

zamientos de un modo sistemático, considerando la estructura como cadena cinemática e introdujo el interesante concepto de *grado de movilidad*. Por no haber hecho el autor una publicación definitiva de su método, como en repetidas ocasiones le hemos aconsejado, no ha llegado a ser lo suficientemente conocido en España y en el extranjero, pues se trata de la primera sistematización del *método de distribución directa*, que más tarde lo realizarían también Lin, en los *Proceedings* de la *Am. S.C.E.* (octubre 1934), y Wyse, en *Journal of Am. C.I.* (noviembre 1938), recogiendo por primera vez en texto en el libro de Shepley *Continuous beam structures*, del año 1942. Prieto Moresi utiliza las masas elásticas tomadas de Zafra y los coeficientes de transmisión tomados de Cross, pero ampliando este concepto al considerar en su definición, en lugar de empotramiento perfecto en el extremo no liberado, las condiciones elásticas que realmente existen en el entramado. La determinación de características se hace, como ya dijimos, partiendo de los nudos con sustentación directa, adoleciendo del mismo inconveniente de fallar en las mallas cerradas, donde hay que proceder por aproximaciones sucesivas.

Intermedio entre el método de distribución directa y el de Cross, está el *de los grados de empotramiento* de Torroja (*Cálculo de esfuerzos en estructuras reticuladas*, publicación 159 del I.T.C.C.). Aísla alrededor de un nudo el conjunto de barras que están a un recorrido de dos luces desde dicho nudo, suponiendo en los nudos extremos de esta estructura parcial un cierto empotramiento elástico, cuya efectividad varía desde cero, si existe articulación, hasta la unidad, si hay empotramiento perfecto. En estas condiciones deduce el grado de empotramiento de las barras alrededor del nudo, característica que permite llegar a los momentos en las extremidades de las barras coincidentes en el nudo, partiendo del momento total que actúe sobre él. Los momentos en dichas extremidades inducen en las extremidades opuestas de las barras momentos de traslado, que nos completan los momentos en la barra debidos a su flexión directa. En la flexión propagada se empieza por repartir entre las barras del nudo cada uno de los momentos que hayan llegado a él, en razón de sus rigideces efectivas, pero omitiendo la de la barra que aporta el momento. Poniendo estos momentos en función de los grados de empotramiento, tenemos una fórmula en la que figuran los grados correspondientes a la barra contigua (que transmite el momento) y a la barra afectada. Estos momentos se transmitirán dentro de cada barra al extremo opuesto. Para facilitar la aplicación de las fórmulas el autor da un abaco, partiendo de grados de empotramiento y coeficientes de transmisión y unos gráficos de los valores de los momentos en flexión directa para carga continua y fuerza aislada.

En cuanto al método tan celebrado y anunciado por su autor, Sr. López Rodríguez, que iba a superar

el método de Cross, no es preciso ocuparse de él, ya que Lorente de Nó ha puesto en claro de un modo definitivo que la esperanza de su autor estaba fundada en una base falsa, la de equivalencia entre una fuerza ficticia de fijación y un par actuando en cualquier nudo.

Antes de terminar con el método de Cross es preciso reconocer que una de las aportaciones debidas indirectamente al método de Cross y a todos los que nos hemos ocupado en exponerlo integralmente, es el estudio sistemático de los desplazamientos de las estructuras reticulares. Sus resultados son aplicables a todos los métodos, pues el problema es general y pertenece a la teoría de estructuras. Por este motivo no se debe establecer valoración entre métodos, desde el punto de vista de los desplazamientos, ya que parten de un terreno común y la separación está únicamente en el artificio metódico propio de cada uno.

El hecho de que haya sido el método de Cross el que ha puesto en marcha el estudio definitivo de los desplazamientos, se explica por el carácter intuitivo del mismo y su referencia directa a fenómenos físicos, ya que precisamente en las estructuras resistentes los hechos más fácilmente comprobables son las deformaciones y los desplazamientos.

Para dar una idea del estado en que se encontraba este problema en los autores clásicos de los puntos fijos, basta repasar Strassner, quien dedica sus páginas 48-65 (edición española) a un estudio verdaderamente premioso de los desplazamientos en el pórtico múltiple de un solo piso. El procedimiento operativo no puede ser más torpe: se considera la traslación de cada pilar como si fuera única, sumándose los momentos obtenidos aisladamente, aunque se trate de la traslación común originada por el corrimiento del dintel. En las páginas 120 a 125 se estudia el entramado pórtico múltiple de varios pisos, pero únicamente para actuación de fuerzas horizontales en entramados completos de dos y tres pisos. Se hace referencia vaga al caso de estructuras más complejas, y el autor se queda tan satisfecho.

Este punto de vista del fenómeno físico, que consideramos es lo esencial del método de Cross, pasa inadvertido para muchos ingenieros, que no construyen y ven sólo su aspecto aritmético de aproximaciones sucesivas, lo cual les lleva a sentir un cierto desprecio por método tan imperfecto. Consideramos piedra de toque para apreciar la sensibilidad estructural de un ingeniero, su reacción en este enfoque del problema.

El estudio de los desplazamientos estaba ya planteado antes de Cross, pero el modo de enfocar la cuestión desde el entramado en su totalidad física, ha abierto el horizonte para tratarlo de un modo integral y no como corrección o como influencia secundaria.

Los *métodos clásicos* han sido descritos con toda claridad y sistematismo por Lorente de Nó en la

serie de artículos publicados en esta REVISTA, que luego han tomado cuerpo independiente en "Los métodos directos (y los métodos de aproximaciones sucesivas) de Cálculo de Estructuras". Este trabajo orienta al lector sobre la importancia y utilidad de dichos métodos, aunque erigido en defensor de los mismos, nuestro compañero Lorente de Nó proyecta hacia el pasado algunos logros actuales, y de su cosecha, mejorándolos en esta operación, aunque modestamente se quede en expositor de los mismos. Su estudio tan completo nos dispensa de traerlos a nuestra exposición, ya que, además, en el método de las masas elásticas hemos hecho la crítica de los puntos que consideramos vulnerables.

Tenemos que hacer una objeción a su conclusión de que en las estructuras abiertas de movilidad múltiple resultan de más ventajoso empleo los métodos generales (Culman, Bresse Castigliano), y es que estas estructuras no son específicamente reticulares y, por consiguiente, quedan fuera del ámbito de los métodos típicos, como el de Cross. En estos casos resulta interesante el modo de ver de la analogía de la columna, o más propiamente de la zapata (el mecanismo del cálculo resulta análogo que en los otros métodos), especialmente en la forma original expuesta por Miranda como estabilidad de flotación de la rebanada análoga.

Queda un método apartado de los anteriormente descritos, interesante desde el punto de vista teórico, pero que juzgamos instrumento inadecuado para el cálculo de estructuras reticulares, y es el de Ostensfeld, que el autor denomina *Deformations methode* en su versión alemana. Su interés estriba en que coordina los métodos que utilizan esfuerzos como incógnitas hiperestáticas, estableciendo estados virtuales de la estructura por cada una de dichas incógnitas, con los métodos que utilizan como incógnitas las deformaciones, que son los verdaderamente adecuados para el cálculo de estructuras reticulares.

En cuanto a los nuevos métodos o variantes de los de "aproximaciones sucesivas", adoptando esta designación provisionalmente, tenemos de interés el de Maney, rebautizado por Kanmüller, y el de Kani. Del primero ya establecimos su antigüedad, y añadiremos que es conocido en España no solo por nuestro libro, sino por el *Hormigón Armado* del Ingeniero señor Moral, quien da un ejemplo aclaratorio muy detallado. Los defectos del método, expuesto con todo detalle en el número de agosto de esta REVISTA (*Otro método iterativo para el cálculo de estructuras reticulares*, por J. L. Blanco Villoria), son, en parte, análogos a los de Kani, que criticamos a continuación, pero advertiremos que no sabemos haya eclipsado al de Cross, del cual, como ya dijimos, es casi contemporáneo.

En el método de Kani se progresa por aproximaciones sucesivas, basándose en el mismo fundamento físico que el de Cross, de ir soltando alternativamente cada nudo y todos los de su primer entorno, previa-

mente inmovilizados mediante empotramiento perfecto: pero mediante un ingenioso artificio se reducen las operaciones, calculando en cada nudo únicamente los momentos que van apareciendo en sus barras debidos al giro propio de ese nudo.

En el número de mayo de esta REVISTA se describe de un modo completo el método (*Un nuevo método para calcular estructuras reticulares*, por Florencio del Pozo y Arturo Cernuda) para las dos particularidades de barras con momentos de inercia constante y entramados completos de retícula rectangular, que son aquellas para los que resulta indicado, pues en cuanto salgamos de ellos falla el ingenioso artificio a que hemos aludido. Este artificio se concreta en la fórmula [4], que se corresponde

$$M'_{ik} = \frac{\mu}{i k} (M_i + \sum_i M'_{ki}) \quad [4]$$

con la figura 5.^a tomada del folleto original del autor, donde se ve que M_{ik} y M_i son los momentos de empotramiento perfecto en una barra ik de un nudo

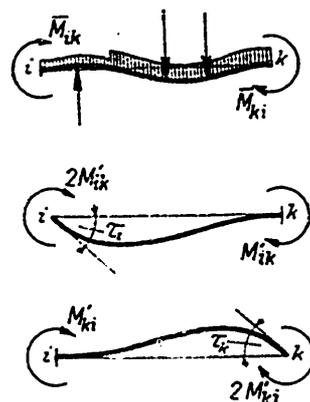


Fig. 5.^a -- Figura fundamental del método de Kani (*Die Berechnung Mehrstöckiger Rahmen*, Stuttgart, 1949, pág. 7).

i ; μ_{ik} es la mitad del factor de repartición en la barra ik , M'_{ik} , la mitad del momento en la extremidad de la barra debido al giro de esa extremidad, y M'_{ki} , el momento de la misma debido al giro de la extremidad opuesta. Si se tratara de barras con inercia variable, la fórmula se convertiría en la [5].

$$M'_{ik} = \frac{\mu}{i k} (M_i + 2 \sum_i \beta M'_{ki}) \quad [5]$$

donde β es el coeficiente de transmisión de momentos. En estas condiciones, falla el artificio del método al operar con mitades de los momentos debidos al giro del nudo, los cuales dan, sin más, los momentos inducidos en la extremidad opuesta (por ser $\beta = \frac{1}{2}$), y pueden sumarse directamente con los de desequilibrio inicial. Habría que transmitir los momentos multiplicándolos por el coeficiente de transmisión co-

respondiente (que sería doble del de Cross), y por el mismo motivo, en la suma final, el tercer sumando; para obtener el momento de empotramiento sería, a su vez, la suma de los momentos de los nudos inmediatos multiplicados por los coeficientes de transmisión de sus barras. En la misma ingeniosidad se basa "la eliminación automática de errores", pues si al hacer una auténtica transmisión nos equivocamos, ya no funciona esa seguridad, que únicamente actúa en las operaciones dentro del mismo nudo.

En el caso de desplazamiento, el ingenioso artificio reposa no solamente en que las barras sean de inercia constante, sino que, además, tengan la misma altura en cada piso. De este modo, los momentos de empotramiento local son iguales en las extremidades de una barra, y además, los de repartición y transmisión de cada ciclo suman vez y media los de repartición en cada barra. Al ir con los valores mltiples de éstos, aparece el número 3 de la fórmula [6],

$$\theta_r = -\frac{1}{h_r} \sum_r [3(M'_{ik} + M'_{ki}) + 2M''_{ik}] \quad [6]$$

$$M''_{ik} = \mu_{ik} [\bar{M}_r + \sum_r (M'_{ik} + M'_{ki})] \quad [7]$$

en la que figura como factor común la inversa de la altura.

Para estas condiciones sirve la fórmula [7], que ahora se completa con la [4], y ambas se van aplicando alternativamente, equivaliendo en su aplicación a las dos etapas de distribución y compensación del tan repetido método de distribución directa de Cross. (Véase el ejemplo tercero de nuestro *C. de E. R.*, donde aplicamos este método a una torre, haciéndose la compensación por pisos.) Si los pilares son de distinta altura, aparecen dos nuevos coeficientes, [8], y la fórmula de la compensación se complica [9]. El autor dedica cinco páginas de las sesenta de

$$c_{ik} = \frac{h_r}{h_{ik}} \quad , \quad v_{ik} = \frac{3/2 c_{ik} k_{ik}}{\sum_r c_{ik} k_{ik}} \quad [8]$$

$$M''_{ik} = v_{ik} [\bar{M}_r + \sum_r c_{ik} (M'_{ik} + M'_{ki})] \quad [9]$$

su publicación *Die Berechnung Mehrstöckiger Rahmen*, a indicar cómo se resolvería el caso cuando las piezas tengan inercia variable, pero no se ocupa de los varios casos de desplazamientos.

Es preciso desconfiar de los métodos cuya exposición fundamental se hace con simplificaciones tales como momento de inercia constante en sus barras, aunque luego se refieran de modo indirecto a casos más generales. Dan lugar a una coacción de partida en el proyecto de las estructuras, pues se tiende, naturalmente, a no salirse de las condiciones normales establecidas en la exposición.

En el artículo de la revista que hemos citado, aparece una apreciación discutible, que el ahorro de

tiempo es normalmente superior al 30 por 100 respecto a Cross, y dos suposiciones gratuitas desfavorables a este método: *la facilidad con que se cometen equivocaciones durante el desarrollo del cálculo y la de que obliga a cálculos larguísimo y pesados*, en el caso de estructuras con desplazamientos. Con respecto a los errores de aplicación de un método, los hay de dos clases: los que pueden cometerse al plantear el esquema del cálculo y los que se cometen al desarrollarlo. Los primeros son imputables al ingeniero que enfoca el cálculo, mientras que los segundos le corresponden a los auxiliares que se equivocan al sumar, restar, multiplicar o dividir. Los primeros se evitan estudiando Estructuras, y los segundos, teniendo buenos auxiliares.

En cuanto a métodos abreviados o simplificaciones del Cross, llamaremos la atención del método "dos ciclos", muy utilizado en toda América para el cálculo de entramados de edificios. Ahorra verdaderamente tiempo, por lo cual hemos dado un ejemplo en la segunda edición de nuestro *Cálculo de Estructuras de Edificios*.

Al terminar este estudio de métodos de cálculo de Estructuras Reticulares, recordaremos nuestro punto de vista en cuanto a todos los métodos de cálculo de estructuras. Para el resultado final es indiferente el nombre del autor: por consiguiente, puntos fijos, deformaciones angulares en sus diversas ordenaciones, distribución directa, grados de empotramiento, Cross, Maney, Kani, etc., resultan actualmente de análogo valor, si se tiene en cuenta las mismas condiciones iniciales, variación del momento de inercia de las barras y desplazamientos posibles, y las mismas acciones. Pero como autor de un tratado de cálculo de estructuras reticulares, tenemos el deber de orientar a todos los que se dedican a estos estudios, sobre la utilidad de estos métodos. La conclusión a que nos ha llevado la redacción del presente artículo es afirmarnos en nuestros puntos de vista anteriores, y como resumen de los mismos, nos vamos a permitir copiar un párrafo de la última edición de nuestro libro: "La gran ventaja del método de Cross es su simplicidad. No hace falta recordar combinaciones artificiosas, ni interpretar símbolos en fórmulas complicadas; el distribuir repartiendo y transmitiendo acude inmediatamente a la imaginación con haberlo realizado anteriormente una sola vez. Momentos flectores isostáticos y de empotramiento perfecto, son tópicos en Cálculo de Estructuras. Un pedazo de papel y un lápiz, bastan para acometer el análisis de cualquier estructura reticular."

Creemos firmemente que, en la actualidad, el método de Cross es la herramienta más eficaz para el cálculo de Estructuras Reticulares, ya se trate de oficinas de estudios, ya se trate de ingenieros aislados. Y para terminar definitivamente con este tema, que por su naturaleza resulta farragoso, vamos a exponer dos hechos concretos: publicada la segunda edición de *Der durchlaufende Träger*, de E. Morsch

(1938) (uno de los tratados clásicos del método de los puntos fijos), y antes de salir la tercera, lanzó el autor una tirada aparte de un capítulo nuevo dedicado al método de Cross "como complemento a la segunda y tercera edición de su libro sobre la viga de varios tramos".

Publicada por Guldan en 1952 la quinta edición de su libro sistematizando el método de las deformaciones angulares, aparece en 1955 un nuevo libro de este autor, titulado *Die Cross, Methode und ihre praktische Anwendung*, en el cual supera en ejemplos y extensión al anterior, adaptando sus numerosas tablas y gráficos al cálculo por el método de Cross.

* * *

Como apéndice y complemento del artículo, damos la bibliografía cronológica de los libros publicados acerca del método de Cross, que no creemos sea exhaustiva:

1930. Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moment-Proceedings de la Am. S.C.E. Mayo.
1932. Publicación en las Transactions de la Am. S.C.E. de la Memoria de Cross, con toda la discusión posterior.
Cross & Morgan: Continuous Frames of Reinforced Concrete. Nueva York.
1934. Primera edición del "Cálculo de Estructuras Reticulares".
1940. Segunda edición del "Cálculo de Estructuras Reticulares".
1941. Traducción española del *Cross-Morgan*. Madrid.
1942. *Shepley*: "Continuous beams Structures". Londres.
Soto Burgos: "Análisis de estructuras continuas". Madrid.
1943. El Prof. *Dischinger* incluye el método en el "Taschenbuch für Bauingenieur". Berlin.
1944. Tercera edición del "Cálculo de Estructuras Reticulares". Madrid.
Machati: "Die methode Cross". Viena.
1946. Cuarta edición del "Cálculo de Estructuras Reticulares". Madrid.
"Cálculo de Estructuras Reticulares especiales por el método de la distribución de momentos". Madrid.
1947. *Morsch*: Das Cross'che Verfahren. Stuttgart.
1948. Quinta edición del "Cálculo de Estructuras Reticulares". Madrid.
Blaszkowiak: Metoda Crossa. Gdansk (Polonia).
Titzc: "Moment ausgleichs-verfahren". Viena.
Dernedde, Mullen Hof: "Das Cross'che Verfahren". Berlin.
Johanson: Das Cross Verfahren. Berlin.
Jager: Festigkeitsnachweis in Stahl-betonbau, Viena.
1949. *Prenzlow*: Tragwerks-berechnung nach Cross. Berlin.
Cocpyn: Berekening van Staafwerken volgen de Methode "Cross". Groningen.
1951. *Halasz*: Anschauliche Verfahren zur Berechnung von Durchlaufbalken und Rahmen. Berlin.
1952. Sexta edición del "Cálculo de Estructuras Reticulares". Madrid.
Zaytzeff: La methode de Hardy Cross et ses simplifications. Paris.
Van Tussen Brock & Mijling: De reken methode Cross voorde Beton en Staal Constructeur. Amsterdam.
1953. Segunda edición del *Zaytzeff*, añadiendo 80 páginas tomadas de nuestro "Cálculo de Estructuras Reticulares".
Fries: Fachwerk und Rhamenwerk. Berlin.
Charon: La Méthode de Cross. Théorie et applications. Paris.
1954. *Prenzlow*: Tragwerks berechnung nach Cross. Berlin.
Traducción al francés del "Cálculo de Estructuras Reticulares" (Calcul des grandes ossatures reticulaires a noeuds rigides). Paris.
1955. *Guldan*: Die Cross-Methode. Viena.
Segunda edición del *Charon*.
1956. *Pernod*: Instruction al calcul des systèmes hipers-tatiques. Méthodes de Hardy Cross, de Bresse et de Castigliano. Paris.