

ESTUDIO DE LA CATENARIA EN LOS CABLES SIN SOBRECARGA

Por MARIO COLL ALAS
Ingeniero de Caminos.

En la asignatura Maquinaria y Medios Auxiliares de la Construcción, se estudia el cable y todas sus aplicaciones a obra, de la cual una de las más interesantes es la de los cables-vías para teleféricos, andarivales o raíloves. El autor, alumno que fué muy distinguido, ha tenido que resolver, en sus cinco fecundos años de vida profesional, multitud de casos de aplicación, y como resultado de ello, realizó este trabajo, que liga los elementos básicos del vano, proyección y desnivel, con el desarrollo o longitud del cable y su tensión en el punto más alto. Creemos muy sencillos, originales y prácticos, los resultados conseguidos, y por ello animamos al autor a que los publicara, en bien de los compañeros que puedan necesitarlos, en nuestra REVISTA. A título de sembrador de las primeras inquietudes en estos problemas, le felicitamos y nos felicitamos.

Un hilo homogéneo, suspendido por sus extremos, es bien sabido que toma la forma de la curva llamada catenaria, cuya ecuación cartesiana es:

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}.$$

En el caso particular de los cables que han de suspenderse de dos puntos, A y B (fig. 1.^o), que distan horizontalmente una longitud $A'B = l$, y cuya diferencia de alturas es b , interesa relacionar entre sí la longitud S del cable suspendido y la tensión máxima T a que queda sometido el propio cable en el anclaje A .

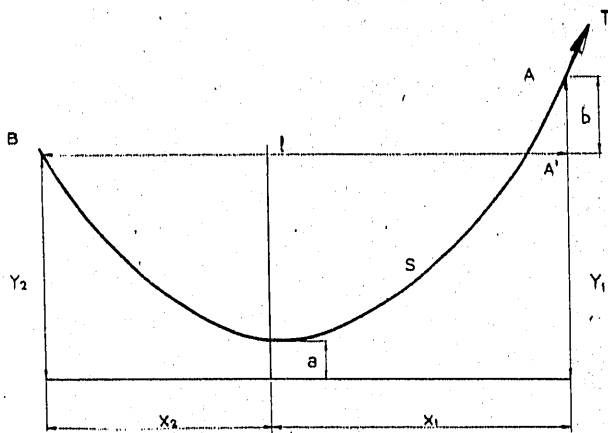


Figura 1.^o

Vamos a relacionar estos cuatro valores: l , b , S y T , con independencia del parámetro a de la catenaria. Para ello partiremos de las fórmulas bien conocidas y sobradamente demostradas:

$$\frac{T}{P} = a \operatorname{Ch} \frac{x_1}{a}; \quad \frac{T}{P} - b = a \operatorname{Ch} \frac{x_2}{a};$$

$$S = a \left(\operatorname{Sh} \frac{x_1}{a} + \operatorname{Sh} \frac{x_2}{a} \right); \quad x_1 + x_2 = l.$$

Siendo: P = peso del cable por metro lineal (kilogramo/m.).

De este sistema obtendremos:

$$\frac{2T}{P} - b = a \left(\operatorname{Ch} \frac{x_1}{a} + \operatorname{Ch} \frac{x_2}{a} \right) = 2a \operatorname{Ch} \frac{l}{2a} \operatorname{Ch} \frac{x_1 - x_2}{2a};$$

$$b = a \left(\operatorname{Ch} \frac{x_1}{a} - \operatorname{Ch} \frac{x_2}{a} \right) = 2a \operatorname{Sh} \frac{l}{2a} \operatorname{Sh} \frac{x_1 - x_2}{2a};$$

$$S = a \left(\operatorname{Sh} \frac{x_1}{a} + \operatorname{Sh} \frac{x_2}{a} \right) = 2a \operatorname{Sh} \frac{l}{2a} \operatorname{Ch} \frac{x_1 - x_2}{2a},$$

y de aquí fácilmente:

$$\frac{S}{\frac{2T}{P} - b} = Th \frac{l}{2a};$$

[1]

$$S^2 - b^2 = 4a^2 \operatorname{Sh}^2 \frac{l}{2a},$$

y siendo

$$Th^2 a = \frac{\operatorname{Sh}^2 \frac{l}{2a}}{1 + \operatorname{Sh}^2 \frac{l}{2a}},$$

resulta:

$$\frac{S^2}{\left(\frac{2T}{P} - b\right)^2} = \frac{S^2 - b^2}{4a^2 + S^2 - b^2},$$

ecuación que nos da el valor del parámetro a en función de los otros datos. Si llamamos, para simplificar,

$$\lambda = \frac{2T}{P} - b,$$

obtendremos:

$$a = \frac{1}{2S} \sqrt{(S^2 - b^2)(\lambda^2 - b^2)}. \quad [11]$$

Entrando con este valor en la fórmula [I], tendremos la ecuación que liga a los valores l , b , S y T , como nos proponíamos:

$$\frac{S}{\lambda} = Th \frac{l S}{\sqrt{(S^2 - b^2)(\lambda^2 - S^2)}} \quad [III]$$

Caso particular de que los extremos estén a igual altura.

Para ello, $b = 0$, y la fórmula [III] queda simplificada de la siguiente forma:

$$\frac{S}{\lambda} = Th \frac{l}{\sqrt{\lambda^2 - S^2}} \quad [IV]$$

Estudio práctico de este caso:

Si llamamos

$$Y = \frac{l}{\lambda} \quad X = \frac{S}{\lambda}$$

que es en realidad un fácil ábaco que nos permite hallar la longitud del cable si queremos darle una determinada tensión (T) en el extremo, o bien esta tensión si tomamos como dato la longitud del cable (S).

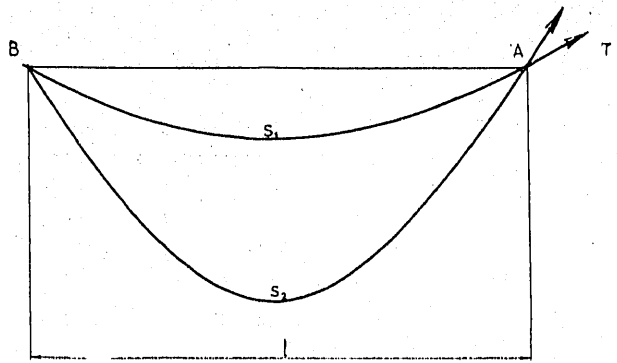


Figura 3.ª

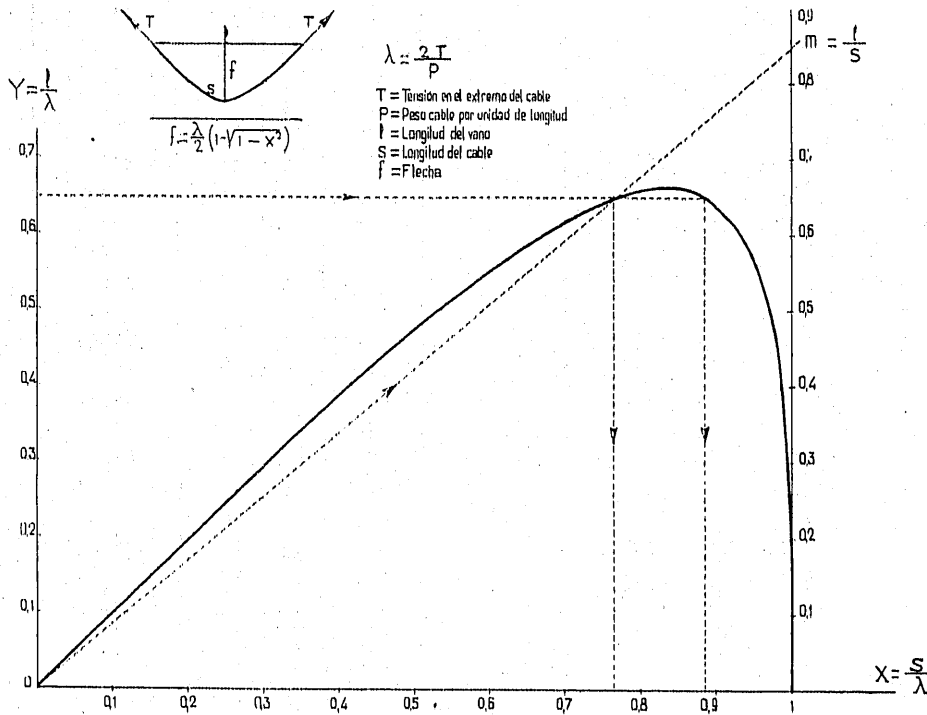


Figura 2.ª

tendremos:

$$X = Th \frac{Y}{\sqrt{1 - X^2}}$$

o lo que es igual:

$$Y = \sqrt{1 - X^2} \operatorname{arg} Th X.$$

Esta curva es la representada en la figura 2.ª,

Primer caso. — Datos:

- Longitud del vano L (m.)
- Tensión en el extremo del cable T (Kg.)
- Peso del cable por metro lineal P (Kg./m. l.)

Obtenemos inmediatamente $\lambda = \frac{2T}{P}$, y después

$Y = \frac{l}{\lambda}$ nos da en la curva dos valores, X_1 y X_2 , a

X	Y	m
0	0	1
0,01	0,01000	0,99995
0,02	0,01999	0,99985
0,03	0,02999	0,99970
0,04	0,03999	0,99960
0,05	0,04998	0,99933
0,06	0,05996	0,99914
0,07	0,06994	0,99887
0,08	0,07991	0,99867
0,09	0,08988	0,99830
0,10	0,09983	0,99791
0,11	0,10977	0,99758
0,12	0,11971	0,99715
0,13	0,12963	0,99671
0,14	0,13954	0,99620
0,15	0,14943	0,99569
0,16	0,15931	0,99512
0,17	0,16917	0,99450
0,18	0,17901	0,99400
0,19	0,18886	0,99320
0,20	0,19864	0,99267
0,21	0,20846	0,99173
0,22	0,21818	0,99091
0,23	0,22791	0,99008
0,24	0,23762	0,98920
0,25	0,24730	0,98831
0,26	0,25696	0,98733
0,27	0,26658	0,98636
0,28	0,27618	0,98527
0,29	0,28573	0,98420
0,30	0,29526	0,98306
0,31	0,30475	0,98191
0,32	0,31421	0,98067
0,33	0,32362	0,97941
0,34	0,33300	0,97811
0,35	0,34234	0,97672
0,36	0,35162	0,97530
0,37	0,36086	0,97381
0,38	0,37005	0,97231
0,39	0,37920	0,97072
0,40	0,38829	0,96910
0,41	0,39733	0,96738
0,42	0,40630	0,96563
0,43	0,41522	0,96379
0,44	0,42407	0,96193
0,45	0,43287	0,95996
0,46	0,44158	0,95794
0,47	0,45023	0,95585
0,48	0,45881	0,95367
0,49	0,46730	0,95146
0,50	0,47573	0,94915

$$m = \frac{Y}{X}$$

$$Y = \sqrt{1-X^2} \cdot \arg \text{Th. X}$$

X	Y	m
0,51	0,48417	0,94735
0,52	0,49230	0,94673
0,53	0,50043	0,94421
0,54	0,50851	0,94168
0,55	0,51645	0,93900
0,56	0,52431	0,93627
0,57	0,53204	0,93340
0,58	0,53966	0,93045
0,59	0,54700	0,92742
0,60	0,55453	0,92422
0,61	0,56175	0,92090
0,62	0,56885	0,91750
0,63	0,57578	0,91394
0,64	0,58256	0,91025
0,65	0,58918	0,90643
0,66	0,59562	0,90245
0,67	0,60188	0,89833
0,68	0,60792	0,89400
0,69	0,61376	0,88951
0,70	0,61939	0,88484
0,71	0,62493	0,88018
0,72	0,62989	0,87485
0,73	0,63476	0,86953
0,74	0,63930	0,86392
0,75	0,64356	0,85808
0,76	0,64748	0,85195
0,77	0,65110	0,84558
0,78	0,65448	0,83869
0,79	0,65754	0,83162
0,80	0,65917	0,82396
0,81	0,66093	0,81596
0,82	0,66213	0,80747
0,83	0,66270	0,79843
0,84	0,66260	0,78881
0,85	0,66174	0,77852
0,86	0,65999	0,76743
0,87	0,65729	0,75550
0,88	0,65346	0,74257
0,89	0,64984	0,72906
0,90	0,64173	0,71303
0,91	0,63334	0,69598
0,92	0,62277	0,67692
0,93	0,61038	0,65632
0,94	0,59373	0,63163
0,95	0,57261	0,60275
0,96	0,54614	0,56889
0,97	0,50882	0,52456
0,98	0,45723	0,46656
0,99	0,37368	0,37745
1,00	0	0

los que corresponden las dos longitudes $S_1 = X_1 \lambda$; $S_2 = X_2 \lambda$, posibles como se ven en la figura 3.^a.

Segundo caso. — Datos:

Longitud del vano l (m.)
 Longitud del cable S (m.)
 Peso del cable por metro lineal P (Kg./m. l.)

Obtendremos $m = \frac{l}{S}$, y uniendo el punto m con el origen de coordenadas O , nos da un punto sobre la curva, al cual corresponde un valor X que, a su vez, nos da el de λ : $\lambda = \frac{S}{X}$, y con éste obtendremos $T = \frac{1}{2}$

EJEMPLO. — Partiendo de la catenaria $Y = 350$ Ch $\frac{X}{350}$ y una luz: $l = 320$ m., la longitud del cable será:

$$S = 2.350 \cdot Sh \frac{160}{350} = 331,26 \text{ m.}$$

Si el cable tiene un peso $P = 4$ Kg./m. l., la tensión de los extremos vale:

$$T = P \cdot 350 \text{ Ch} \frac{160}{350} = 1.548,848 \text{ Kg.}$$

Partiendo de los valores:

$$l = 320 \text{ m.}$$

$$P = 4 \text{ Kg/m. l.}$$

$$T = 1.548,848 \text{ Kg.}$$

obtendremos, utilizando las tablas del ábaco:

$$X = \frac{2T}{P} = 774,424; \quad Y = \frac{l}{\lambda} = 0,413210,$$

interpolando,

$$\left. \begin{array}{l} X \ 0,43 \dots\dots 0,42 \\ Y \ 0,41522 \dots\dots 0,40630 \end{array} \right\} \Delta X = 0,007746$$

$$X = 0,427746$$

la longitud del cable que se obtiene es:

$$S = \lambda \cdot X = 774,424 \times 0,427746 =$$

$$S = 331,26 \text{ m.}$$

Flecha.

La flecha en el centro del vano vale:

$$f = Y_1 - a,$$

siendo:

$$Y_1 = a \text{ Ch} \frac{X_1}{a} = \frac{T}{P},$$

y como según la fórmula [II]:

$$a = \frac{1}{P} \left(\sqrt{T^2 - \left(\frac{PS}{2}\right)^2} \right),$$

resulta el valor de la flecha:

$$f = \frac{1}{P} \left(T - \sqrt{T^2 - \left(\frac{PS}{2}\right)^2} \right).$$

Tensión mínima.

Como consecuencia inmediata de la curva del ábaco, vemos que la tensión en los extremos de un cable toma el valor mínimo para el punto:

$$X = 0,83,$$

y de aquí obtenemos:

$$m = 0,8;$$

$$S = 1,25 l;$$

$$T = 0,664 S P.$$

Por lo tanto, la posición de trabajo más favorable para un cable tendido entre dos apoyos a igual altura es aquella en la que su longitud es un 25 por 100 superior a la luz del vano. En este caso la tensión en los extremos del cable vale el peso del cable multiplicado por 0,664.

Caso general con los extremos a diferente altura.

La fórmula [III] nos relaciona, según hemos visto, los valores l , b , S y T . Este último por intermedio del valor $\lambda = \frac{2T}{P} - b$, ligado a su vez con la diferencia de alturas b .

Haciendo

$$Y = \frac{l}{\lambda}; \quad Z = \frac{b}{S}; \quad X = \frac{b}{\lambda},$$

la fórmula [III] toma la forma:

$$\frac{X}{Z} = Th \frac{Y}{\sqrt{1-Z^2} \cdot \sqrt{1-\frac{X^2}{Z^2}}},$$

o sea:

$$Y = \sqrt{1-Z^2} \sqrt{1-\frac{X^2}{Z^2}} \arg Th \frac{X}{Z},$$

dando en ella valores a Z , obtenemos el ábaco de la figura 4.^a, que nos permite obtener fácilmente cualquier caso que se presente.

Curvas del abaco

Z = 0,01

X	0,0005	0,0010	0,0015	0,0020	0,0025	0,0030	0,0035	0,0040	0,0045	0,0050	0,0055	0,0060	0,0065	0,0070	0,0075	0,0080	0,0085	0,0090	0,0095	0,0097	0,0099	0,0100	
Y	0,04970	0,04980	0,04992	0,05003	0,05013	0,05023	0,05033	0,05043	0,05053	0,05063	0,05073	0,05083	0,05093	0,05103	0,05113	0,05123	0,05133	0,05143	0,05153	0,05163	0,05173	0,05183	0,05193
M	99,970	99,820	99,613	99,315	98,916	98,413	97,806	97,068	96,189	95,142	93,895	92,417	90,638	88,480	85,804	82,393	77,848	71,300	65,629	60,273	52,453	37,743	0

Z = 0,02

X	0,0010	0,0020	0,0030	0,0040	0,0050	0,0060	0,0070	0,0080	0,0090	0,0100	0,0110	0,0120	0,0130	0,0140	0,0150	0,0160	0,0170	0,0180	0,0186	0,0190	0,0194	0,0198	0,0200
Y	0,04977	0,04981	0,04994	0,05006	0,05017	0,05027	0,05037	0,05047	0,05057	0,05067	0,05077	0,05087	0,05097	0,05107	0,05117	0,05127	0,05137	0,05147	0,05157	0,05167	0,05177	0,05187	0,05197
M	49,970	49,905	49,800	49,650	49,450	49,200	48,896	48,526	48,087	47,563	46,941	46,220	45,312	44,234	42,895	41,190	38,918	35,644	32,810	30,131	26,223	18,869	0

Z = 0,03

X	0,0015	0,0030	0,0045	0,0060	0,0075	0,0090	0,0105	0,0120	0,0135	0,0150	0,0165	0,0180	0,0195	0,0210	0,0225	0,0240	0,0255	0,0270	0,0279	0,0285	0,0291	0,0297	0,0300
Y	0,04996	0,04997	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100
M	33,307	33,206	33,191	33,092	32,959	32,792	32,590	32,345	32,050	31,701	31,286	30,793	30,201	29,481	28,590	27,453	25,939	23,757	21,867	20,082	17,477	12,516	0

Z = 0,04

X	0,0020	0,0040	0,0060	0,0080	0,0100	0,0120	0,0140	0,0160	0,0180	0,0200	0,0220	0,0240	0,0260	0,0280	0,0300	0,0320	0,0340	0,0360	0,0372	0,0380	0,0388	0,0396	0,0400
Y	0,04994	0,04995	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100
M	24,170	24,958	24,885	24,811	24,710	24,585	24,434	24,249	24,029	23,768	23,456	23,087	22,643	22,105	21,455	20,585	19,447	17,812	16,395	15,057	13,103	9,429	0

Z = 0,05

X	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0200	0,0225	0,0250	0,0275	0,0300	0,0325	0,0350	0,0375	0,0400	0,0425	0,0450	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0500
Y	0,04997	0,04998	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100
M	19,968	19,940	19,899	19,839	19,759	19,659	19,538	19,390	19,215	19,006	18,756	18,461	18,106	17,675	17,140	16,459	15,551	14,243	13,110	12,040	10,478	7,540	0

Z = 0,06

X	0,0030	0,0060	0,0090	0,0120	0,0150	0,0180	0,0210	0,0240	0,0270	0,0300	0,0330	0,0360	0,0390	0,0420	0,0450	0,0480	0,0510	0,0540	0,0558	0,0570	0,0582	0,0594	0,0600
Y	0,04998	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100
M	16,630	16,608	16,573	16,523	16,457	16,374	16,272	16,150	16,003	15,829	15,622	15,376	15,080	14,721	14,276	13,708	12,952	11,862	10,919	10,028	8,727	6,280	0

Z = 0,07

X	0,0035	0,0070	0,0105	0,0140	0,0175	0,0210	0,0245	0,0280	0,0315	0,0350	0,0385	0,0420	0,0455	0,0490	0,0525	0,0560	0,0595	0,0630	0,0665	0,0679	0,0693	0,0700	
Y	0,04999	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100
M	14,246	14,226	14,196	14,154	14,097	14,026	13,935	13,834	13,708	13,559	13,381	13,171	12,917	12,610	12,228	11,742	11,094	10,161	9,353	8,590	7,475	5,579	0

Z = 0,08

X	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0200	0,0240	0,0280	0,0320	0,0360	0,0400	0,0440	0,0480	0,0520	0,0560	0,0600	0,0640	0,0680	0,0720	0,0744	0,0760	0,0776	0,0792	0,0800
Y	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100	0,05100
M	12,455	12,439	12,413	12,375	12,326	12,263	12,187	12,095	11,986	11,855	11,700	11,516	11,294	11,025	10,691	10,267	9,700	8,886	8,178	7,510	6,536	4,703	0

Z = 0,09

X	0,0045	0,0090	0,0135	0,0180	0,0225	0,0270	0,0315	0,0360	0,0405	0,0450	0,0495	0,0540	0,0585	0,0630	0,0675	0,0720	0,0765	0,0810	0,0857	0,0885	0,0913	0,0931	0,0950
Y	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100	0,05100
M	11,062	11,047	11,024	10,991	10,947	10,891	10,824	10,742	10,645	10,529	10,391	10,227	10,031	9,792	9,496	9,118	8,615	7,890	7,263	6,670	5,805	4,177	0

Z = 0,10

X	0,0050	0,0100	0,0150	0,0200	0,0250	0,0300	0,0350	0,0400	0,0450	0,0500	0,0550	0,0600	0,0650	0,0700	0,0750	0,0800	0,0850	0,0900	0,0930	0,0950	0,0970	0,0990	0,1000
Y	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100	0,05100
M	9,966	9,933	9,912	9,882	9,842	9,793	9,732	9,659	9,571	9,467	9,345	9,196	9,019	8,804	8,538	8,198	7,746	7,095	6,530	5,997	5,219	3,756	0

Z = 0,11

X	0,0055	0,0110	0,0165	0,0220	0,0275	0,0330	0,0385	0,0440	0,0495	0,0550	0,0605	0,0660	0,0715	0,0770	0,0825	0,0880	0,0935	0,0990	0,1025	0,1065	0,1067	0,1089	0,1100
Y	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100	0,05100
M	9,033	9,020	9,001	8,974	8,938	8,893	8,838	8,771	8,692	8,597	8,485	8,351	8,190	7,995	7,753	7,445	7,034	6,443	5,930	5,446	4,740	3,411	0

Z = 0,12

X	0,0060	0,0120	0,0180	0,0240	0,0300	0,0360	0,0420	0,0480	0,0540	0,0600	0,0660	0,0720	0,0780	0,0840	0,0900	0,0960	0,1020	0,1080	0,1116	0,1160	0,1164	0,1188	0,1200
Y	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100	0,05100
M	8,270	8,259	8,242	8,217	8,184	8,143	8,092	8,031	7,958	7,872	7,768	7,646	7,499	7,320	7,099	6,817	6,441	5,899	5,430	4,987	4,340	3,123	0

Z = 0,13

X	0,0065	0,0130	0,0195	0,0260	0,0325	0,0390	0,0455	0,0520	0,0585	0,0650	0,0715	0,0780	0,0845	0,0910	0,0975	0,1040	0,1105	0,1170	0,1209	0,1265	0,1267	0,1287	0,1300
Y	0,04999	0,05000	0,05005	0,05010	0,05015	0,05020	0,05025	0,05030	0,05035	0,05040	0,05045	0,05050	0,05055	0,05060	0,05065	0,05070	0,05075	0,05080	0,05085	0,05090	0,05095	0,05100	0,05100
M	7,675	7,614	7,598	7,575	7,545	7,506	7,460	7,404	7,337	7,257	7,162	7,049	6,913	6,749	6,545	6,284	5,938	5,438	5,006	4,597	4,001	2,879	0

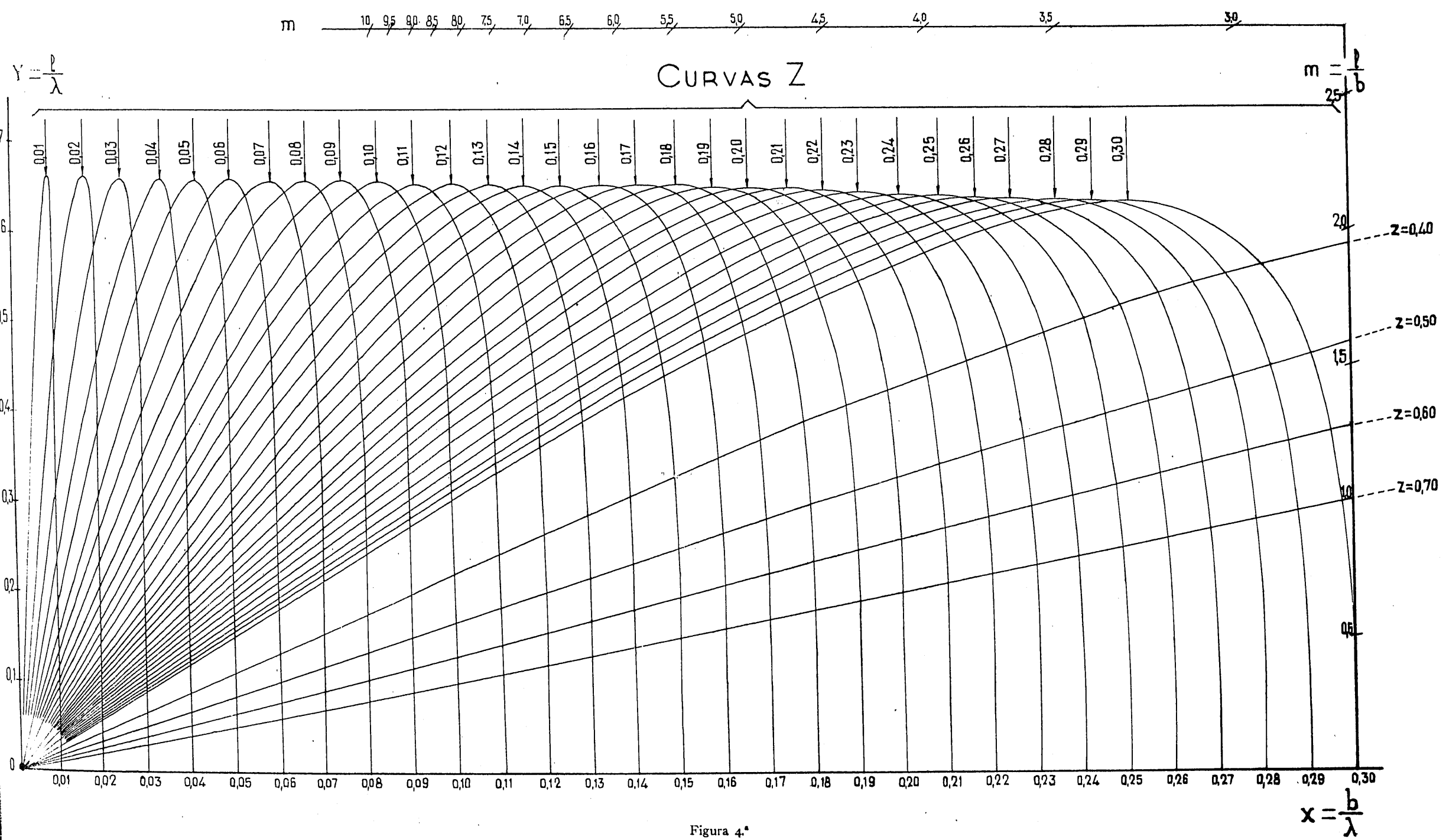


Figura 4*

Z = 0,14

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,14.

Z = 0,15

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,15.

Z = 0,16

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,16.

Z = 0,17

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,17.

Z = 0,18

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,18.

Z = 0,19

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,19.

Z = 0,20

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,20.

Z = 0,21

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,21.

Z = 0,22

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,22.

Z = 0,23

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,23.

Z = 0,24

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,24.

Z = 0,25

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,25.

Z = 0,26

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,26.

Z = 0,27

Table with 3 rows (X, Y, M) and 25 columns of numerical values for Z = 0,27.

		Z = 0,28																					
X	0,0140	0,0280	0,0420	0,0560	0,0700	0,0840	0,0980	0,1120	0,1260	0,1400	0,1540	0,1680	0,1820	0,1960	0,2100	0,2240	0,2380	0,2520	0,2604	0,2660	0,2716	0,2772	0,2800
Y	0,04798	0,07584	0,14345	0,19069	0,23741	0,28345	0,32865	0,37276	0,41566	0,45670	0,49579	0,53255	0,56861	0,59461	0,61782	0,63280	0,65527	0,61606	0,58596	0,54971	0,48847	0,35873	0
M	3,427	3,423	3,415	3,405	3,392	3,374	3,354	3,328	3,298	3,262	3,219	3,169	3,108	3,034	2,942	2,825	2,669	2,445	2,250	2,067	1,798	1,294	0

		Z = 0,29																					
X	0,0145	0,0290	0,0435	0,0580	0,0725	0,0870	0,1015	0,1160	0,1305	0,1450	0,1595	0,1740	0,1885	0,2030	0,2175	0,2320	0,2465	0,2610	0,2697	0,2755	0,2813	0,2871	0,2900
Y	0,04783	0,07554	0,14301	0,19010	0,23667	0,28257	0,32765	0,37160	0,41427	0,45529	0,49426	0,53070	0,56586	0,59277	0,61590	0,63084	0,65330	0,61415	0,58415	0,54800	0,48695	0,35762	0
M	3,299	3,296	3,288	3,278	3,264	3,248	3,228	3,203	3,174	3,140	3,099	3,050	2,991	2,920	2,852	2,719	2,569	2,353	2,166	1,989	1,731	1,246	0

		Z = 0,30																					
X	0,0150	0,0300	0,0450	0,0600	0,0750	0,0900	0,1050	0,1200	0,1350	0,1500	0,1650	0,1800	0,1950	0,2100	0,2250	0,2400	0,2550	0,2700	0,2790	0,2850	0,2910	0,2970	0,3000
Y	0,04768	0,07523	0,14255	0,18949	0,23591	0,28166	0,32657	0,37040	0,41293	0,45382	0,49266	0,52897	0,56204	0,59086	0,61592	0,62881	0,65126	0,61217	0,58227	0,54623	0,48539	0,35647	0
M	3,179	3,174	3,168	3,158	3,145	3,130	3,110	3,087	3,059	3,025	2,986	2,939	2,882	2,814	2,729	2,620	2,476	2,267	2,087	1,917	1,668	1,200	0

		Z = 0,40																					
X	0,0200	0,0400	0,0600	0,0800	0,1000	0,1200	0,1400	0,1600	0,1800	0,2000	0,2200	0,2400	0,2600	0,2800	0,3000								
Y	0,04581	0,07150	0,13695	0,18206	0,22665	0,27061	0,31376	0,35587	0,39673	0,43601	0,47333	0,50824	0,53999	0,56768	0,58983								
M	2,291	2,288	2,283	2,276	2,267	2,255	2,241	2,224	2,204	2,180	2,152	2,118	2,077	2,027	1,966								

		Z = 0,50																					
X	0,0250	0,0500	0,0750	0,1000	0,1250	0,1500	0,1750	0,2000	0,2250	0,2500	0,2750	0,3000											
Y	0,04328	0,06646	0,12941	0,17203	0,21417	0,25570	0,29647	0,33627	0,37488	0,41199	0,44726	0,48024											
M	1,731	1,729	1,725	1,720	1,715	1,705	1,694	1,681	1,666	1,648	1,626	1,601											

		Z = 0,60																					
X	0,0300	0,0600	0,0900	0,1200	0,1500	0,1800	0,2100	0,2400	0,2700	0,3000													
Y	0,03998	0,07786	0,11954	0,15891	0,19784	0,23621	0,27387	0,31063	0,34650	0,38059													
M	1,333	1,331	1,328	1,324	1,319	1,312	1,304	1,294	1,283	1,269													

		Z = 0,70																					
X	0,0350	0,0700	0,1050	0,1400	0,1750	0,2100	0,2450	0,2800															
Y	0,03569	0,07129	0,10671	0,14186	0,17661	0,21086	0,24448	0,27729															
M	1,020	1,018	1,016	1,013	1,009	1,004	0,998	0,990															

Primer caso. — Datos:

Longitud horizontal del vano l (m.)
 Diferencias de altura b (m.)
 Tensión en el extremo más alto T (Kg.)
 Peso del cable por metro lineal P (Kg./m. l.)

Estos datos nos dan:

$$\lambda = \frac{2T}{P} - b; \quad X = \frac{b}{\lambda}; \quad Y = \frac{l}{\lambda}$$

abscisas que marcan un punto del ábaco por el cual pasan dos curvas correspondientes a los valores Z_1 y Z_2 , que, a su vez, nos da las longitudes S_1 y S_2 de los dos cables que, colgados entre estos extremos, tendrán en el más alto una tensión T .

$$S_1 = \frac{b}{Z_1}; \quad S_2 = \frac{b}{Z_2}$$

Segundo caso. — Datos:

Longitud horizontal del vano l (m.)
 Diferencias de altura b (m.)
 Longitud del cable S (m.)
 Peso del cable por metro lineal P (Kg./m. l.)

Estos datos nos dan:

$$Z_3 = \frac{b}{S}; \quad m_3 = \frac{l}{b}$$

La recta que une el punto m_3 con el origen de coordenadas, corta a la curva Z_3 en un punto al cual corresponde la abscisa X_3 . Esto nos da el valor de $\lambda = \frac{b}{X_3}$, y con él obtenemos finalmente la tensión en el extremo más alto:

$$T = \frac{P}{2} (\lambda + b)$$

EJEMPLO. — Partiendo de la catenaria $Y = 200 \operatorname{Ch} \frac{X}{200}$ entre $X_1 = 200$; $X_2 = 160$ m., tendremos (figura 5.ª):

$$Y_1 = 200 \operatorname{Ch} 1 = 308,62 \text{ m.}$$

$$Y_2 = 200 \operatorname{Ch} 0,8 = 267,48 \text{ m.}$$

$$b = 41,14 \text{ m.}$$

Longitud de la catenaria:

$$S = 200 (\operatorname{Sh} 1 + \operatorname{Sh} 0,8) = 200 (1,1752 + 0,8881) = 412,66 \text{ m.}$$

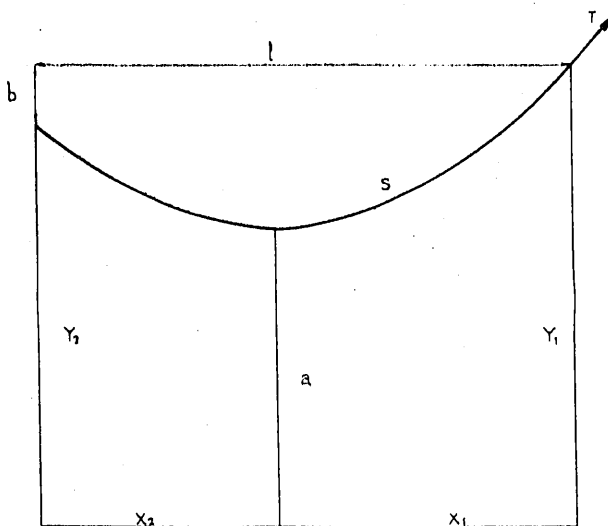


Figura 5.ª

Suponiendo un peso del cable por metro lineal de $P = 15$ Kg./m. l., la tensión en el extremo más alto vale:

$$T = P \cdot Y_1 = 4.629,30 \text{ Kg.}$$

Partiendo de los valores:

$$l = 360 \text{ m.}$$

$$b = 41,14 \text{ m.}$$

$$P = 15 \text{ Kg./m. l.}$$

$$S = 412,66 \text{ m.}$$

obtenemos, utilizando las tablas del ábaco:

$$Z = \frac{b}{S} = \frac{41,14}{412,66} = 0,09969 = 0,1;$$

$$m = \frac{l}{b} = \frac{360}{41,14} = 8,7506.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m = 8,804; \quad X = 0,0700 \\ m = 8,538; \quad X = 0,0750 \end{array} \right\}$$

$$X = 0,0714; \quad \lambda = \frac{b}{X} = \frac{41,14}{0,071} = 576,20;$$

$$T = \frac{P}{2} (\lambda + b) = \frac{15}{2} (576,20 + 41,14) = 4.630 \text{ Kg.}$$