ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN; RELACIONES FUNCIONALES ENTRE SUS SOLUCIONES

Por FEDERICO GODED

Ingeniero de Caminos.

El presente trabajo, que se divide en dos o tres artículos, describe un método original, cuya finalidad define el autor en los primeros párrafos, y que habrá de ser de gran interés para los lectores versados en estudios matemáticos.

1. El método que a continuación presentamos puede utilizarse con dos fines: o bien para obtener relaciones funcionales entre soluciones de la misma o distintas ecuaciones diferenciales, o bien para hallar integrales particulares, así como la integral general de nuevas ecuaciones partiendo de soluciones previamente conocidas de otra ecuación.

Aunque aquí nos vamos a restringir al campo de las ecuaciones de segundo orden, en el cual el presente método es particularmente sencillo, el método puede también utilizarse en ecuaciones de orden más elevado.

Supongamos que entre las tres funciones analíticas ψ, φ y f existe la relación:

$$\psi(z) = f\left\{\varphi(z)\right\}. \qquad [1]$$

La función $\psi(z)$ hemos de suponer ahora que es solución de la ecuación lineal:

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + I_1(z)\,\psi(z) = 0, \qquad [2]$$

en la que el coeficiente $I_1(z)$ es, como es sabido (1), un invariante de los coeficientes de la ecuación cuando ésta está escrita en su forma normal completa, es decir, con término en $\dfrac{d\psi(z)}{dz}$.

Entre las ecuaciones [1] y [2] podremos ahora eliminar la función $\psi(z)$. Para ello, derivamos [1] dos veces consecutivas:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(z)}{dz} &= \frac{df(\varphi)}{d\varphi}\cdot\varphi'(z); \\ \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} &= \frac{d^2f(\varphi)}{d\varphi^2}\left\{\varphi'(z)\right\}^2 + \frac{df}{d\varphi}\cdot\varphi''(z). \end{aligned} \qquad [3]$$

(1) "A Treatise on Differential Equations", de A. R. Forsyth, pág. 105.

De [3], [2] y [1], eliminando ψ, se deduce:

$$\frac{d^2f(\varphi)}{d\varphi^2}\cdot\left\{\varphi'(z)\right\}^2 + \frac{df(\varphi)}{d\varphi}\cdot\varphi''(z) + I_1(z)\,f(\varphi) = 0. \qquad [4]$$

Para transformar convenientemente esta ecuación llamamos:

$$z = \varphi_1(t), \qquad [5]$$

a la función inversa de:

$$t = \varphi(z). \qquad [6]$$

La ecuación [4] tiene como variable independiente z, y si cambiamos ahora ésta por la t, haciendo uso de [5], se obtiene:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2f(t)}{dt^2} - \frac{\varphi''_1(t)}{\varphi'_1(t)} \times \frac{df(t)}{dt} + \\ &+ I_1\left\{\varphi_1(t)\right\}\left\{\varphi'(t)\right\}^2 f(t) = 0. \end{aligned} \qquad [7]$$

Para transformar ahora esta ecuación en otra de la misma forma [2], es preciso sustituir la función $f(t)$ por la $F(t)$ siguiente (2):

$$\begin{aligned} f(t) &= F(t)\,\exp.\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t -\frac{\varphi''_1(\zeta)}{\varphi'_1(\zeta)}\,d\zeta\right\} = \\ &= \sqrt{\varphi'_1(t)}\,.\,F(t). \end{aligned} \qquad [8]$$

Así, pues, reemplazando la expresión anterior de $f(t)$ en [7], tendremos la ecuación que llamaremos asociada de la [2]:

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2} + \frac{+2\varphi'_1(t)\,\varphi'''_1(t) - 3\left\{\varphi''_1(t)\right\}^2 + 4\left\{\varphi'_1(t)\right\}^4 I_1\left\{\varphi_1(t)\right\}}{4\left\{\varphi'_1(t)\right\}^2}\,F(t) = 0, \qquad [9]$$

(2) "A Course of Modern Analysis", de E. T. Whittaker y G. N. Watson, pág. 188.

o bien:

$$\frac{d^2 F(t)}{d t^2} + I_2(t) F(t) = 0, \qquad [10]$$

llamando:

$$I_2(t) = \frac{2\varphi'_1(t)\varphi'''_1(t) - 3\{\varphi''_1(t)\}^2 + 4\{\varphi'_1(t)\}^4 I_1\{\varphi_1(t)\}}{4\{\varphi'_1(t)\}^2} \qquad [11]$$

Por el proceso descrito se ha establecido entre las funciones ψ y F, la siguiente relación:

$$\psi\{\varphi_1(t)\} = \sqrt{\varphi'_1(t)} \cdot F(t), \qquad [12]$$

como se deduce reemplazando primero z por $\varphi_1(t)$ en [1] y sustituyendo luego $f(t)$ por su expresión [8].

Señalemos antes de continuar que la relación [12] es equivalente a la:

$$\psi(z)\sqrt{\varphi'(z)} = F\{\varphi(z)\}, \qquad [13]$$

ya que esta última se deduce de la [12], cambiando la variable t por la z.

Del proceso anterior se deduce que siempre que $\psi(z)$ satisfaga a la cuación [2], la función:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'_1(t)}}\psi\{\varphi_1(t)\} \qquad [14]$$

ha de satisfacer, a su vez, a la écuación asociada [10]. O dicho de otra forma, a cada solución de la ecuación [2], al través de la relación funcional anterior [14] corresponderá una solución de la ecuación asociada [10].

Así, pues, si conocemos la integral general de [2], podremos deducir de esta forma la integral general de la ecuación asociada [10], y ello cualquiera que sea φ_1. Es decir, podremos construir para cada función φ_1 una nueva ecuación diferencial [10], de la cual podremos obtener diversas soluciones particulares por medio de la relación [14].

Pero puede suceder que la ecuación asociada [10] así obtenida pertenezca a su vez a un tipo conocido, o incluso que coincida con la [2], es decir, que sea $I_1(t) = I_2(t)$.

Este último caso lo hemos estudiado detenidamente y se va a publicar en otro lugar, por lo que aquí no nos detendremos en él. Señalaremos únicamente que las funciones de Ferrer o asociadas de Legendre, $P_n^m(z)$ y $Q_n^m(z)$, de tan gran importancia en numerosas aplicaciones físicas y en especial en la teoría del transporte de neutrones, hemos encontrado que pertenecen a este grupo de funciones siempre que $1 + 2n = \pm m$, y que $\varphi_1(t)$ sea una cualquiera de las dos transformaciones homográficas siguientes:

$$\varphi_1(t) = \frac{t \pm 3}{t \mp 1}. \qquad [15]$$

Cuando $I_2(t)$ es distinto de $I_1(t)$, pero la ecuación asociada [10] pertenece a un tipo conocido, podremos obtener directamente integrales particulares de la misma y su integral general, y además, utilizando la relación [14], podremos también obtener otras integrales particulares y formar también su integral general.

Ahora bien, la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden nos dice que en el mismo dominio de existencia no puede haber más que dos soluciones independientes, y que, por tanto, toda otra función que satisfaga a la ecuación y sea válida en el mismo dominio de existencia de las dos anteriores ha de ser una combinación lineal con coeficientes constantes de las dos referidas soluciones.

Por consiguiente, tres cualquiera de las integrales particulares obtenidas por uno u otro método, y siempre que sean válidas en el mismo dominio de existencia, han de estar ligadas por una relación lineal de coeficientes constantes. Este hecho permite obtener por el presente método algunas interesantes relaciones funcionales, como veremos posteriormente.

2. Como primera aplicación práctica del método, tomemos:

$$\left.\begin{aligned} I_1(t) &= \lambda t^p \\ \varphi_1(t) &= \frac{At+B}{Ct+D}. \end{aligned}\right\} \qquad [16]$$

Como la expresión anterior de $\varphi_1(t)$ es solución de:

$$2\varphi'_1(t)\varphi'''_1(t) - 3\{\varphi''_1(t)\}^2 = 0, \qquad [17]$$

resulta al reemplazarla en [9]:

$$\frac{d^2 F(t)}{d t^2} + \{\varphi'_1(t)\}^2 I_1\{\varphi_1(t)\} = 0, \qquad [18]$$

y reemplazando aquí la expresión [16] de $I_1(t)$ resulta:

$$\frac{d^2 F(t)}{d t^2} + \lambda(AD - BC)^2 \frac{(At+B)^p}{(Ct+D)^{p+4}} = 0 \qquad [19]$$

En este caso, la ecuación [2] es:

$$\frac{d^2 \psi}{d z^2} + \lambda z^P \psi = 0, \qquad [20]$$

cuya integral general (3), siempre que el inverso de $P + 2$ no sea entero, es:

$$\psi(z) = \sqrt{z} \left\{ C_1 J_{\frac{1}{2+P}} \left\{ \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{P+2}{2}} \right\} + C_2 J_{\frac{-1}{P+2}} \left\{ \left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\frac{P+2}{2}} \right\} \right\} \qquad [21]$$

Por consiguiente, la solución de la ecuación [20] según [14], será:

$$F(t) = \frac{C t + D}{\sqrt{A D - B C}} \psi \left\{ \frac{A t + B}{C t + D} \right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{(A t + B)(C t + D)}{A D - B C}} \left\{ C_1 J_{\frac{1}{2+P}} \left\{ \left(\frac{A t + B}{\lambda (C t + D)} \right)^{\frac{P+2}{2}} \right\} + \right. \qquad [22]$$

$$\left. + C_2 J_{\frac{-1}{2+P}} \left\{ \left(\frac{A t + B}{\lambda (C t + D)} \right)^{\frac{P+2}{2}} \right\} \right\}$$

Hemos, pues, podido obtener la integral general de [10] porque conocíamos la solución de [2]. Utilizado de esta forma el método, permite, pues, deducir soluciones particulares de una ecuación, utilizando soluciones de otra ecuación conocida.

3. Tomemos ahora:

$$\left. \begin{aligned} z &= \varphi_1(t) = \log_e \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} = \arg\operatorname{th} t \\ t &= \varphi(z) = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}. \end{aligned} \right\} \qquad [23]$$

Reemplazando la anterior expresión de φ_1 en [11], resulta:

$$I_2(t) = \frac{I_1(\arg\operatorname{th} t) + 1}{(1 - t^2)^2}. \qquad [24]$$

Supongamos ahora $I_1 = -C^2$, siendo C constante. Entonces será:

$$I_2(t) = \frac{1 - C^2}{(1 - t^2)^2}. \qquad [25]$$

Pero la ecuación [2] cuando $I_1 = -C^2$ es:

$$\frac{d^2 \psi}{d z^2} - C^2 \psi = 0, \qquad [26]$$

cuya integral general es:

$$\psi = A e^{-cz} + B e^{cz}. \qquad [27]$$

(3) Referencia (1), pág. 196.

Utilizando ahora la [14], podremos escribir directamente la integral general de la [25]. Tendremos así:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\varphi'_1(t)}} \psi\{\varphi_1(t)\} = \sqrt{1 - t^2} \left(A \exp\left\{ -C \log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right\} + \right.$$

$$\left. + B \exp\left\{ C \log \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \right\} \right) = A (1 - t)^{\frac{c+1}{2}} (1 + t)^{\frac{1-c}{2}} +$$

$$+ B (1 - t)^{\frac{1-c}{2}} (1 + t)^{\frac{1+c}{2}}. \qquad [28]$$

Pero en el caso presente, la ecuación asociada obtenida pertenece a un tipo conocido. En efecto. La ecuación asociada de Legendre (4) es:

$$(1 - x^2) u'' - 2 x u' + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right\} u = 0. \qquad [29]$$

la cual escribiendo:

$$u = y \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{-2\zeta}{1 - \zeta^2} d\zeta \right\} = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}, \qquad [30]$$

se transforma en:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{n^2 + n + 1 - m^2 - n(n+1) x^2}{(1 - x^2)^2} y = 0. \qquad [31]$$

La ecuación asociada [25] coincidirá, pues, con la asociada de Legendre, siempre que:

$$\left. \begin{aligned} n^2 + n + 1 - m^2 &= 1 - C^2 \\ n(n+1) &= 0, \end{aligned} \right\} \qquad [32]$$

es decir, para los siguientes valores de los parámetros:

$$\left. \begin{matrix} n = 0 & \qquad n = -1 \\ m = \pm C & \qquad m = \pm C \end{matrix} \right\} \qquad [33]$$

Ahora bien, la integral general de la ecuación asociada de Legendre, escrita en la forma [31], sabemos tiene las soluciones:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (1 - x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{d x^m} \\ y_2 &= (1 - x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d^m Q_n(x)}{d x^m} \end{aligned} \right\} \qquad [34]$$

Por consiguiente, de la ecuación asociada de Legendre, escrita en la forma [31], cuando $n = 0$ y como (5):

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= 1 \\ Q_0 &= \frac{1}{2} \log \frac{x+1}{x-1} \end{aligned} \right\} \qquad [35]$$

(4) Referencia (2), pág. 317.

(5) "Tables of functions", por E. Jahnke y F. Emde, páginas 108 y 110.

conocemos también para $m \neq 0$ la solución:

$$y_2 = \frac{(1-x^2)^{\frac{m+1}{2}}}{2} \frac{d^m}{d x^m} \log \frac{x+1}{x-1} = \qquad [36]$$

$$= (1-x^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d^{m-1}}{d x^{m-1}} (1-x^2)^{-1} .$$

Hemos obtenido, pues, tres soluciones distintas [28] y [36] de la ecuación [31], las cuales, como es evidente, tienen un común dominio de existencia y, por consiguiente, como dijimos anteriormente, deben estar ligadas por una relación lineal. Podremos, pues, escribir:

$$(1-t^2)^{\frac{m+1}{2}} \frac{d^{m-1}}{d t^{m-1}} (1-t^2)^{-1} = \qquad [37]$$

$$= A_m (1-t)^{\frac{m+1}{2}} (1+t)^{\frac{1-m}{2}} + B_m (1-t)^{\frac{1-m}{2}} (1+t)^{\frac{1+m}{2}}$$

siendo aquí A_m y B_m constantes. Esta relación puede también escribirse así:

$$\frac{d^{m-1}}{d t^{m-1}} (1-t^2)^{-1} = \frac{A_m}{(1+t)^m} + \frac{B_m}{(1-t)^m}, \qquad [38]$$

pudiéndose determinar derivando los valores de los coeficientes A_m y B_m. Así se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} A_m &= \frac{(m-1)!}{2} (-)^m \\ B_m &= \frac{(m-1)!}{2} (-)^{m-1} \end{aligned}\right\} . \qquad [39]$$

Por el presente método, en este caso hemos podido, pues, obtener directamente la integral general de la ecuación asociada de Legendre, lo que no hubiéramos podido lograr por la teoría clásica, ya que las P_0^m son todas nulas al ser $P_0 = 1$.

(Continuará.)