

# EXPRESION SIMPLIFICADA DE LOS MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO DE VIGAS DE SECCION UNIFORME

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ,  
Ingeniero de Caminos.

*Después de exponer el problema del epígrafe aplicado a distintos casos, presenta el autor fórmulas de aplicación práctica y desarrolla varios ejemplos.*

## Carga puntual.

Si tenemos una viga de luz " $l$ " y de sección uniforme, empotrada en sus extremos y sometida a una carga puntual vertical " $P$ " que dista " $a$ " del extremo izquierdo y " $b$ " del derecho, las reacciones en éstos se reducen a las fuerzas verticales  $R_i$  y  $R_d$  y a los momentos de empotramiento  $M_i$  y  $M_d$ .

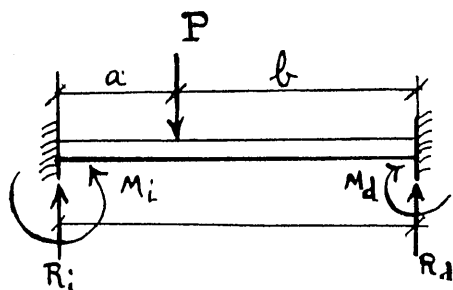


Figura 1.<sup>a</sup>

Adoptaremos como sentidos y orientaciones positivas las indicadas en la figura 1.<sup>a</sup>.

Los valores de estas cantidades sabemos valen:

$$R_i = \frac{P b^2}{l^3} (b + 3a); \quad M_i = \frac{P a b^2}{l^2}$$

$$R_d = \frac{P a^2}{l^3} (a + 3b); \quad M_d = \frac{P b a^2}{l^2}$$

Si escribimos  $b = l - a$ , las expresiones anteriores se convierten en:

$$R_i = \frac{P}{l^3} (l^3 - 3la^2 + 2a^3)$$

$$R_d = \frac{P}{l^3} (3la^2 - 2a^3)$$

$$M_i = \frac{P}{l^2} (l^2 a - 2la^2 + a^3)$$

$$M_d = \frac{P}{l^2} (la^2 - a^3)$$

## Ley de cargas cualquiera: Momentos de las cargas.

Si en lugar de una carga puntual aislada tenemos sobre la viga una distribución cualquiera de cargas continuas de densidad lineal  $p(x)$ , en general variable a lo largo de la misma, tomando como origen " $O$ " el extremo izquierdo (fig. 2.<sup>a</sup>), nos resulta, para  $R_i$ ,  $R_d$ ,  $M_i$  y  $M_d$ , la integral de los valores anteriores entre " $O$ " y " $l$ " de la diferencial  $p(x) dx$ , o sea que

$$\left. \begin{aligned} R_i &= \frac{1}{l^3} (l^3 I_0 - 3l I_2 + 2I_3) \\ R_d &= \frac{1}{l^3} (3l I_2 - 2I_3) \\ M_i &= -\frac{1}{l^2} (l^2 I_1 - 2l I_2 + I_3) \\ M_d &= \frac{1}{l^2} (l I_2 - I_3) \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

siendo

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \int_0^l p(x) dx \\ I_1 &= \int_0^l x p(x) dx \\ I_2 &= \int_0^l x^2 p(x) dx \\ I_3 &= \int_0^l x^3 p(x) dx \end{aligned} \right\}$$

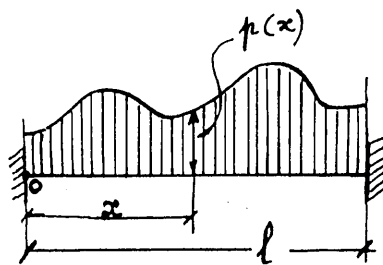


Figura 2.<sup>a</sup>

los momentos de orden cero, uno, dos y tres (1) del área representativa de la carga con respecto al extremo izquierdo. Evidentemente,  $I_0$  es suma de todas las cargas, que designaremos por  $P$  en lo sucesivo (2).

De acuerdo con el sistema [1], dados los  $I_0, I_1, I_2, I_3$ , quedan determinados los  $Ri, Rd, Mi, Md$ . Recíprocamente, dados éstos, quedan determinados  $I_0, I_1, I_2, I_3$ , siendo:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= Ri + Rd, \\ I_1 &= +l Rd + Mi - Md, \\ I_2 &= +l^2 Rd - 2l Md, \\ I_3 &= +l^3 Rd - 3l^2 Md. \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

### Distribuciones equivalentes de cargas (3).

Por tanto, si llamamos *equivalentes* a distribuciones  $p(x)$  y  $p'(x)$  de cargas sobre una viga, tales que en sus extremos produzcan las mismas reacciones  $Ri, Rd, Mi, Md$ , podemos establecer que:

"La condición necesaria y suficiente para que dos distribuciones  $p(x)$  y  $p'(x)$  de cargas sean equivalentes es que sus momentos de órdenes 0, 1, 2 y 3 con respecto a uno de los apoyos sean iguales, o sea que  $I_0 = I'_0, I_1 = I'_1, I_2 = I'_2$  e  $I_3 = I'_3$ , o sea que:

$$\int_0^l x^n p(x) dx = \int_0^l x^n p'(x) dx \text{ para } n=0, 1, 2 \text{ y } 3 \quad (4).$$

(1) La determinación de momentos de orden tercero, etc., se utiliza frecuentemente en el cálculo de carenas en construcción naval. Existen métodos gráficos análogos a los utilizados para obtener los momentos de inercia. También, utilizando procedimientos mecánicos, se logra efectuar su cálculo con rapidez, seguridad y sencillez.

(2) Por el paralelismo que existe, nos permitimos remitir al lector a que considere las relaciones que en cálculo estadístico existen entre lo que en él se llama una "distribución" y su determinación unívoca por la sucesión de sus "momentos".

(3) Como caso particular de un estudio más general de flexión de vigas en que la ecuación de la elástica viene como integral, a lo largo de la luz, del producto de la función de Green por la de cargas, llega Pei-Ping Chen, en su artículo "The equivalent loading Method..." (*Quarterly of Applied Mathematics*, 1949, pág. 186) a demostrar también, por otro camino, que: es condición necesaria y suficiente para que el sistema de cargas esté en equilibrio, que los momentos de las mismas de órdenes 0, 1, 2 y 3, sean nulos.

(4) Esta propiedad, que se deduce tan sencillamente, puede tomarse como principio para todo el cálculo de las vigas empotradas en ambos extremos. Análogamente a como en la viga isostática apoyada en sus extremos, se determinan las reacciones en ellos considerándolas como fuerzas exteriores e igualando a cero la resultante de todas ellas (suma de momentos de orden cero) y su momento resultante (suma de momentos vulgares o de orden uno), así en la viga de extremos empotrados o hiperestática, se determinan las reacciones y momentos de empotramiento, considerando a todos ellos como exteriores e igualando a cero los momentos resultantes de órdenes 0, 1, 2 y 3. Con sólo esto, o sea sin acudir a la ley de Hooke, hipótesis de Navier, ni teoremas de Mohr, se determinan las reacciones y momentos de empotramiento con suma facilidad.

### Cambio de origen de momentos.

La igualdad  $I_n = I'_n$  para  $n=0, 1, 2$  y 3 se ha deducido tomando como origen de abscisas  $x$  el extremo izquierdo de la viga. Pero puede ser con respecto a cualquier punto de la misma, ya que si el origen para las  $I_n$  fuese  $O'$ , de abscisa  $\alpha$  (fig. 3.<sup>a</sup>), y llamamos  $J_n$  los momentos respecto  $O'$  de  $p$ , o sea que

$$J_n = \int x'^n p(x') dx'.$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^l x^n p(x) dx = \int_{-\alpha}^{l-\alpha} (x' + \alpha)^n p(x') dx' = \\ &= \int x'^n p(x') dx' + \binom{n}{1} \alpha \int x'^{n-1} p(x') dx' + \\ &+ \binom{n}{2} \alpha^2 \int x'^{n-2} p(x') dx' + \dots + \alpha^n \int p(x') dx' = \\ &= J_n + \binom{n}{1} \alpha J_{n-1} + \binom{n}{2} \alpha^2 J_{n-2} + \dots + \alpha^n J_0. \end{aligned}$$

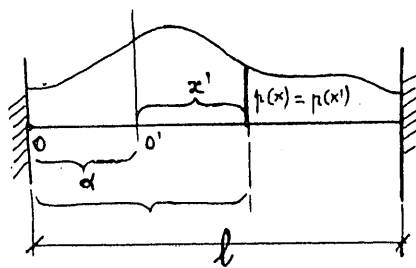


Figura 3.<sup>a</sup>

Aplicada esta fórmula para  $n=0, 1, 2$  y 3, obtenemos, respectivamente:

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= J_0 \\ I_1 &= J_1 + \alpha J_0 \\ I_2 &= J_2 + 2\alpha J_1 + \alpha^2 J_0 \\ I_3 &= J_3 + 3\alpha J_2 + 3\alpha^2 J_1 + \alpha^3 J_0 \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

### Caso de tomar como origen el centro de gravedad de las cargas.

Si fuese  $x = \alpha$  el centro de gravedad (1) o punto de aplicación de la resultante de todas las fuerzas  $p(x)$ ,  $J_1 = 0$ , y la tercera igualdad anterior nos daría:

$$I_2 = J_2 + \alpha^2 J_0,$$

que viene a ser el conocido teorema del momento de inercia con relación al del centro de gravedad.

(1) En Estadística, los momentos con respecto a la media reciben el nombre de "momentos centrales". Ver, por ejemplo, H. Cramér: *Métodos matemáticos de Estadística*, capítulo XV.

La cuarta igualdad de [3] se reduciría a:

$$I_3 = J_3 + 3 \alpha J_2 + \alpha^3 J_0,$$

que podríamos considerar como una generalización del teorema anterior para momentos de tercer orden.

### Expresión de los momentos de empotramiento.

De las expresiones [1] interesa en particular (para aplicación del método de Cross, etc.) los valores de los empotramientos perfectos  $M_i$ ,  $M_d$ , de los extremos. Si a  $i_n = I_n$  le llamamos momento reducido de orden  $n$  ( $i_n$  tiene dimensión de una fuerza) resulta:

$$\left. \begin{aligned} M_i &= l (i_1 - 2 i_2 + i_3) \\ M_d &= l (i_2 - i_3). \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

En particular, el valor de  $M_d$  ofrece un aspecto bien sencillo. En resumen, indica que:

"El momento de empotramiento de una viga en uno de sus extremos es igual al producto de la luz de la misma por la diferencia

$$i_2 - i_3 = \frac{I_2}{l^2} - \frac{I_3}{l^3}$$

de los momentos reducidos de las cargas de segundo y tercer orden con respecto al otro extremo."

### Distribución simétrica de cargas: Fórmula de aplicación práctica.

Un caso particular de gran aplicación práctica es suponer una distribución simétrica de cargas respecto al centro de la viga.

Entonces,  $\alpha = l/2$ , y por simetría,  $R_i = R_d = R$ ,  $M_i = M_d = M$

$$R = i_0 - 3 i_2 + 2 i_3 = 3 i_2 - 2 i_3.$$

$$M = l (i_1 - 2 i_2 + i_3) = l (i_2 - i_3) \quad (5)$$

(1) Los momentos de empotramiento perfecto suelen hallarse aplicando directamente fórmulas que dan los manuales. En los tratados alemanes (Löser, *Hormigón armado*; Kleinlogel, *Cálculo de estructuras porticadas hiperestáticas*, etc.) se utilizan con frecuencia los llamados "términos de carga"  $L$  y  $R$  ( $L$ , inicial de *links* = izquierda, y  $R$ , de *rechts* = derecha) o segmentos de líneas de cruce, que son proporcionales a las reacciones ficticias  $A$  y  $B$ , que en la viga apoyada produciría una ley de cargas que fuese la de los momentos flectores, siendo  $L = 6 A : l$  y  $R = 6 B : l$ .

Los valores de  $L$  y  $R$  no dependen más que de las cargas y de su distribución. Los momentos de empotramiento valen, en función de ellos,  $M = \frac{2L - R}{3}$ ;  $M_d = \frac{2R - L}{3}$ . Si las

cargas son simétricas,  $M_i = M_d = \frac{L}{3} = \frac{R}{3}$ .

(2) Recordemos que el momento de tercer orden interviene en la asimetría de una distribución en Estadística.

Una medida de dicha asimetría (véase O. Fernández Baños, *Tratado de Estadística*, capítulo XXI) utilizada corrien-

resultando:

$$R = \frac{i_0}{2}; \quad M = \frac{l}{2} (i_1 - i_2).$$

Si tomamos como origen el centro  $O'$  de la viga, de acuerdo con [3]:

$$i_1 = j_1 + \frac{1}{2} j_0;$$

$$i_2 = j_2 + j_1 + \frac{1}{4} j_0,$$

pero como

$$j_1 = 0;$$

$$M = \frac{l}{2} \left( \frac{1}{4} j_0 - j_2 \right),$$

o sea:

$$M = \frac{P l}{8} - \frac{I}{2 l} \quad [5]$$

siendo  $P$  la resultante o el total de las cargas  $P = \int_0^l p(x) dx$  e  $I$  el momento de segundo orden, o sea de inercia de las mismas con respecto al centro de la viga.

### Interpretación de la fórmula anterior.

Recordando que  $\frac{P l}{8}$  es el momento de empotramiento para una carga  $P$  centrada en la viga, resulta que:

$$\frac{I}{2 \cdot l} = \int_0^{l/2} \frac{x'^2 p(x') dx'}{2 l}$$

representa la disminución de los momentos de empotramiento por repartirse la carga sobre la viga.

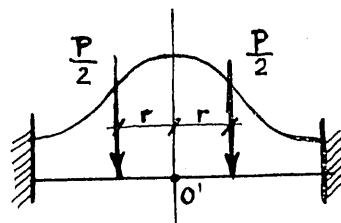


Figura 4.<sup>a</sup>

temente es, en nuestra notación,  $\sqrt{j_2 : j_2}$ . Cuando hay simetría, tomando como origen la esperanza matemática o media aritmética (en nuestro caso, centro de gravedad),  $j_3 = 0$ . Como  $j_1 = 0$ , si además hacemos  $\alpha = l/2$ , obtenemos [5].

Como  $r = \sqrt{\frac{I}{P}}$  (fig. 4.<sup>a</sup>) representa el radio de giro del área de la carga respecto un eje vertical que pasa por  $O'$ :

$$M = \frac{Pl}{8} - \frac{Pr^2}{2l} = \frac{Pl}{8} \left[ 1 - \left( \frac{2r}{l} \right)^2 \right]. \quad [6]$$

Pero, como puede comprobarse fácilmente, este es el momento de empotramiento producido por dos cargas puntuales de intensidad  $\frac{P}{2}$  cada una de ellas, situadas simétricamente respecto al centro de la viga y distantes  $2r$  entre sí. Luego podemos decir que:

"Toda distribución simétrica de cargas con relación al centro de una viga es *equivalente* (o sea, da los mismos momentos y reacciones en sus extremos) a dos cargas iguales, cuya suma es la totalidad de las cargas aplicadas simétricamente a cada lado del centro  $O'$  de la viga a distancias del mismo igual al radio de inercia obtenido del área de la ley de distribución de cargas respecto al eje vertical que pasa por  $O'$  (1)."

De acuerdo con [5] llegamos a la interesante conclusión de que el problema de hallar los momentos de empotramiento de vigas cargadas simétricamente se reduce exclusivamente a la determinación de los momentos de inercia de las cargas respecto al centro de la viga.

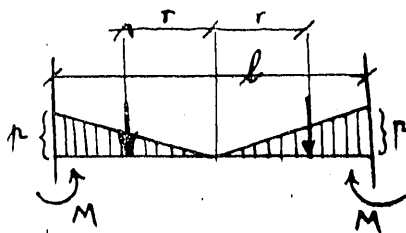


Figura 5.<sup>a</sup>

**Ejemplo primero.** — Hallar los momentos de empotramiento  $M$  de la viga de la figura 5.<sup>a</sup>, sometida a la ley de cargas indicada (variable linealmente desde  $O$ , en el centro, a " $p$ ", en los extremos).

Como

$$P = 2 \frac{1}{2} p \frac{l}{2} = \frac{pl}{2},$$

$$I = 2 \int_0^{l/2} x^2 \frac{2px}{l} dx = \frac{pl^3}{16};$$

(1) Podría también interpretarse  $r$  como la desviación típica o *standard* de una distribución de valores de la función de probabilidad  $p(x)$ .

la aplicación de [5] nos da:

$$M = \frac{pl^2}{16} - \frac{pl^2}{32} = \boxed{\frac{pl^2}{32}};$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{P}} = \frac{\sqrt{2l}}{4} = 0,353l.$$

**Ejemplo segundo.** — Hallar los momentos de empotramiento con las cargas indicadas en la figura 6.<sup>a</sup>.

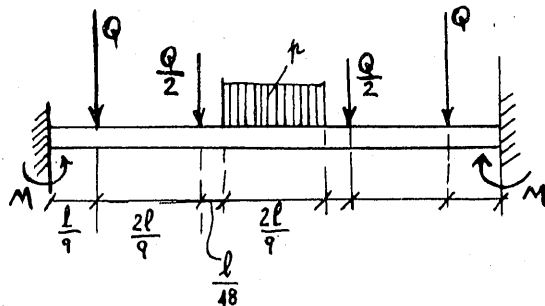


Figura 6.<sup>a</sup>

La suma de todas las cargas es:

$$P = 3Q + \frac{2l}{9}p.$$

El momento de inercia de las cargas con respecto al punto medio de la viga es:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{12} p \left( \frac{2l}{9} \right)^3 + 2 \frac{Q}{2} \left( \frac{l}{6} \right)^2 + 2Q \left( \frac{7l}{18} \right)^2 = \\ &= \frac{pl^3}{786} + \frac{107}{324} Ql^2. \end{aligned}$$

Los momentos de empotramiento de acuerdo con [5] valdrán ambos:

$$M = \frac{Pl}{8} - \frac{I}{2l} = \frac{32pl^2}{1179} + \frac{17Ql}{81}.$$

### Aplicación de momentos.

Supongamos que además de las fuerzas verticales hubiese un par de momento  $M$  en la viga. Como este par " $m$ " aplicado a la distancia " $x$ " del empo-

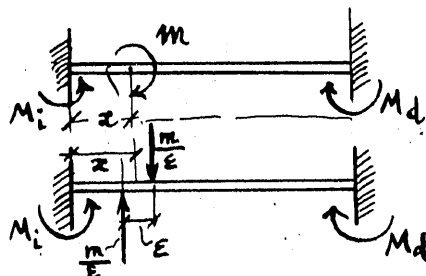


Figura 7.<sup>a</sup>

tramiento izquierdo, puede concebirse como constituido por dos fuerzas  $M/\epsilon$  de sentido contrario distantes  $\epsilon$  ( $\epsilon$  muy pequeño), los momentos  $M_i$  y  $M_d$  se obtendrán de acuerdo con [4]. En este caso:

$$i_0 = 0.$$

$$i_1 = \frac{1}{l} \left[ \frac{M}{\epsilon} \left( x + \frac{\epsilon}{2} \right) - \frac{M}{\epsilon} \left( x - \frac{\epsilon}{2} \right) \right] = \frac{M}{l}.$$

$$i_2 = \frac{1}{l^2} \left[ \frac{M}{\epsilon} \left( x + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 - \frac{M}{\epsilon} \left( x - \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \right] = \frac{2 M x}{l^2},$$

para  $\epsilon$  muy pequeño.

Del mismo modo,

$$i_3 = \frac{3 M x^2}{l^3},$$

y, en general:

$$i_n = n \left( \frac{M}{l} \right) \cdot \frac{x^{n-1}}{l^{n-1}}. \quad [7]$$

O sea que el momento reducido de orden  $n$  de un par  $M$  vale  $n$  veces el momento reducido de orden  $n-1$  de la fuerza ficticia  $\frac{M}{l}$ .

Por tanto, las mismas expresiones [4] nos dan:

$$M_i = l \left[ \frac{M}{l} - \frac{4 M x}{l^2} + \frac{3 M x^2}{l^3} \right].$$

$$M_d = l \left[ \frac{2 M x}{l^2} - \frac{3 M x^2}{l^3} \right].$$

*Ejemplo tercero.* — Hallar el momento de empotramiento en el extremo derecho de una viga de 7 m.

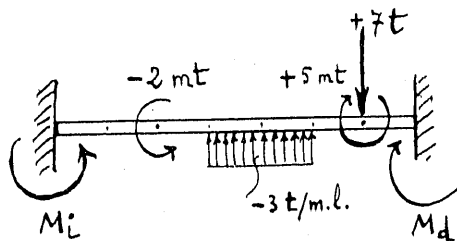


Figura 8.<sup>a</sup>

de luz sometida a las cargas y a los pares indicados en la figura 8.<sup>a</sup>.

De acuerdo con la última de las fórmulas [4] y de lo indicado en la [7] para los momentos flectores:

$$M d = l (i_2 - i_3).$$

Del valor de  $i_2$ , la parte debida a las cargas verticales es:

$$\frac{1}{7^2} \left[ 7 \varphi \cdot 6^2 - \left( \frac{1}{12} 3 \varphi \cdot 2^3 + 3 \varphi \cdot 2 \varphi \cdot 4^2 \right) \right] = \frac{44}{49} t.$$

La debida a los momentos flectores:

$$2 \left( \frac{-2}{7} \right) \cdot \frac{2}{7} + 2 \left( \frac{5}{7} \right) \frac{6}{7} = \frac{52}{49} t.$$

Luego

$$i_2 = \frac{44}{49} + \frac{52}{49} = \frac{96}{49} t.$$

Análogamente, de  $i_3$ , la parte de las cargas verticales es:

$$\frac{1}{7^3} \left[ 7 \varphi \cdot 6^3 - 3 \int_2^5 x^3 dx \right] = \frac{1}{343} (1512 - 408) = \frac{1104}{343} t.$$

Y la de los momentos:

$$3 \left( \frac{-3}{7} \right) \frac{2^2}{7^2} + 3 \left( \frac{5}{7} \right) \frac{6^2}{7^2} = \frac{504}{343} t.$$

Luego

$$i_3 = \frac{1104 + 504}{343} = \frac{1608}{343} t.$$

Resultando

$$M d = 7 (i_2 - i_3) = 7 \left( \frac{96}{49} - \frac{1608}{343} \right) = - \frac{936}{49} mt.$$

### Conclusiones.

Hemos visto que la aplicación de los momentos de orden superior de la ley de distribución de cargas (continuas o puntuales) nos simplifica la expresión de los momentos de empotramiento perfecto de una viga de sección uniforme.

La segunda de las fórmulas [4], de fácil recordación, nos permite de manera inmediata, sin auxiliarnos de formulario alguno, determinar analítica o gráficamente dichos momentos de empotramiento.

En el caso de cargas simétricas con relación al cen-

tro de la viga, las fórmula [5] nos da automáticamente (con la sencillez que supone tener sólo que hallar el momento de segundo orden de dichas cargas con respecto al centro) los empotramientos en los extremos; operación que con frecuencia hay que efectuar para aplicar el método de Cross, etc.

Dadas las relaciones tan sencillas que ligan los momentos de empotramiento con los llamados "términos de carga" en la literatura germana (éstos valen el triple que aquellos en las distribuciones de cargas si-

métricas), es evidente que la determinación de éstos (a lo que dedica Kleinlogel el cuarto tomo completo de su conocida obra, antes citada) es rápida y sencilla en cualquier caso, con auxilio de las expresiones [4] ó [5], que, con lo indicado en [7], se generaliza para cuando sobre la viga actúan pares de momentos dados distribuidos a lo largo de ella.

Lo mismo que la viga isostática se estudia sin más que anular la suma geométrica de *todas las fuerzas* (las reacciones como exteriores), o sea, su momento (de orden cero, y el momento (de primer orden) resultante con respecto a cualquier punto, la viga hiperestática o empotrada puede estudiarse sin más que anular los momentos de orden 0, 1, 2 y 3 de *todas las fuerzas y momentos* que sobre ella actúan, considerando las reacciones en los apoyos como fuerzas exteriores y los momentos de empotramiento como fuerzas ficticias aplicadas en el sentido indicado en [7]. De esta forma, *sin acudir a ninguna hipótesis de deformación*, quedan determinados los momentos de empotramiento. Por ejemplo, si a una viga de luz  $l$  con sobrecarga uniforme  $p$  en toda su longitud deseamos hallar las secciones  $R$  y momentos de empotramiento  $M$  (iguales, por simetría, en ambos extremos)

la anulación de los momentos, con respecto a su centro, de orden 0 y 1, conduce a las ecuaciones:

$$\begin{cases} p l - 2 R = 0 \\ \frac{1}{12} p l^3 + 2 \cdot 2 \left( \frac{M}{l} \right) \frac{l}{2} - 2 R \left( \frac{l}{2} \right)^2 = 0. \end{cases}$$

Las de los de orden 1 y 3 son identidades. De aquéllas deducimos los conocidos valores de:

$$R = p l : 2 \quad \text{y} \quad M = p l^2 : 12.$$

Otras aplicaciones de mayor importancia y extensión tenemos en estudio. En realidad, lo indicado tiene más bien un aspecto *formal*, sin que suponga novedad. Si acaso sólo lo haya en las formas tan sencillas que resultan. Pienso que ya que con tan harta insistencia se acostumbra a desarrollar una distribución de cargas en series de Fourier o de otro tipo (tanto con una como con dos variables), ¿por qué no se ha de desarrollar también en función de sus momentos? Es cosa que corrientemente se hace en cálculo estadístico. ¿No parece lógico hacerlo también en el cálculo de vigas, placas, etc., donde los momentos tienen una significación tan real? Es algo de lo que he intentado.