

APLICACION DE LOS MOMENTOS DE ORDEN SUPERIOR A LA DETERMINACION DE LAS REACCIONES DE EMPOTRAMIENTO DE VIGAS Y PLACAS

por MIGUEL-ANGEL HACAR BENITEZ

Ingeniero de Caminos

Refiriéndose a un trabajo suyo anterior, publicado en nuestro número de abril de 1958, presenta el autor la aplicación de aquel estudio a varios casos prácticos sobre el tema reseñado en el epígrafe.

1. ANTECEDENTES.

En un artículo del número de abril del año 1958, en esta misma REVISTA, llegamos a establecer (figura 1.^a), que las reacciones verticales R_i y R_d y momentos M_i , M_d , de empotramiento de una viga recta de sección uniforme sometida a cargas verticales aisladas, como P_1 , P_2 , P_3 ..., o continuas, como $p = p(x)$, y pares de momentos M_1 , M_2 ..., pueden

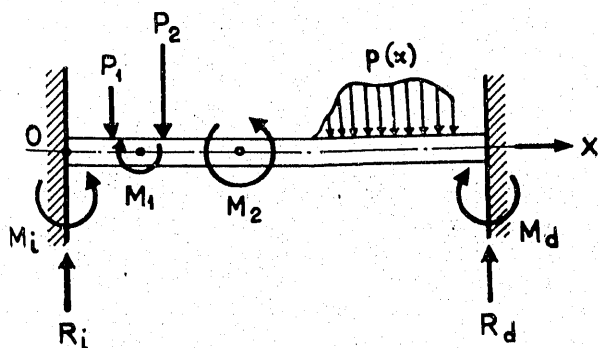


Figura 1.^a

obtenerse sin más que igualar a cero la suma de los momentos con respecto a cualquier punto del plano de orden cero (o sea, suma algebraica de las fuerzas verticales), uno (o momentos ordinarios), dos (llamados inerciales) y tres, de todas las fuerzas y momentos exteriores (aplicados y de reacción). Justificábamos que el momento de orden n de un par M es igual a n veces el momento de orden $n-1$ de una fuerza ficticia M . Así, el momento de primer orden de un par M es igual a dicho par M ; que es como se toma ordinariamente en Estática; el momento de segundo orden de M es igual a dos veces el momento de primer orden de M , o sea $2 \cdot M \cdot x$, siendo x la distancia desde el origen de momentos considerado al punto de la viga en que actúa M , etc.

2. VIGAS APOYADAS Y EMPOTRADAS.

De esta forma, la teoría de la viga hiperestática, empotrada en sus dos extremos, se asimilaba en cierto modo a la teoría de la viga isostática, apoyada en ellos, sin más que continuar anulando la suma de los momentos de segundo y tercer orden de todas las fuerzas exteriores. Al tener de esta forma cuatro ecuaciones de primer grado con cuatro incógnitas, el problema quedaba resuelto.

Si por I_0 , I_1 , I_2 , I_3 , designamos los momentos de orden 0, 1, 2 y 3 de las fuerzas y momentos aplicados con respecto al origen 0, que tomaremos por ahora en el apoyo izquierdo, ya vimos que si $i_n = I_n : l^n$ (dimensiones de una fuerza; $i = 0, 1, 2$ y 3) son los momentos que llamamos *reducidos*, resulta que:

$$R_i = i_0 - 3 i_2 + 2 i_3;$$

$$R_d = 3 i_2 - 2 i_3;$$

$$M_i = l (i_1 - 2 i_2 + i_3);$$

$$M_d = l (i_2 - i_3).$$

(Evidentemente, $i_0 = I_0 =$ suma algebraica de todas las cargas verticales aplicadas.)

La última fórmula es fácil de recordar y aplicar. Nos indica que el momento de empotramiento en *un extremo* es igual a la diferencia de los momentos *reducidos* de segundo y tercer orden de las cargas (y momentos) aplicadas con respecto al *otro extremo*, multiplicada por la luz l .

3. EJEMPLO.

Si tratamos de determinar el momento de empotramiento M_d en el apoyo derecho del, al parecer,

complicado sistema de cargas de la figura 2.^a, tendremos que inmediatamente puede escribirse:

$$M_d = l(i_2 - i_3) = \frac{1}{l} I_2 - \frac{1}{l^2} I_3; \quad l = 15 \text{ m.}$$

$$I_2 = \int_0^4 \frac{12x - 3x^2}{4} x^2 \cdot dx + \int_4^6 4x^2 \cdot dx + \int_6^{10} \left(\frac{3}{2}x - 12 \right) x^2 dx + 2 \cdot 4,5 \cdot 12 - 2 \cdot 14^2 = 38,4 + 202,666 + 262 + 108 - 392 = 219,066 \text{ t. m.}^2$$

$$I_3 = \int_0^4 \frac{12x - 3x^2}{4} x^3 dx + \int_4^6 4x^3 dx + \int_6^{10} \left(\frac{3}{2}x - 12 \right) x^3 dx + 3 \cdot 4,5 \cdot 12^2 - 2 \cdot 14^3 = 102,4 + 1040 + 2457,6 + 1944 - 5488 = 56 \text{ t. m.}^3$$

Luego:

$$M_d = 219,066 : 15 + 56 : 225 = 14,37 \text{ t. m.}$$

Lo expuesto creemos que constituye la forma más rápida y sencilla de obtener los momentos de empotramiento. No tenemos que hacer apenas dis-

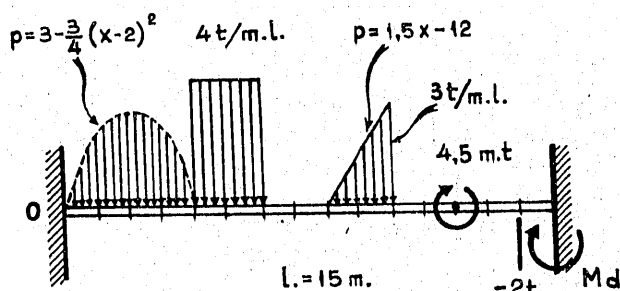


Figura 2.^a

tinción entre momentos y fuerzas aplicadas. No tenemos que acudir (una vez justificadas las fórmulas) ni a la hipótesis de Navier ni a los teoremas de Mohr para deducir las reacciones (fuerzas y momentos).

4. CARGAS SIMÉTRICAS Y ANTISIMÉTRICAS EN VIGAS EMPOTRADAS.

Vamos a aplicar ahora nuestras fórmulas a dos casos de cargas:

1.º Cargas simétricas.

2.º Cargas antisimétricas.

Ambas con respecto al centro de la viga.

Traslademos al mismo el origen de momentos y designemos por j_0, j_1, j_2 y j_3 , los momentos *reducidos* de las fuerzas aplicadas con relación a él.

CARGAS SIMÉTRICAS

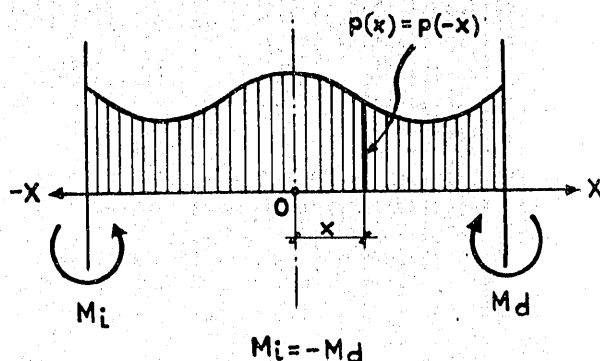


Figura 3.^a

Entonces las reacciones vienen expresadas por otras fórmulas que ya establecimos en el citado artículo anterior. Nos fijaremos en la que nos da M_d , que ahora toma la forma:

$$M_d = \frac{l}{8} (j_0 + 2j_1 - 4j_2 - 8j_3),$$

que vamos a interpretar:

1.º Si las cargas son *simétricas* (fig. 3.^a), evidentemente $j_1 = j_3 = 0$, $p(x) = p(-x)$, y queda:

$$M_d = \frac{l}{8} (j_0 - 4j_2).$$

Pero $j_0 = J_0 = P$, es la suma algebraica de todas las cargas aplicadas, y $J_2 = l^2 \cdot j_2$ el momento de segundo orden o inercial de todas las cargas con respecto al centro que podemos llamar I . Así nos queda:

$$M_d = M_i = \frac{Pl}{8} - \frac{I}{2l},$$

que ya interpretamos en nuestro artículo anterior citado. Repetimos: $\frac{Pl}{8}$ es el momento que ocasionarían las cargas si la suma de *todas* ellas estuviesen aplicadas en el centro de la viga; $\frac{I}{2l}$ es el aligeramiento o disminución del momento ocasionado por estar repartidas a lo largo de ella.

2.º Si las cargas son *antisimétricas* (fig. 4.^a) es evidente que:

$$j_0 = j_2 = 0,$$

y queda:

$$M_d = \frac{l}{8} \cdot (2j_1 - 8j_3).$$

Pero $J_1 = l \cdot j_1$ es entonces el momento de primer orden de todas las cargas y vale $Q \cdot \delta$, estando las $\pm Q$ aplicadas en los centros de gravedad de las áreas

CARGAS ANTISIMÉTRICAS

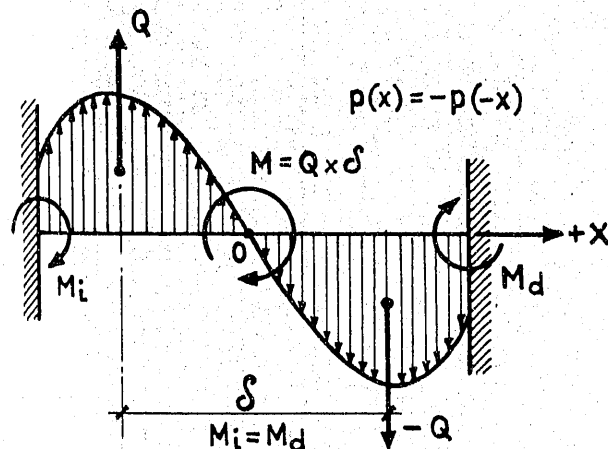


Figura 4.^a

rayadas representativas de las cargas que podemos designar por M . Por otra parte, $J_3 = L^3 j_3$ es el momento de tercer grado de las cargas respecto de 0. Luego:

$$M_d = \frac{M}{4} - \frac{J_3}{l^2} = M_i,$$

que podemos interpretar considerando que $\frac{M}{4}$ es el momento (del mismo sentido en ambos extremos) que se produciría en los empotramientos si el momento $M = Q \cdot \delta$ de todas las cargas (antisimétricas) estuviera aplicado en el centro de la viga. Por otra parte, $\frac{J_3}{l^2}$ es el aligeramiento o disminución que en los momentos de empotramiento se produce por estar las fuerzas que componen M repartidas por la viga.

5. DISTRIBUCIÓN ARBITRARIA DE CARGAS.

Si se trata de una viga con cargas cualesquiera $p = p(x)$ tomando el origen de las x en el centro de la viga como toda ley o distribución de cargas, se puede descomponer en la suma de una simétrica y en otra antisimétrica (figura 5.^a), ya que:

$$p(x) = \frac{p(x) + p(-x)}{2} + \frac{p(x) - p(-x)}{2} \text{ es una identidad.}$$

Llamando

$$S(x) = \frac{p(x) + p(-x)}{2} \text{ [simétrica, pues } S(x) = S(-x)]$$

$$A(x) = \frac{p(x) - p(-x)}{2} \text{ [antisimétrica, pues } A(x) = -A(-x)]$$

resulta:

$$p(x) = S(x) + A(x).$$

Si indicamos por

$$P = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p(x) dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} S(x) dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} S(x) dx;$$

$$I = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p(x) \cdot x^2 dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} S(x) x^2 dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} S(x) x^2 dx;$$

$$M = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p(x) \cdot x dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} A(x) \cdot x dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} A(x) \cdot x dx;$$

$$J_3 = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} p(x) x^3 dx = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} A(x) x^3 dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} A(x) \cdot x^3 dx,$$

con lo que reducimos los intervalos de integración a la mitad, resulta:

$$M_d = \left(\frac{P L}{8} - \frac{I}{2l} \right) + \left(\frac{M}{4} - \frac{J_3}{l^2} \right)$$

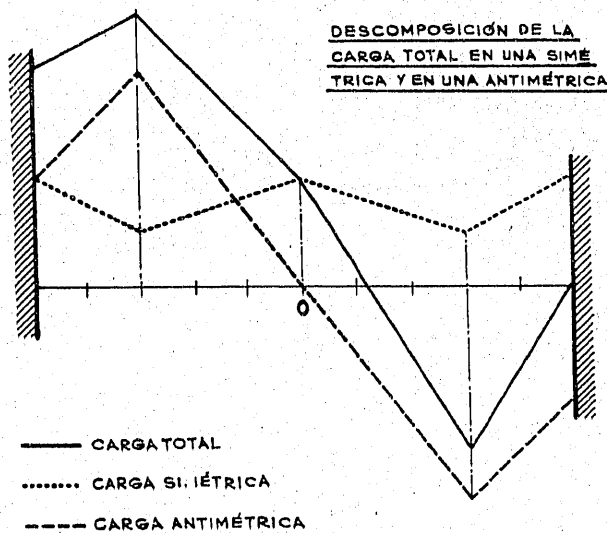


Figura 5.^a

6. VIGA APOYADA EN UN EXTREMO Y EMPOTRADA EN OTRO.

En los tratados de Resistencia de Materiales se deduce que una carga P distante b del apoyo y a del empotramiento, produce en éste un momento que vale (fig. 6.^a):

$$M_d = \frac{P}{2l^2} (2al^2 - 3a^2l + a^3).$$

Tomando $a = l - b$ y sustituyendo, resulta:

$$M_d = \frac{P}{2} \left(b - \frac{b^3}{l^2} \right).$$

Generalizando, para una distribución cualquiera de cargas:

$$M_d = \frac{I_1}{2} - \frac{I_3}{2 l^2} = \frac{l}{2} (i_1 - i_3). \quad [1]$$

La reacción vertical en el apoyo izquierdo es:

$$R_1 = \frac{P}{2} \frac{3 a^2 l - a^3}{l^3} = \frac{P}{2 l^3} [3 L (l - b)^2 - (l - b)^3].$$

Y en el caso general:

$$R_1 = I_0 - \frac{3 I_1}{2 l} + \frac{I_3}{2 l^3} = i_0 - \frac{3}{2} i_1 + \frac{1}{2} i_3. \quad [2]$$

Evidentemente:

$$R_2 = I_0 - R_1 = \frac{3 I_1}{2 l} - \frac{I_3}{2 l^3} = \frac{3}{2} i_1 - \frac{i_3}{2}. \quad [3]$$

Podemos llegar a estas fórmulas igualando a cero los momentos de orden 0, 1 y 3 de las fuerzas aplicadas y reacciones con respecto al apoyo izquierdo.

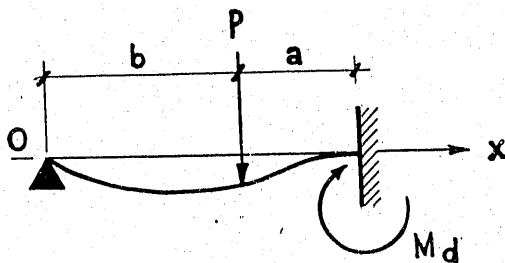


Figura 6.^a

Así obtenemos:

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + I_0 = 0; \\ I_1 + M_2 - R_2 l = 0; \\ I_3 + 3 M_2 L^2 - R_2 L^3 = 0, \end{cases}$$

de donde se deduce:

$$\begin{cases} R_1 = i_0 - \frac{3}{2} i_1 + \frac{1}{2} i_3; \\ R_2 = \frac{1}{2} (3 i_1 - i_3); \\ M_2 = \frac{l}{2} (i_1 - i_3), \end{cases}$$

que son los mismos dados por [1], [2] y [3], como queríamos probar.

A la obtención de R_2 y M_2 se llega también, como

era de esperar, considerando otra viga con las cargas dadas y las antimétricas, respecto el apoyo izquierdo, y de luz, $L = 2 l$ (fig. 7.^a).

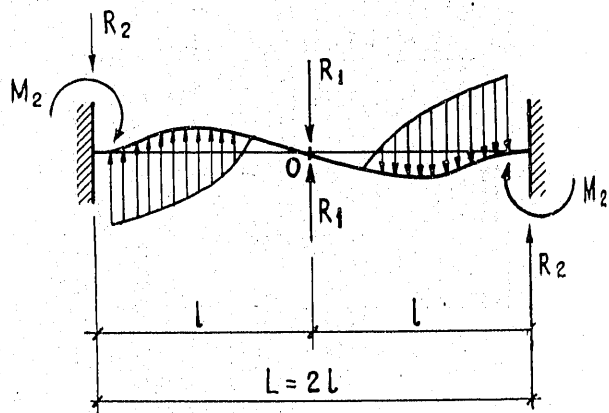


Figura 7.^a

Como en ella $j_0 = j_2 = 0$, resulta:

$$j_1 = \frac{J_1}{L} = \frac{2 I_1}{2 l} = i_1; \quad j_3 = \frac{J_3}{L^3} = \frac{2 I_3}{(2 l)^3} = \frac{i_3}{4},$$

por lo cual queda:

$$M_d = M_2 = \frac{J_1}{4} - \frac{J_3}{L^2} = \frac{2 l I_1}{4} - \frac{2 I_3 l^3}{4 l^2} = \frac{l}{2} (i_1 - i_3),$$

como se quería demostrar.

El valor de R_2 es inmediato conociendo los anteriores.

7. RESUMEN.

a) En las vigas apoyadas en sus dos extremos o isostáticas para hallar las dos reacciones, R_1 y R_d , en los apoyos, basta igualar a cero la suma de los momentos de orden cero (suma algebraica de las cargas y uno de las cargas y reacciones con respecto a cualquier punto (esto es objeto de la Estática). Es un problema isostático de dos ecuaciones de primer grado con las dos incógnitas R_1 y R_d .

b) En las vigas apoyadas en un extremo y empotradas en el otro, para obtener las reacciones R_1 y R_d en los apoyos y el momento de empotramiento R_d , basta igualar a cero la suma de los momentos de orden 0, 1 y 3 de las cargas, reacciones y momentos exteriores con respecto al apoyo simple. Es un problema de los llamados de un grado de hiperestaticidad. Se resuelve con tres ecuaciones de primer grado con las tres incógnitas.

c) En las vigas empotradas en sus dos extremos las reacciones R_1 , R_d y los momentos de empotramiento M_1 y M_d se obtienen igualando a cero la suma de los momentos de orden 0, 1, 2 y 3 de las cargas, reac-

ciones y momentos exteriores, respecto a un punto cualquiera. Es un problema de 2 grados de hiperestaticidad y se resuelve por medio de cuatro ecuaciones de primer grado con las cuatro incógnitas, R_i , R_a , M_i y M_a .

(Las "cargas" pueden ser no sólo fuerzas vertica-

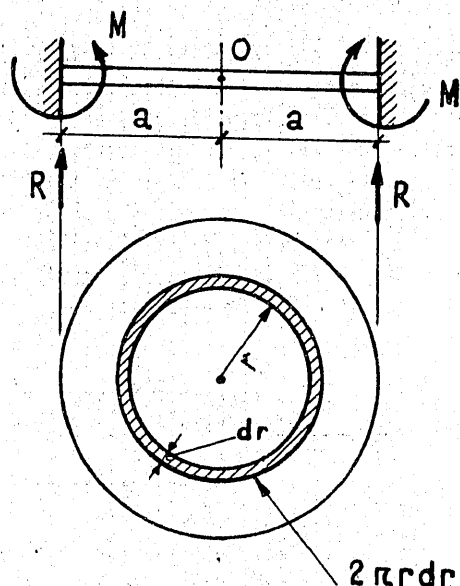


Figura 8.ª

les, sino también pares de momento dado; sus momentos se toman en la forma que ya expusimos).

8. DETERMINAR EL MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO EN EL BORDE EXTERIOR EN UNA PLACA CIRCULAR DE RADIO a CON SOBRECARGA UNIFORME p POR UNIDAD DE SUPERFICIE O CON UNA CARGA VERTICAL P EN SU CENTRO.

En el primer caso, si llamamos R y M a la reacción vertical y al momento en el contorno, ambos por unidad de longitud, resulta igualando a cero la suma de los momentos de orden 0 y 2 (pues los de orden 1 y 3 son idénticamente nulos por simetría) de las cargas y reacciones con respecto al centro de la placa, obtenemos (fig. 8.ª):

$$\begin{cases} \pi \cdot a^2 \cdot p - 2\pi a \cdot R = 0; & [1] \\ \int_0^a r^2 \cdot p(2\pi r dr) + 2 \cdot M \cdot a \cdot 2\pi a - 2\pi a \cdot R \cdot a^2 = 0. & [2] \end{cases}$$

De estas dos ecuaciones, [1] y [2] se deduce que las dos incógnitas, R y M , valen:

$$R = \frac{pa}{2} \quad [3]$$

$$M = \frac{pa^2}{8} \quad [4]$$

Aunque tendría que justificar más debidamente el poder establecer dichas ecuaciones, es indudable que constituye un procedimiento mucho más sencillo y fácil de recordar que el expuesto en los tratados usuales de Resistencia de Materiales, en los que se llega a estas fórmulas no tan rápidamente, sino después de diferentes hipótesis y consideraciones, que ocupan varias páginas.

De modo análogo, para una placa circular con la carga P en su centro, se escribe inmediatamente:

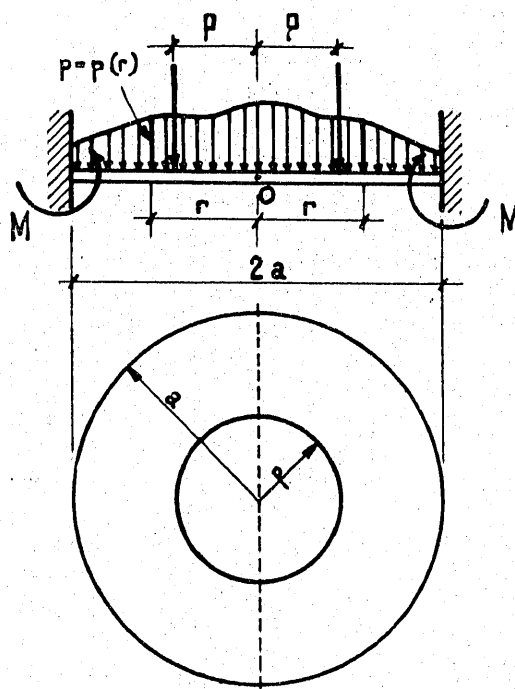
Momento de orden cero con respecto al centro, o sea, anulación de la suma (algebraica) de cargas verticales:

$$P - 2\pi \cdot a \cdot R = 0. \quad [1']$$

Los momentos de orden 1 y 3 son idénticamente nulos.

Los de segundo orden nos da:

$$2M \cdot 2\pi a^2 - 2\pi a R \cdot a^2 = 0. \quad [2']$$



$$P = \int_0^a 2\pi r p(r) dr. \quad \rho = \sqrt{\frac{J_2}{p}}$$

$$J_2 = \int_0^a 2\pi r^3 p(r) dr. \quad M = \frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)$$

Figura 9.ª

Entre [1'] y [2'] se deduce:

$$\boxed{R = \frac{P}{2\pi a}} \quad [3']$$

$$\boxed{M = \frac{P}{4\pi}} \quad [4']$$

9. MOMENTO DE EMPOTRAMIENTO DE UNA PLACA CIRCULAR CON DISTRIBUCIÓN DE CARGAS CON SIMETRÍA RADIAL (fig. 9.^a).

Si esta distribución es según la ley $p = p(r)$, ($0 \leq r \leq a$), operando como antes hemos hecho, obtenemos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \int_0^a p(r) 2\pi r dr - 2\pi a R = 0; & [1''] \\ 2M \cdot 2\pi a + \int_0^a p(r) \cdot r^2 \cdot 2\pi r dr - 2\pi a R \cdot a^2 = 0, & [2''] \end{cases}$$

de las que se deduce:

$$\boxed{R = \frac{P}{2\pi a}} \quad [3'']$$

$$\boxed{M = \frac{P}{4\pi} - \frac{J_2}{4\pi a^2}} \quad [4'']$$

en que:

$$P = I_0 = \int_0^a 2\pi r p(r) dr,$$

es la suma de todas las cargas, y

$$J_2 = \int_0^a p(r) 2\pi r^3 dr,$$

el momento de inercia polar de las mismas con respecto al centro.

Comparando las fórmulas [4'] y [4''], se observa que en ésta, el momento M es el mismo que el producido como si toda la carga estuviese concentrada en el centro de la placa, disminuido en $\frac{J_2}{4\pi a^2}$, que representa el *aligeramiento* del momento ocasionado, por estar *extendidas* las cargas.

Si por $\rho = \sqrt{J_2/P}$ indicamos el radio de inercia de las cargas con respecto al centro, resulta inmediatamente que la distribución de cargas $p = p(r)$ es equivalente, o sea produce las mismas reacciones en el empotramiento, que si *toda* la carga estuviese distribuída de manera uniforme sobre la circunferencia de radio ρ . Esto es análogo a lo que obtuvimos para las vigas, en la fórmula [6] del artículo anterior citado, del mes de abril de 1958, de esta REVISTA.

Entonces:

$$M = \frac{P}{4\pi} - \frac{P\rho^2}{4\pi a^2} = \boxed{\frac{P}{4\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{a^2}\right)} \quad [1''']$$

De esta fórmula son casos particulares: La [4], haciendo $p = \text{constante} = \frac{P}{\pi a^2}$, con lo que $\rho^2 = a^2/2$:

$$M = \frac{\pi a^2 p}{4\pi} \left(1 - \frac{a^2}{2a^2}\right) = \frac{p a^2}{8}.$$

La [4'], haciendo $\rho = 0$:

$$M = \frac{P}{4\pi}.$$