

# CALCULO DE ESTRUCTURAS RETICULARES

Por JOSE LUIS BLANCO VILLORIA

Ingeniero de Caminos.

*El presente artículo original trata de un método iterativo, seguro, sistemático y rápido, para el cálculo de estructuras reticulares. Se llega a la solución, aunque se trate de un caso traslacional, fácil y rápidamente, con un sólo proceso iterativo, pues va considerando conjuntamente deformaciones angulares y traslaciones. En primer lugar, se expone la "Síntesis del método", a continuación la "Práctica" del mismo, después su "Demostración" y, finalmente, se dan normas para conseguir un "Aumento de la convergencia", quedando ésta muy superior a la de los métodos de Cross, Kani, Kani Müller, Grinter, Zaytzeff, Cocchi, etc.*

## I

### Síntesis del método.

Vamos a aplicarlo al caso más corriente: al de una estructura tipo edificio, como la que indica la fig. 1.<sup>a</sup>

La expresión en la que se apoya la iteración es:

$$a_m = -Q_m - \sum_{(m)} \tau_{mn}^* a_n + \lambda_{ma}^* v_s + \lambda_{mb}^* v_1, \quad [1]$$

en donde  $(m)$  significa que la letra  $m$  queda fija;  $a$  es el nudo que está inmediatamente encima del  $m$ ;  $b$  es

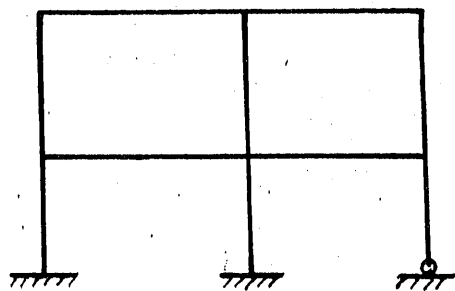


Figura 1.<sup>a</sup>

el inmediato inferior;  $S$  significa piso superior, e  $I$ , piso inferior, con relación al nudo  $m$ ; por  $n$  se quiere expresar los nudos adyacentes al  $m$  (el  $a$  y el  $b$  quedan incluidos).

Por  $\alpha$  se expresan las deformaciones angulares. Los valores  $v$  los llamaremos índices de desplazamiento, ya que los desplazamientos o traslaciones de los pisos de la estructura están íntimamente relacionados con ellos.

$$-Q_m = \frac{-\hat{M}_m + M + \eta_{ma} + \eta_{mb}}{U_m}$$

en donde  $\hat{M}_m$  es el momento de sujeción del nudo, que vale  $\hat{M}_m = \sum_{(m)} \hat{M}_{mn}$ , siendo  $\hat{M}_{mn}$  el momento de empotramiento perfecto del extremo  $m$  de la barra  $mn$  (empotramiento sobre la barra).  $M$  es el momento exterior (si existe) aplicado al nudo.

$$\eta_{ma} = H_s h_s \lambda_{ma}; \quad \eta_{mb} = H_1 h_1 \lambda_{mb},$$

en donde, a su vez,  $H_j$  es la suma de las fuerzas horizontales que actúan por encima del piso  $j$ , incluída la que actúa sobre el dintel superior del mismo, es decir, debemos previamente descomponer la carga horizontal en fuerzas, según los dinteles.  $h_j$  es la altura del piso  $j$ .

$U_m = \sum_{(m)} k_{mn}$  es la suma de las rigideces al giro de los extremos  $m$  de las barras  $mn$ , supuestas articuladas en  $m$  y empotradas en  $n$  (o de valores proporcionales a las mismas) (1).

$$(1) \quad k_{mn} = E_0 I_0 l \frac{|x_m r|}{[x_m r] (x_n r) - [x_n r] (x_m r)},$$

siendo  $x_m, x_n$  las abscisas de un punto genérico de la directriz de la barra, tomadas en valor absoluto y referidas, respectivamente, a los extremos  $m$  y  $n$  como orígenes  $r = \frac{I_0}{I} \frac{E_0}{E}$ , siendo  $I_0$  y  $E_0$  un momento de inercia y un coeficiente de elasticidad patrones y que pueden tomarse arbitrariamente.

Se emplea la siguiente notación:

$(y)$ , área del diagrama  $y = f(x)$ .

$[y]$ , momento de primer orden respecto a la ordenada origen izquierda (el extremo izquierdo es  $m$ , el derecho  $n$ ) del área del diagrama  $y = f(x)$ .

$\{y\}$ , momento respecto a la ordenada origen derecha (extremo  $n$ ) del área de  $y = f(x)$ .

Para  $E = \text{constante}$ ,  $I = \text{constante}$ , nos queda

$$k_{mn} = \frac{4EI}{l} = k_{nm}.$$

A este valor  $-\Omega_m$  le llamaremos término de carga y es previo y fijo durante el proceso iterativo. Los tres siguientes son los términos de influencia por deformaciones: el primero de ellos, por deformación angular; los segundos, por desplazamientos.

$$\tau_{mn}^* = \frac{\tau_{mn}}{U_m},$$

siendo  $\tau_{mn} = t_{nm} k_{nm}$  (obsérvese la alteración intencionada en el orden de los subíndices):  $t_{nm}$  es el factor de transmisión (1).

$$\lambda_{ma}^* = \frac{\lambda_{ma}}{U_m}; \quad \lambda_{mb}^* = \frac{\lambda_{mb}}{U_m},$$

siendo:

$$\lambda_{ma} = \frac{r_{ma}}{\sum_s (r_s + r_i)}; \quad \lambda_{mb} = \frac{r_{mb}}{\sum_i (r_s + r_i)},$$

en donde  $r_{ma} = k_{ma} (1 + t_{ma})$ ;  $s$  significa extremo superior, e  $i$ , inferior, de los pilares del piso considerado.

Los índices de desplazamiento valen:

$$\nu_s = \sum_s (r_s \alpha_s + r_i \alpha_i); \quad \nu_i = \sum_i (r_s \alpha_s + r_i \alpha_i). \quad [2]$$

Al final calcularemos los momentos mediante las expresiones:

$$M_{mn} = \hat{M}_{mn} + k_{mn} \alpha_m + t_{nm} k_{nm} \alpha_n;$$

$$M_{mn} = \hat{M}_{mn} - \eta_{mn} + k_{mn} \alpha_m + t_{nm} k_{nm} \alpha_n - \lambda_{mn} \nu,$$

si  $mn$  es un dintel,

si  $mn$  es un pilar.

[3]

y los desplazamientos mediante:

$$\Delta = (Hh + \nu) h \lambda_0 \quad [4]$$

$$(1) \quad t_{mn} = \frac{[x_n r]}{[x_m r]}; \quad t_{nm} = \frac{(x_m r)}{(x_n r)},$$

(aquí, extremo izquierdo es sinónimo de  $m$ , y extremo derecho, de  $n$ ).

$t_{mn}$  mide la relación entre el momento de reacción que se produce en el extremo derecho  $n$ , considerado empotrado, y el aplicado en el extremo  $m$ , considerado articulado.

Para  $E = \text{constante}$ ,  $I = \text{constante}$ ,  $t = \frac{1}{2}$ .

siendo:

$$\lambda_0 = \frac{1}{\sum (r_s + r_i)}.$$

Si se tomaron valores  $k'_{mn} k_{mn}$  (proporcionales), los verdaderos ángulos y desplazamientos se obtienen multiplicando los obtenidos por el valor común a las relaciones

$$\frac{k'}{k}.$$

Se han adoptado los signos siguientes: un par es positivo si produce un giro positivo, y giro positivo es el dextrosum o en el sentido de las agujas del reloj. Las fuerzas horizontales son positivas si van de izquierda a derecha, y son positivos los desplazamientos hacia la derecha.

Vemos que se ha desarrollado el método para el caso general de barras no homogéneas y con momentos de inercia variables a lo largo de la directriz. Para el caso particular  $E = \text{constante}$  e  $I = \text{constante}$ , tendremos:

$$\alpha_m = -\Omega_m - \frac{1}{2} \sum_{(m)} k_{mn}^* \alpha_n + \frac{1}{2} \lambda_{ma}^* \nu_s + \frac{1}{2} \lambda_{mb}^* \nu_i; \quad [1']$$

por índices de desplazamiento tomaremos:

$$\nu_s = \sum_s k (\alpha_s + \alpha_i) \quad \nu_i = \sum_i k (\alpha_s + \alpha_i) \quad [2']$$

en donde:

$$-\Omega_m = \frac{-\hat{M}_m + M + \eta_{ma} + \eta_{mb}}{U_m},$$

$$\eta_{ma} = \frac{H_s h_s}{3} \lambda_{ma} \quad \eta_{mb} = \frac{H_i h_i}{3} \lambda_{mb},$$

$$k_{mn}^* = \frac{k_{mn}}{U_m},$$

$$\lambda_{ma}^* = \frac{\lambda_{ma}}{U_m} \quad \lambda_{mb}^* = \frac{\lambda_{mb}}{U_m},$$

siendo:

$$k \sim \frac{4EI}{l},$$

$$\lambda = \frac{3}{2} \frac{k}{\sum_j k},$$

(la  $\Sigma$  está extendida a todos los pilares del piso  $J$ ) (1).

Por último, los valores de los momentos hiperestáticos están dados por:

$$M_{mn} = \hat{M}_{mn} + k \left( \alpha_m + \frac{1}{2} \alpha_n \right),$$

$$M_{mn} = \hat{M}_{mn} - \eta_{mn} + k \left( \alpha_n + \frac{1}{2} \alpha_m - \frac{1}{2} \beta \right),$$

si  $m n$  es un dintel.

si  $m n$  es un pilar.

siendo:

$$\beta = \sum_j \mu_j,$$

y a su vez:

$$\eta_0 = \frac{\sum_j k}{\sum_j k},$$

y los desplazamientos por:

$$\left( \frac{2}{3} \eta_0 + \frac{1}{3} \sum_j \mu_j \right) h,$$

siendo:

$$\eta_0 = \frac{H h}{3} \sum_j \mu_j,$$

o tal vez mejor, por:

$$\left( 2H \frac{h}{3} + \mu \right) \frac{h}{3} \sum_j \mu_j.$$

## II

### Práctica del método.

Empecemos considerando el caso  $E = \text{constante}$ ,  $I = \text{constante}$ .

Se prepara el diagrama de la estructura con las constantes elásticas siguientes:

$k$  (una por cada pilar).

$\frac{1}{2} k^*$  (una por cada extremo de barra).

$\frac{1}{2} x^*$  (una por cada extremo de pilar).

(1) Puede comprobarse que para  $E = \text{constante}$  e  $I = \text{constante}$ :

$$k_{mn} = k_{nm}; \quad t_{mn} = t_{nm} = \frac{1}{2};$$

$$r_{ma} = r_{am} = \frac{3}{2} k;$$

$$r_{\lambda} = \frac{1}{3} x;$$

$$\lambda_0 = \frac{2}{9} x_0;$$

$$v = \frac{3}{2} \mu.$$

Se calculan los valores  $-\Omega$  y se anotan junto a cada nudo (se subrayan para resaltar su empleo constante); éstas son las primeras aproximaciones de las deformaciones angulares.

Se calculan los índices de desplazamiento con las anteriores primeras aproximaciones de las deformaciones angulares:

$$\mu_j = \sum_i k (\alpha_s + \alpha_t),$$

lo cual se hace fácilmente y de *una sola vez* con una máquina multiplicadora, y se anotan al lado del edificio y a la altura del piso  $J$ .

Después y de *una sola vez*, con la máquina se calcula la expresión [1'], con lo que obtenemos un segundo valor, más aproximado, de  $\alpha_m$ .

Obsérvese que la expresión [1'] es acumulativa, es decir, que siempre el último valor hallado de  $\alpha_m$  es el que tomaremos como valor aproximado; en cambio en los métodos de Cross y Kammüller se necesitan hacer las sumas algebraicas de las columnas. Asimismo, la expresión coadyuvante [2'] es también acumulativa; sin embargo, para mayor rapidez de la iteración nos conviene no tomarla bajo esta forma acumulativa, porque si no, nos cuesta repetir cada vez la suma completa, sólo por haber variado una  $\alpha$ : iremos, pues, acumulando paso a paso los incrementos de  $\mu_j$  mediante la expresión:

$$\Delta \mu_j = k (\alpha_m - \alpha_{m \text{ anterior}}). \quad [2' \text{ bis}]$$

Así, pues, después de haber hallado un  $\alpha_m$ , sin borrarle del totalizador de la máquina, le restamos al  $\alpha_m$  anterior, "subimos" (transportamos con la palanca de cubitaciones) la diferencia y la multiplicamos por  $k$ , con lo que obtenemos  $\Delta \mu_j$ , que sumaremos al  $\mu_j$ .

Observemos que, por ser [1'] acumulativa, absorbe o elimina automáticamente los "errores" que pudieran cometerse durante el proceso iterativo, como le ocurre al método de Kani; no así al de Cross y Kammüller, en donde todo error repercute en la solución. Al emplear la expresión [2' bis], que ya no es acumulativa, en lugar de la [2'], que lo era, puede dar lugar a pequeños errores, pero no nos importa, pues de cuando en cuando aplicaremos la expresión [2'], con lo que quedan las traslaciones totalmente corregidas.

Decimos que una máquina multiplicadora de tipo corriente calcula de *una sola vez* las expresiones; en efecto, son operaciones del tipo

$$\pm a \cdot b \pm c \cdot d \pm \dots$$

y, según sean los signos, habrá que girar la manivela en un sentido o en el otro (números blancos o números rojos en el contador de vueltas).

En los extremos articulados hay que hallar también los momentos de empotramiento perfecto para

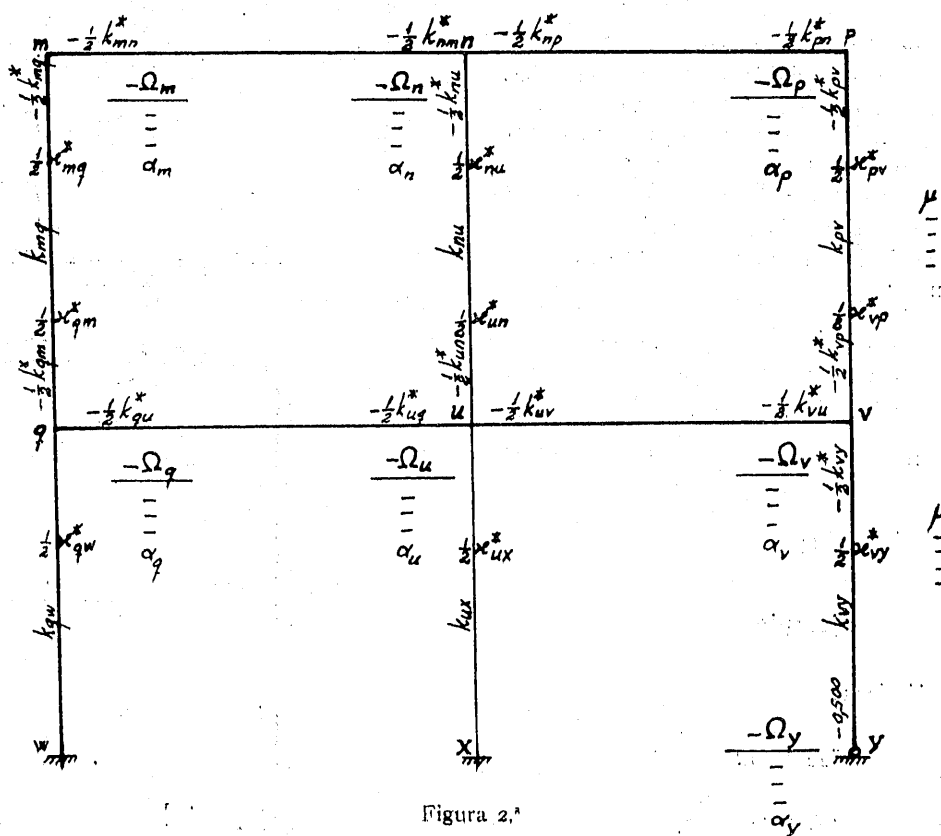


Figura 2.<sup>a</sup>

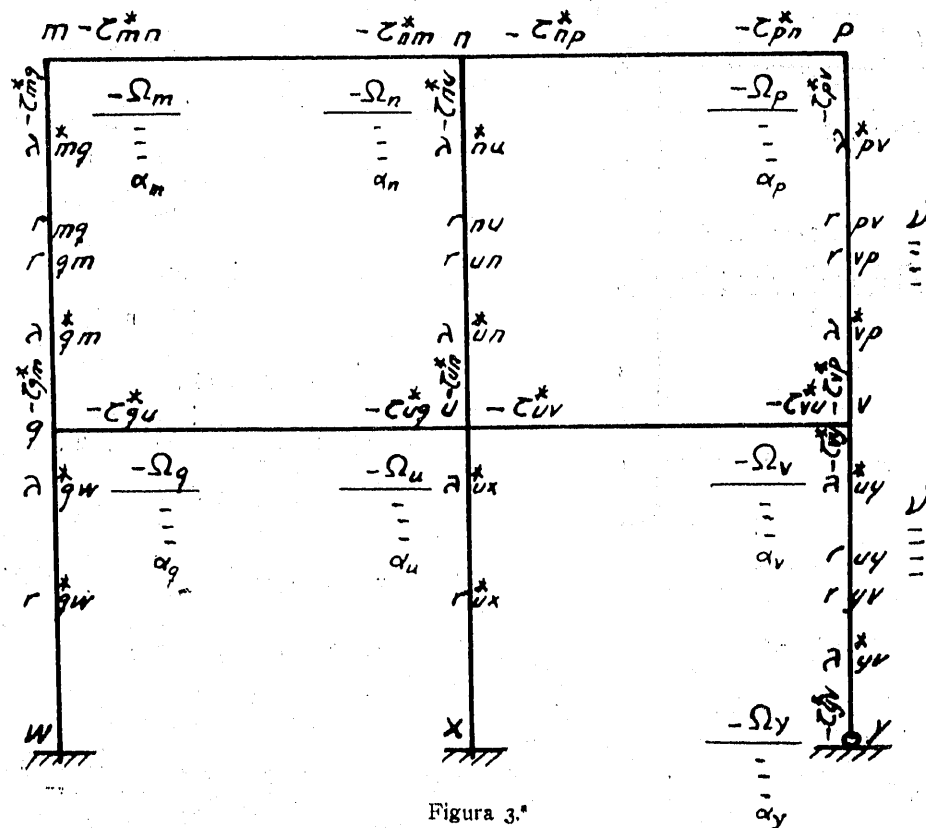


Figura 3.<sup>a</sup>

calcular el correspondiente  $\Omega$ . En los extremos empotrados perfectamente (rígidamente) también hay que poner los momentos de empotramiento, pero sólo para calcular al final el correspondiente momento hiperestático; pero durante la iteración no tenemos por qué preocuparnos en absoluto de estos extremos.

En el caso de  $E = \text{variable}$ ,  $I = \text{variable}$ , se prepara el diagrama de la estructura con las constantes elásticas siguientes:

- $r$  (una por cada extremo de pilar).
- $\tau^*$  (una por cada extremo de barra).
- $\lambda^*$  (una por cada extremo de pilar).

El resto es enteramente análogo al caso anterior.

### III

#### Ejemplo.

Constantes elásticas:

$$\begin{aligned} x_{ou} &= \frac{3}{16} & x_{ac} &= x_{bd} = \frac{3}{4} \\ x_{ov} &= \frac{3}{8} & x_{ce} &= x_{df} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

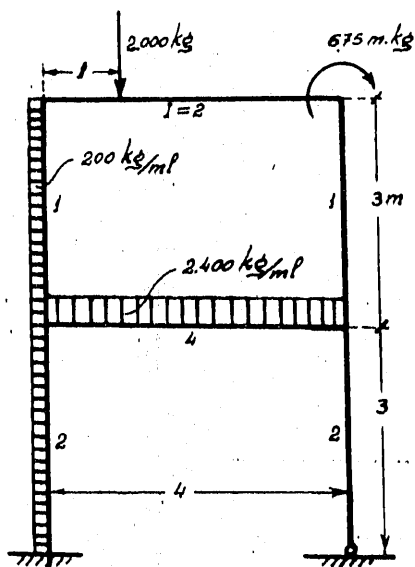


Figura 4.ª

$$U_a = \infty \quad U_b = 4,$$

$$U_e = U_d = 12,$$

$$U_e = U_f = 5.$$

$$\frac{1}{2} k_{bd}^* = 0,500,$$

$$\frac{1}{2} k_{cd}^* = \frac{1}{2} k_{dc}^* = \frac{1}{2} \frac{6}{12} = 0,250,$$

$$\frac{1}{2} k_{ce}^* = \frac{1}{2} k_{ef}^* = \frac{1}{2} \frac{2}{12} = 0,08\bar{3},$$

$$\frac{1}{2} k_{ec}^* = \frac{1}{2} k_{fe}^* = \frac{1}{2} \frac{2}{5} = 0,200,$$

$$\frac{1}{2} k_{cf}^* = \frac{1}{2} k_{fc}^* = \frac{1}{2} \frac{3}{5} = 0,300.$$

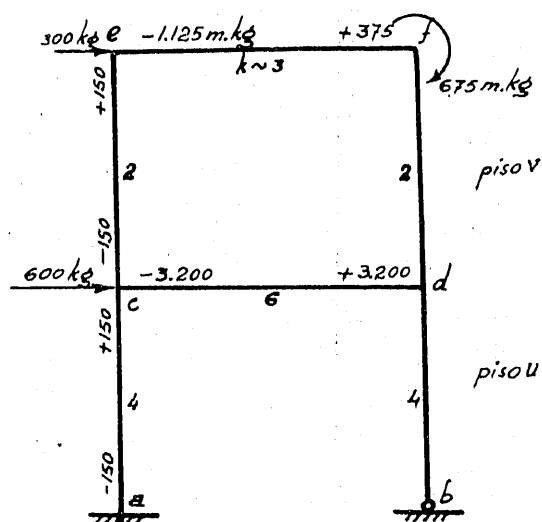


Figura 5.ª

$$\frac{1}{2} x_{bd}^* = \frac{1}{2} \frac{3/4}{4} = 0,09375,$$

$$\frac{1}{2} x_{cd}^* = \frac{1}{2} x_{dc}^* = \frac{1}{2} \frac{3/4}{12} = \frac{1}{2} x_{df}^* = \frac{1}{2} \frac{3/4}{12} = 0,03125,$$

$$\frac{1}{2} x_{ce}^* = \frac{1}{2} x_{fe}^* = \frac{1}{2} \frac{3/4}{5} = 0,075.$$

Momentos de empotramiento:

$$\frac{1}{12} 2400 \times 16 = 3200 \text{ m.kg.}$$

$$\frac{1}{12} 200 \times 3^2 = 150,$$

$$- \frac{2000 \times 1 \times 3^2}{4^2} = -1125,$$

$$+ \frac{2000 \times 3 \times 1^2}{4^2} = +375.$$

$$\eta_{ca} = \eta_{db} = \frac{900 \times 3}{3^2} \times \frac{3}{4} = 675.$$

$$\eta_{ce} = \eta_{df} = \eta_{ec} = \eta_{fd} = \frac{300 \times 3}{3} \times \frac{3}{4} = 225.$$

$$- \Omega_b = \frac{+675}{4} = +168,75.$$

$$- \Omega_c = \frac{+3200 + 675 + 225}{12} = \frac{4100}{12} = +341,6.$$



$$\begin{aligned}
 -Q_d &= \frac{-3200 + 675 + 225}{12} = -\frac{2300}{12} = -191,6. \\
 -Q_e &= \frac{+1125 - 150 + 225}{5} = \frac{1200}{5} = +240,0. \\
 -Q_f &= \frac{-375 + 675 + 225}{5} = \frac{525}{5} = +105,0.
 \end{aligned}$$

Deformaciones:

El factor de proporcionalidad vale  $-\frac{3}{2E}$ .

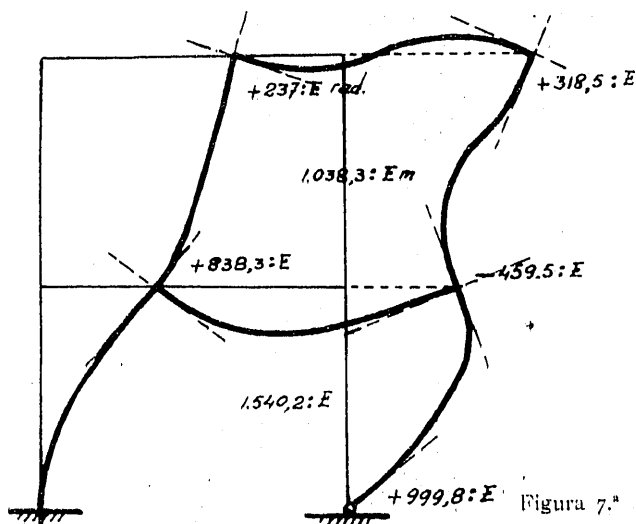


Figura 7.ª

Momentos hiperestáticos:

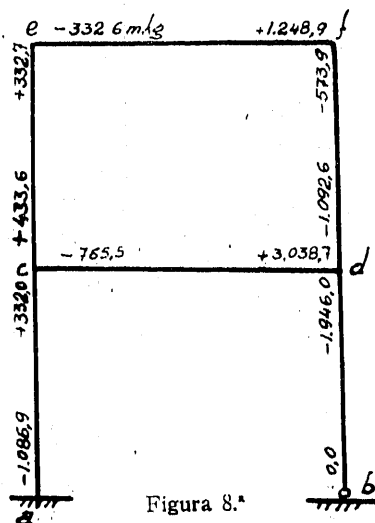


Figura 8.ª

Esfuerzos cortantes (parte correspondiente a los momentos hiperestáticos anteriores).

En el proceso iterativo se ha recorrido la estructura en el orden

$e - c - d - b - f - e - c - \dots$

Las columnas centrales corresponden a los índices de desplazamientos, en donde, cada vuelta a la estructura se ha separado con una raya y se han comprobado

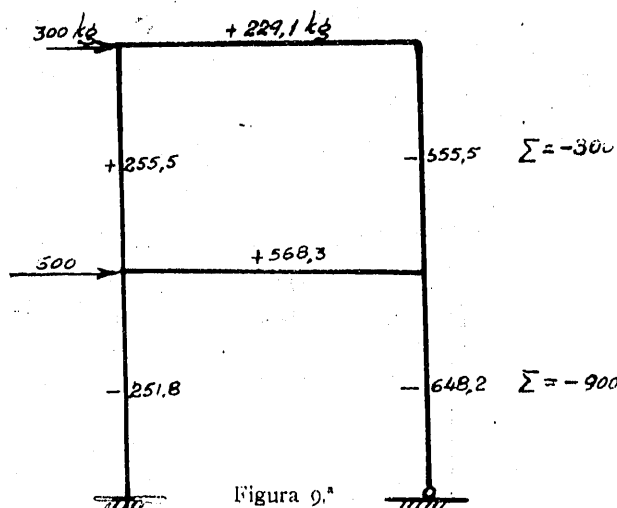


Figura 9.ª

los índices subrayados (hay dos rectificaciones en la columna del piso inferior). Aunque parezcan largas estas columnas, no son nada molestas en su confección.

Especulativamente, se ha hecho el ejemplo con una excesiva aproximación, por lo que han sido precisas once vueltas a la estructura. Lo mismo ocurriría con cualquiera de los otros métodos corrientemente empleados (Cross, Kani, Kammüller, etc.). En todos ellos, como el que nos ocupa, a cada vuelta se consigue la misma aproximación. Más adelante daremos normas para aumentar la convergencia del proceso.

A partir de la sexta vuelta inclusive, se han realizado las operaciones con más decimales para conseguir gran aproximación.

En la práctica no es precisa tanta aproximación, basta con mucha menos, y al final, el residuo de la suma de momentos alrededor de un nudo, con signo contrario, se prorratea proporcionalmente a las respectivas rigideces. Así, si nos hubiésemos detenido después de la quinta vuelta y hacemos el prorrato mencionado, obtenemos los momentos siguientes:

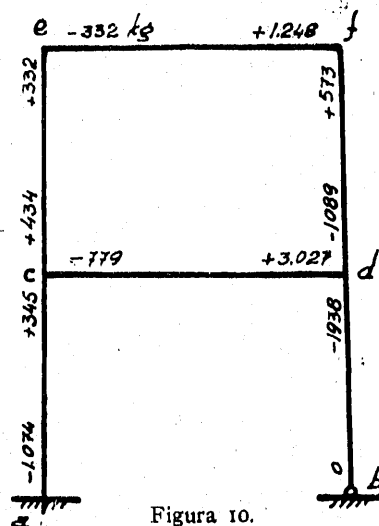


Figura 10.

Vemos que la aproximación es muy aceptable.

Por lo demás, la convergencia del proceso es la misma, como ya hemos dicho, que la del método de Cross, por ejemplo. En efecto, Cross empieza un reparto o prorrateo del momento de sujeción

$$\bar{M}_m = \sum_{(m)} \bar{M}_{mn}$$

entre las rigideces relativas:

$$-\bar{M}_m \frac{k_{mn}}{\sum_{(m)} k_{mn}}$$

Estos momentos que aparecen en cada barra, dan un ángulo que vale:

$$-\bar{M}_m \frac{k_{mn}}{\sum_{(m)} k_{mn}} : k_{mn} = -\frac{\bar{M}_m}{\sum_{(m)} k_{mn}}$$

Vemos, pues, que esta operación coincide enteramente con la primera del método que nos ocupa.

Después Cross transmite al nudo adyacente  $n$ , el momento:

$$\frac{1}{2} k_{mn} \frac{\bar{M}_m}{\sum_{(m)} k_{mn}}$$

(nos concretamos al caso  $E = \text{constante}$ ,  $I = \text{constante}$ ) que producirá en  $n$  un giro que vale:

$$\frac{1}{2} k_{mn} \frac{\bar{M}_m}{\sum_{(m)} k_{mn} \sum_{(n)} k_{nm}}$$

En nuestro método (caso intraslacional, pues estamos comparándolo con el método de Cross que no resuelve los casos traslacionales con un solo proceso), se transmite un ángulo que vale:

$$a_n = a_m \frac{\frac{1}{2} k_{mn}}{\sum_{(m)} k_{mn}} = \frac{\bar{M}_m}{\sum_{(m)} k_{mn}} \frac{\frac{1}{2} k_{mn}}{\sum_{(n)} k_{nm}}$$

es decir, el mismo. Luego la convergencia es la misma por cada vuelta. Pero estas vueltas son más simples — transmisión tan sólo — en el método expuesto, en cambio en el de Cross comprende transmisión y distribución.

De todas las maneras esta comparación, con relación a la convergencia de ambos métodos, es ficticia — sólo real en los casos intraslacionales —; basta resolver cualquier caso traslacional para observar el gran ahorro de tiempo y trabajo.

## IV

### Ventajas del método.

1.<sup>a</sup> Ya hemos apuntado la de su sencillez, automatismo y rapidez. Queda esto bien patente en la manera de operar con una máquina multiplicadora de tipo corriente y que ya hemos explicado. Veíamos que no es necesario hacer ninguna operación auxiliar intermedia, ni mentalmente, ni sobre el papel; la máquina multiplicadora lo va haciendo todo sucesivamente con fatiga mental mínima, por no decir nula.

Aquí, además, no existen las distribuciones, sino sólo transmisiones (influencias), luego comparándole, en caso intraslacional, con el método de Cross o el de Kani, las columnas son la mitad de cortas.

2.<sup>a</sup> Como el de Kammüller, efectúa sólo una columna de valores por nudo, mientras los de Cross y Kani tienen que efectuar una por cada extremo de barra y con dos valores por vuelta (transmisión y distribución).

3.<sup>a</sup> Como el de Kani, evita efectuar las sumas finales de las columnas que se hacen en los de Cross y Kammüller; operación molesta por parecer los valores con signos  $+$  y  $-$ . Y esas sumas serán erróneas si algún sumando está equivocado.

4.<sup>a</sup> Como el de Kani, elimina automáticamente los "errores" (ponemos "errores" entre comillas, pues en las aproximaciones sucesivas de una iteración no tiene cabida esta palabra) que se puedan cometer en la iteración, eliminándose la gran fatiga que produce el mantener la atención para evitarlos, lo cual no ocurre en los métodos de Cross y Kammüller. Esto es consecuencia de ser el método, acumulativo y no por incrementos, es decir, el "último" valor obtenido es el que nos interesa y no hay que hacer sumas de columnas.

5.<sup>a</sup> Una ventaja muy notable de operar con giros es la de si una vez efectuado el cálculo nos vemos precisados a cambiar o reajustar las características de algunas barras, comenzaremos de nuevo la iteración, pero partiendo de los ángulos ya obtenidos, es decir, inmediatamente después de los valores  $-\Omega$ , pondremos aquéllos, puesto que serán muy próximos a los definitivos.

6.<sup>a</sup> Otra ventaja de operar con giros es la de poder utilizar los teoremas de la reciprocidad o de Maxwell y el Betti. Esto es de gran utilidad en casos de cargas variables y para hallar líneas de influencia.

7.<sup>a</sup> Como pequeña contrapartida, como operamos con giros, al final, pero con gran facilidad, hay que hallar los momentos en función de aquéllos, pero tenemos el problema elástico completamente resuelto, pues nos encontramos también con los valores de los giros y las traslaciones.

(Continuará.)