétrico, cuando la carga aislada en dintel no está situada en el punto medio de éste. López Rodríguez, en aquella época, había estudiado este caso y por Castigliano deducía las masas elásticas (relación del momento actuante al ángulo de giro) en la coronación de los pilares supuestos articulados o empotrados en sus pies. La variabilidad era extraordinaria y únicamente se obtenía la masa elástica verdadera cuando la fuerza estaba en el centro del vano (ausencia de desplazamientos transversales). En los demás casos se englobaban dentro del momento flector términos debidos a la flexión directa y al desplazamiento transversal.

Hemos de confesar que no conseguimos aclarar ideas hasta el año 1930, en que topamos con el método de las deformaciones angulares en su forma "Slope-deflection" expuesta en *Concrete Plain and Reinforced* de Taylor, Thompson y Smulski (4.ª edición, Nueva York 1928). Entonces nos apareció claramente el desplazamiento transversal como fenómeno físico (*Side-sway*) y además las ecuaciones para resolverlo en un pórtico doble.

Con el método "Slope-deflection" tuvimos por primera vez la sensación de que una estructura reticular era abordable por complicada que fuera; pero fracasamos nuevamente al pretender aplicarlo a estructuras con un cierto número de barras y con varios desplazamientos. Claro está que ahora el fracaso era de orden práctico debido a la dificultad de resolver por nuestros propios medios sistemas de ecuaciones cuando el número pasa de la docena. Pero somos fieles a este método, primero, porque fué el que nos cimentó la esperanza de llegar a dominar las estructuras reticulares, y segundo, porque siempre está a la mano y puede llevarse a feliz término con las máquinas de calcular disponibles en la actualidad.

En reconocimiento a estos servicios hemos sistematizado dicho método en el caso general de barras con momento de inercia variable, introduciendo los dos conceptos de Cross, rigidez y factor de transmisión. Esto nos ha permitido utilizarlo además como introducción al método de Cross, aunque es un modo de deducción heterodoxo, pues Wilson y Maney lo expusieron directamente para barras de momentos de inercia constante en 1915 en el *Boletín* núm. 80 del Laboratorio de Ingeniería de la Universidad de Illinois, ampliándolo después a las de momentos de inercia variable sin utilizar los conceptos de Cross en el *Boletín* 108 del mismo Laboratorio.

Recordaremos que la primera exposición de dicho método se hizo con motivo del cálculo de la estructura de un edificio de 20 pisos sometido a la acción del viento, y se llegaba a un sistema de 60 ecuaciones. Existen tres tipos de ecuaciones: las de nudo (tantas como nudos), las de las barras (número doble al de éstas) y las de desplazamiento, siendo las incógnitas los ángulos de giro (uno por nudo), los momentos de empotramiento en las extremidades de las barras (doble que éstas) y los desplazamientos transversales.

Ordenando las ecuaciones se facilita la resolución del sistema, para lo cual pueden utilizarse cuadros-falsillas como, por ejemplo, las de Unold (véase nuestro *Cálculo de Estructuras Reticulares*), pero también puede reducirse el número de ecuaciones eliminando las ecuaciones de nudo. En este caso, si no existen desplazamientos, todas las ecuaciones son de un mismo tipo, conteniendo cada una los ángulos de giro correspondientes a la constelación de nudos que se encuentran a un paso de barra de los sucesivos nudos de la estructrura, que va definiendo cada ecuación. Este es el artificio que utiliza Takabeya, quien lo expuso en 1930, aunque la sistematización más antigua es la de Bendixen, en 1914, y la más completa es la de Guldan, en 1940, debido principalmente a un estudio más completo del problema de los desplazamientos, lo cual le viene del avance dado en ese terreno a costa del método de Cross.

Una nueva versión del método de las deformaciones angulares, la da García Ortega en 1945, proyectando sobre los ejes coordenados y ordenando las ecuaciones en sistemas tabulados.