

ESTUDIO DE LAS SOBREACELERACIONES

GENERALIZACION DE ALGUNAS CUESTIONES

Por MIGUEL-ANGEL HACAR BENITEZ
Ingeniero de Caminos.

Se estudian las sobreaceleraciones del movimiento del punto en el caso general, indicando su importancia cuando las velocidades son grandes o el radio de curvatura de la trayectoria varía bruscamente. Esta cuestión tiene importancia para el confort y la seguridad en la marcha de los vehículos. Al estudiar el movimiento plano se obtienen de una manera sistemática los centros instantáneos de rotación, aceleración y sobreaceleraciones. Por último, indica una extensión de la fórmulas de Frenet.

El estudio de las velocidades y las aceleraciones, tanto del punto como del sólido, son problemas que preocupan fundamentalmente a la Mecánica. Las aceleraciones están íntimamente ligadas con las fuerzas. Establecemos, al definir el concepto de masa, proporcionalidad entre las fuerzas y las aceleraciones, y haciendo intervenir las fuerzas de inercia, definimos por el principio de D'Alembert las ecuaciones fundamentales de la Dinámica del punto. Deducimos de ellas, por medio de la energía cinética T y de la potencial V y estableciendo unas coordenadas generalizadas de posición q_i y de impulso p_i , las ecuaciones de Lagrange de un sistema.

Todo problema dinámico queda definido cuando en cada instante se conoce la aceleración de cualquier punto. Sabiendo, por ejemplo, las condiciones iniciales (posición y velocidad), por una integración con respecto al tiempo se determinan las velocidades, e. integrando éstas, las coordenadas de posición.

En varias cuestiones reales interesan no sólo las aceleraciones o las fuerzas actuantes, sino cómo varián las mismas a lo largo del tiempo. Es decir, cómo se van presentando dichas fuerzas. Por ejemplo: en vehículos para viajar personas se viene admitiendo que existe *comfort* en la marcha (*) si la aceleración a que se les somete no pasa de 0,6 m./seg.². Se admite el doble y aun más en vehículos de frenos potentes y se puede llegar a bastante más si los viajeros toman disposiciones especiales de sujeción a los asientos, etc.

Lo que es evidente es que cuanto más lentamente se presenten estas aceleraciones (que originan fuerzas), más fácil será preaverse contra ellas. De aquí la importancia del estudio de las sobreaceleraciones.

En lo que sigue vamos a determinar:

1.º La sobreaceleración del movimiento de un punto que describe una trayectoria cualquiera, que, en general, será una curva alabeada. Referiremos todo al triángulo intrínseco y determinaremos las componentes de la sobreaceleración sobre la tangente, la normal y

(*) Ver K. Pflanz: "Achstdruck und Fahrgeschwindigkeit in Gleisbogen". Schweizerische Beuteitung, noviembre 1947, página 611.

la binormal a la curva. En realidad viene a ser una generalización de las conocidas fórmulas de las componentes del vector aceleración \vec{j} sobre la tangente, la normal y la binormal, que, como sabemos, valen, respectivamente:

$$j_t = \frac{ds}{dt}; \quad j_u = \frac{V^2}{R}; \quad j_b = 0,$$

siendo s el elemento de arco; V , el módulo de la velocidad, y R , el radio de curvatura. El ser $j_b = 0$ nos indica que el vector \vec{j} está en el plano osculador a la curva en el punto considerado.

2.º Los centros de sobreaceleraciones en un movimiento plano.— Demostraremos que en cada instante es único (como lo es en el centro instantáneo de rotación y el centro de aceleraciones) y examinaremos la distribución de las sobreaceleraciones de todo el sólido alrededor de dicho punto.

Movimiento de un punto a lo largo de una línea (figura 1.ª).

La posición de un punto móvil M a lo largo de una curva C' queda definida en cada instante por el vector posición $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Si tomamos M como origen de longitud de arcos a lo largo de la curva, por la teoría de curvas alabeadas sabemos que la posición de un punto M' próximo a M queda definida por el sector $\overrightarrow{OM'} = \vec{r}(S)$,

$$\text{que } \vec{r}(S) = \vec{r}(0) + S \vec{t} + \frac{s^2}{2!} \frac{1}{R} \vec{n} + \frac{s^3}{3!} \vec{b},$$

$$\left[-\frac{1}{R^2} \vec{t} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) \vec{n} + \frac{1}{R T} \vec{b} \right] + \dots$$

en que \vec{t} , \vec{n} , \vec{b} son vectores unitarios sobre la tangente, la normal y la binormal en el punto considerado (formando, en este orden, un triángulo de generación positiva); R y T los radios de curvatura y torsión, respectivamente.

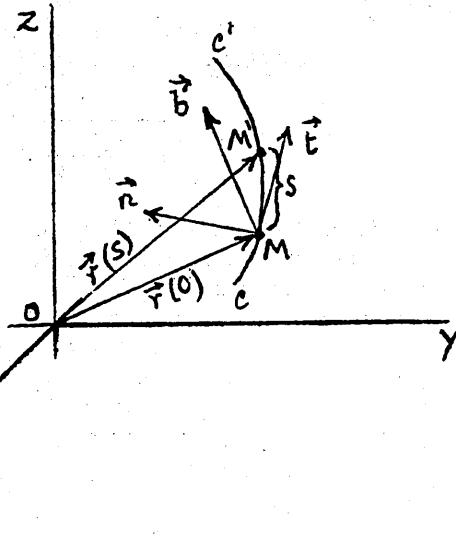


Figura 1.*

Inmediatamente se deduce para $s = 0$, o sea en el punto M , que:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t} \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{R} \vec{n} \quad \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = -\frac{1}{R^2} \vec{t} + \\ + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) \vec{n} + \frac{1}{R^2} \vec{b}.$$

Si por \bar{v} , \bar{j} , $\bar{s}\bar{j}$ designamos los sectores velocidad, aceleración y sobreaceleración (derivada ésta de la

aceleración con respecto al tiempo), al ser las derivadas sucesivas del vector de posición \vec{r} tendremos:

$$\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = |\bar{v}| \cdot \vec{t} \quad [1]$$

$$\bar{j} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} = |\bar{v}|^2 \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} + \\ + j_t \vec{t} = \frac{|\bar{v}|^2}{R} \vec{n} + j_t \vec{t} \quad [2]$$

$$\bar{s}\bar{j} = \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} \left(\frac{ds}{dt} \right)^3 + 3 \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} + \\ + \frac{d^3s}{dt^3} \frac{d\vec{r}}{ds} = |\bar{v}|^3 \left[-\frac{1}{R^2} \vec{t} + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) \vec{n} + \frac{1}{R^2} \vec{b} \right] + \\ + 3 |\bar{v}| j_t \frac{1}{R} \vec{n} + s j_t \cdot \vec{t} = \left[s j_t - \frac{|\bar{v}|^3}{R^2} \right] \vec{t} + \\ + \left[\frac{3 |\bar{v}| j_t}{R} + |\bar{v}|^3 \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) \right] \vec{n} + \frac{|\bar{v}|^3}{R^2} \cdot \vec{b}. \quad [3]$$

Examinemos estas fórmulas:

La [1] nos indica que el vector velocidad es tangente a la curva.

La [2], que la aceleración tiene una componente normal a la curva (centrípeta) que vale $\frac{V^2}{R}$ y otra tangencial ($j_t = \frac{d^2s}{dt^2}$).

La [3], que la sobreaceleración $\bar{s}\bar{j}$ tiene, en ge-

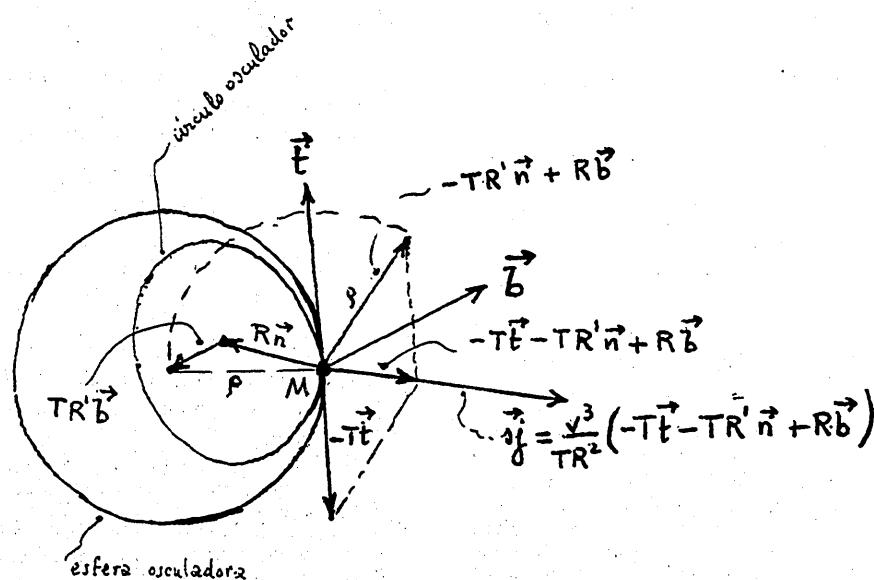


Figura 2.*

neral, componentes sobre la tangente, la normal y la binormal ($s j_t = \frac{d^3 s}{dt^3}$):

Examinemos algunos casos particulares:

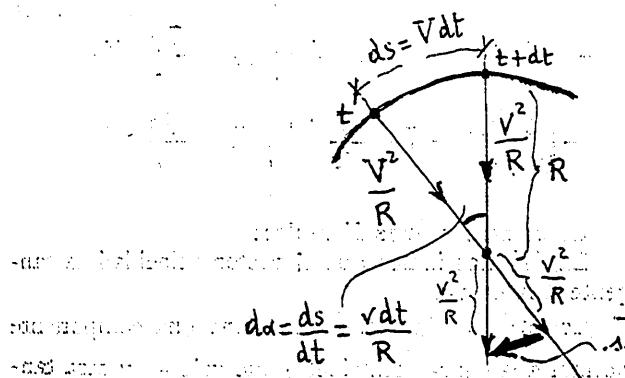
Si el módulo de la velocidad es constante:

$$j_t = s j_t = 0 \quad \text{Si} \quad R' = \frac{dR}{ds},$$

$$\text{resulta: } \overline{s j} = \frac{V^3}{TR^2} [-T\bar{t} - T.R'\bar{n} + R\bar{b}] \dots [4]$$

$$\text{cuyo módulo es: } |\overline{s j}| = \frac{V^3}{TR^2} \sqrt{R^2 + T^2 R^2 + T^2}. \quad [5]$$

Veamos ahora la relación que este vector guarda con el radio y centro de la esfera osculatrix a la curva.



móvil que marche a velocidad constante V (su módulo) vale:

$$\begin{aligned} \frac{V^3}{TR^2} \sqrt{R^2 + T^2 R^2 + T^2} &= \frac{V^3}{TR^2} \sqrt{\rho^2 + T^2} = \\ &= \frac{V^3}{R^2} \sqrt{1 + \frac{\rho^2 R'^2}{\rho^2 - R^2}}. \end{aligned}$$

Es decir, que depende de R , R' y T ó de R , R' y ρ .

Para una curva o trayectoria dada es proporcional al cubo de la velocidad, o sea a V^3 .

2.a. El vector sobreaceleración se obtiene en posición y magnitud: girando 90 grados el radio de la esfera oculadora alrededor de la tangente a la trayectoria en sentido positivo (o sea de \bar{n} hacia \bar{b}), componiéndola con un vector de módulo T sobre la tangente y en sentido negativo ($-T\bar{t}$), y multiplicando la resultante por $\frac{V^3}{TR^2}$ (fig. 2.a).

Si la trayectoria es plana, T toma un valor infinito, y si, como antes, suponemos $|V| = \text{constante}$:

$$\overline{s j} = -\frac{V^3}{R^2} \bar{t} + V^3 \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) \bar{n} = -\frac{V^3}{R^2} (-\bar{t} - R'\bar{n}).$$

$$\overline{s j} dt = -\frac{V^2}{R} d\alpha = -\frac{V^2}{R} \frac{v dt}{R} = \frac{V^3}{R^2} dt$$

Figura 3.a

La posición de éste (*) viene dada por el vector $R\bar{n} + T.R'\bar{b}$ [4'] a partir del punto de la curva (figura 2.a).

Su radio, que designaremos por ρ , será:

$$\rho = \sqrt{R^2 + T^2 R^2}. \quad [5']$$

Comparando [4] con [4'] y [5] con [5'], se deducen las siguientes propiedades:

1.a El módulo del vector sobreaceleración de un

(*) Véase Sexto Cámara: *Geometría Analítica*, 3.^a ed., página 699, ó Dirk J. Struik: *Geometría diferencial clásica*. Ed. Eguilar, 1955, pág. 30.

Estos autores toman para T signo positivo cuando al avanzar el punto sobre la curva la binormal gira en sentido positivo.

Otros, como por ejemplo, V. Inglanda: *Problemas geométricos*, Ed. Dossat, S. A., 1948, pág. 435, ó como R. Ericard en *Le calcul vectoriel*, Collec. Armand Colin, toman el signo de T al revés que los anteriores. Nosotros seguimos el primer sistema, que tiene la ventaja de conservar la antisimetría de las fórmulas de Frenet. Hay, por tanto, que observar que en las expresiones de la torsión que dan los otros autores hay que cambiar a ésta de signo.

Si, además, el radio de curvatura R es constante o varía muy poco, $R' = 0$, y queda $\overline{s j} = -\frac{V^3}{R^2} \bar{t}$, lo cual se puede evidenciar inmediatamente, como se indica en la figura 3.a.

Si la curvatura varía uniformemente

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) = C(*)$$

$$\overline{s j} = V^3 \left(-\frac{1}{R^2} \bar{t} + C\bar{n} \right).$$

Veamos, como ejemplo, el caso de un móvil que circule con velocidad constante de 120 Km./hora en la entrada de una curva circular de radio $R = 500$ m. cuan-

(*) Cuando la curvatura κ y la torsión τ de los puntos de una curva cumplen una relación lineal de coeficientes constantes $m\kappa + n\tau + p = 0$, todos ellos no nulos, la curva es de las llamadas de Bertrand, que tienen propiedades muy interesantes; así, dos curvas de Bertrand *asociadas* tienen la misma normal principal; siendo constante la longitud de ella comprendida entre puntos correspondientes de ambas curvas (ancho de vía en ferrocarril o de calzada en carretera!); el ángulo de las tangentes en dichas curvas es también constante. Si

do va por la transición o curva de acuerdo de tipo clotoide o parábola cónica de 100 m. de longitud.

Como a lo largo de ella la curvatura varía uniformemente:

$$C = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{500} : 100 = 0,00002 \text{ m}^{-2},$$

es la constante, al ser $V = 120 : 3,6 = 33,33 \text{ m./segundo}$ en las proximidades de la parte circular in-

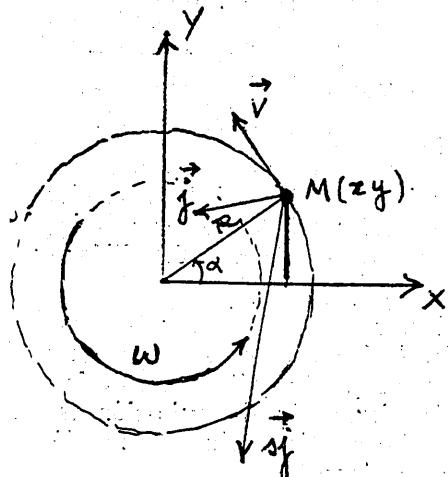


Figura 4.

mediatamente antes de entrar en ella la sobreaceleración, valdrá:

$$\bar{s}j = 33,33^3 \left(-\frac{1}{500^2} \bar{t} + \frac{1}{50000} \bar{n} \right) = -0,148 \bar{t} + 0,741 \bar{n}.$$

Al entrar en la parte circular, por ser en ella R constante, sólo queda de $\bar{s}j$ la componente de $-0,148$ metros seg.⁻³ sobre la tangente.

Movimiento plano (fig. 4.a).

Porque nos va a ser luego necesario, determinemos las componentes sobre los ejes $o x$, $o y$ de un movimiento de rotación alrededor del origen; sea $\alpha = \widehat{XOM}$ el ángulo que OM , recta que une al origen con el punto $M(x,y)$, forma con el eje OX (*).

Llamaremos $\omega = \omega(t)$ a la velocidad instantánea

$\dot{\rho} = 0$ se obtienen las hélices en general o curvas de igual pendiente. En ellas la razón de su curvatura a su torsión es constante. Si $m = 0$, obtenemos curvas de torsión constante (si $m = \dot{\rho} = 0 \Rightarrow \tau = 0$ y la curva es plana). Si $n = 0$, la curva es de curvatura constante (si además es plana, $\tau = 0$ se trata de circunferencias).

Si la curvatura κ y la torsión τ son constantes, se trata de una hélice circular situada en un cilindro de radio $\frac{K}{K^2 + \tau^2}$ y de pendiente τ/K . (Véanse obras citadas de Ingla, capítulo XVII, y Struik, capítulo I).

(*) Véase R. Bricard: *Cinematique et Mécanismes*, Collection Armand Colin, 1953, pág. 32.

de rotación, en general variable en el tiempo t , y

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt}; \quad \ddot{\omega} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \text{etc.}$$

Evidentemente, $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$.

Los vectores velocidad \bar{V} , aceleración \bar{j} y sobreaceleración $\bar{s}j$ se definirán inmediatamente por sus proyecciones sobre los ejes, por derivaciones sucesivas:

$$\begin{cases} X = R \cos \alpha; \\ y = R \sin \alpha; \end{cases} \quad [6]$$

$$\begin{cases} v_x = -R \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} = -y \omega; \\ v_y = R \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt} = x \omega; \end{cases} \quad [7]$$

$$\begin{cases} j_x = -x \omega^2 - y \dot{\omega}; \\ j_y = -y \omega^2 + x \dot{\omega}; \end{cases} \quad [8]$$

$$\begin{cases} s j_x = -3x \omega \dot{\omega} + \omega^3 y - \ddot{\omega} y; \\ s j_y = -3y \omega \dot{\omega} - \omega^3 x + \ddot{\omega} x. \end{cases} \quad [9]$$

y de modo análogo:

Sea ahora un movimiento plano cualquiera en el que OX , OY son los ejes coordenados fijos, y ox , oy otros móviles que son sólidos al cuerpo en movimiento. Definiremos éste dando para cada instante t las coordenadas (x_0, y_0) de o , y el ángulo α que forman OX y ox . Por tanto:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0(t); & y_0 &= y_0(t); & \alpha &= \alpha(t); \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \omega; & \frac{d^2\alpha}{dt^2} &= \dot{\omega}; & \frac{d^3\alpha}{dt^3} &= \ddot{\omega}. \end{aligned}$$

Las coordenadas de M (cuyas derivadas sucesivas respecto al tiempo son velocidades, aceleraciones y sobreaceleraciones) están relacionadas de la siguiente forma (fig. 5.a):

$$\begin{cases} X = x_0 + x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ Y = y_0 + x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad [6']$$

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{dx_0}{dt} - w \cdot x \sin \alpha - w y \cos \alpha = \frac{dx_0}{dt} - w \cdot Y; \\ \dot{Y} = \frac{dy_0}{dt} + w \cdot x \cos \alpha - w y \sin \alpha = \frac{dy_0}{dt} + w \cdot X. \end{cases} \quad [7']$$

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{d^2x_0}{dt^2} - \dot{w}(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - w^2(x \cos \alpha - y \sin \alpha) = \frac{d^2x_0}{dt^2} - \dot{w}(Y - y_0) - w^2(X - x_0); \\ \ddot{Y} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \dot{w}(x \cos \alpha - y \sin \alpha) - w^2(x \sin \alpha + y \cos \alpha) = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \dot{w}(X - x_0) - w^2(Y - y_0). \end{cases} \quad [8']$$

$$\begin{cases} \ddot{X} = \frac{d^2x_0}{dt^2} - \dot{w}(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - w^2(x \cos \alpha - y \sin \alpha) = \frac{d^2x_0}{dt^2} - \dot{w}(Y - y_0) - w^2(X - x_0); \\ \ddot{Y} = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \dot{w}(x \cos \alpha - y \sin \alpha) - w^2(x \sin \alpha + y \cos \alpha) = \frac{d^2y_0}{dt^2} + \dot{w}(X - x_0) - w^2(Y - y_0). \end{cases} \quad [8']$$

Derivando de nuevo, obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= \frac{d^3 x_0}{dt^3} - \ddot{w}(x \sin \alpha + y \cos \alpha) - 3w\dot{w}(x \cos \alpha - \\ &- y \sin \alpha) + w^3(x \sin \alpha + y \cos \alpha) = \frac{d^3 x_0}{dt^3} - \\ &- \ddot{w}(Y - y_0) - 3w\dot{w}(X - x_0) + w^3(Y - y_0); \\ \ddot{Y} &= \frac{d^3 y_0}{dt^3} + \ddot{w}(x \cos \alpha - y \sin \alpha) - 3w\dot{w}(x \sin \alpha + \\ &+ y \cos \alpha) - w^3(x \cos \alpha - y \sin \alpha) = \frac{d^3 y_0}{dt^3} + \\ &+ \ddot{w}(X - x_0) - 3w\dot{w}(Y - y_0) - w^3(X - x_0). \end{aligned} \quad [9']$$

Haciendo cero los primeros miembros de [7'], obtenemos los puntos de velocidad instantánea nula. Para cada valor de t este punto es único, ya que las dos ecuaciones son de primer grado en x , y . Es el

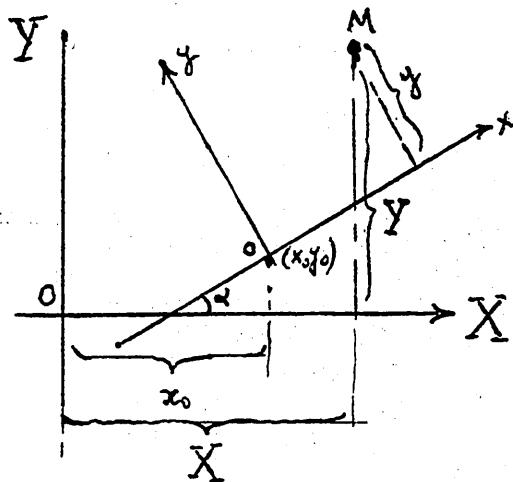


Figura 5.

centro instantáneo de rotación, como ya sabíamos. En los ejes móviles tiene por coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{w} \sin \alpha \frac{d x_0}{dt} + \cos \alpha \frac{d y_0}{dt}; \\ y &= \frac{1}{w} \cos \alpha \frac{d x_0}{dt} - \sin \alpha \frac{d y_0}{dt}. \end{aligned}$$

Al variar t se obtiene la polar móvil. Sustituyendo estos valores en [6'], se obtienen las ecuaciones de la polar fija.

Del mismo modo, haciendo nulos los primeros miembros de [8'], obtenemos los puntos de aceleración nula. En cada instante, o sea para cada valor de t , este punto es también único por ser lineales las dos ecuaciones en x e y . Es el centro de las aceleraciones.

Supongamos que sus coordenadas sean (X_1, Y_1) . Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2 x_0}{dt^2} - \dot{w}(Y_1 - y_0) - w^2(x_1 - x_0); \\ 0 &= \frac{d^2 y_0}{dt^2} + \dot{w}(X_1 - x_0) - w^2(Y_1 - y_0). \end{aligned} \quad [8'']$$

Restando [8'] y [8''], queda:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -\dot{w}(Y - Y_1) - w^2(X - X_1); \\ \ddot{Y} &= \dot{w}(X - X_1) - w^2(Y - Y_1). \end{aligned} \quad [8''']$$

Comparando [8''] con [8], se ve inmediatamente que todas las aceleraciones del cuerpo se distribuyen alrededor del centro (X_1, Y_1) de aceleraciones como si girasen alrededor del mismo con velocidad de rotación instantánea w igual a la del sólido (su derivada respecto al tiempo es \dot{w}).

Considerando ahora los puntos de sobreaceleración nula. Al igualar a cero los segundos miembros de [9'], se ve que hay sólo un centro instantáneo de sobreaceleraciones. Su determinación es inmediata, como era el centro instantáneo de rotación y el centro de aceleraciones.

Cómo se distribuyen las sobreaceleraciones del cuerpo con relación al centro de sobreaceleraciones?

La contestación es sumamente sencilla:

Si (X_2, Y_2) son las coordenadas del mismo, por [9'] tendremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^3 x_0}{dt^3} \ddot{w}(Y_2 - y_0) - 3w\dot{w}(X_2 - x_0) + w^3(Y_2 - y_0); \\ 0 &= \frac{d^3 y_0}{dt^3} + \ddot{w}(X_2 - x_0) - 3w\dot{w}(Y_2 - y_0) - w^3(X_2 - x_0). \end{aligned} \quad [9'']$$

Restando [9'] y [9''], queda:

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -3(X - X_2)w\dot{w} + w^3(Y - Y_2) - \ddot{w}(Y - Y_2); \\ \ddot{Y} &= -3(Y - Y_2)w\dot{w} - w^3(X - X_2) + \ddot{w}(X - X_2). \end{aligned} \quad [9''']$$

Poniendo el sistema [9] a la vista de éste, se deduce inmediatamente que las sobreaceleraciones se distribuyen alrededor de su centro como si se tratase de un movimiento de rotación w función del tiempo (de derivadas \dot{w} y \ddot{w}).

Circunferencia de las inflexiones: generalización.

Despejando del sistema [8''] los valores de X_1 e Y_1 obtenemos el centro instantáneo de aceleraciones, que, en general, dependerá de w y de \dot{w} . Si en un instante damos w y hacemos variar \dot{w} , lo que es equiva-

lente a eliminar w en las dos ecuaciones [8"], para lo cual basta despejar w en cada una de ellas e igualar, obtenemos:

$$\frac{\frac{d^2 x_0}{dt^2} - w^2 (X - x_0)}{Y - y_0} + \frac{\frac{d^2 y_0}{dt^2} - w^2 (Y - y_0)}{X - x_0} = 0,$$

o sea:

$$w^2 [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] + \frac{d^2 x_0}{dt^2} (x - x_0) + \\ + \frac{d^2 y_0}{dt^2} (y - y_0) = 0.$$

Si tomamos como origen $x_0 = 0, y_0 = 0$, el centro instantáneo de rotación y como ejes la tangente y la normal a las polares fijas y móvil en estas ecuaciones:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0; \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \omega^2,$$

y queda:

$$x^2 + y^2 - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} Y = 0,$$

que es el círculo de las inflexiones.

Del mismo modo, si en el sistema [9"] eliminamos \ddot{w} suponiendo w y \dot{w} constantes, obtenemos la ecuación:

$$0 = \frac{\frac{d^3 x_0}{dt^3} - 3w\dot{w}(X - x_0) + w^3(Y - y_0)}{Y - y_0} + \\ + \frac{\frac{d^3 y_0}{dt^3} - 3w\dot{w}(Y - y_0) - w^3(X - x_0)}{X - x_0},$$

en la que si efectuamos operaciones, resulta:

$$3w\dot{w}[(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2] + \frac{d^3 x_0}{dt^3} (X - x_0) + \\ + \frac{d^3 y_0}{dt^3} (Y - y_0) = 0,$$

lo que nos prueba que también es una circunferencia. Lo mismo que la de las inflexiones era el lugar de los centros instantáneos de aceleraciones para w dada, pero w cualquiera, este círculo será el lugar geométrico de los centros de sobreaceleraciones para w y \dot{w} dados, pero w variable, en el instante que se considere.

Generalización de las fórmulas de Frenet.

Las clásicas de las curvas alabeadas dan las derivadas de los vectores unitarios $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ del triángulo intrínseco con respecto al arco de curva s . Si por $K = \frac{1}{R} \rightarrow \tau = \frac{1}{T}$ designamos la curvatura y la torsión, y por κ' y τ' sus derivadas, también con respecto a s , sabemos que:

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = \frac{1}{R} = K\bar{n};$$

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{1}{R}\bar{t} + \frac{1}{T}\bar{b} = -K\bar{t} + \tau\bar{b};$$

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{1}{T}\bar{n} = -\tau\bar{n},$$

que simbólicamente podemos escribir con auxilio de una matriz antisimétrica en la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccc} \bar{t} & \bar{n} & \bar{b} \\ \hline \frac{d\bar{t}}{ds^2} & 0 & K & 0 \\ \frac{d\bar{n}}{ds} & -K & 0 & \tau \\ \frac{d\bar{b}}{ds} & 0 & -\tau & 0 \end{array}.$$

Derivemos de nuevo estos vectores con respecto a s :

$$\frac{d^2\bar{t}}{ds^2} = \left(\frac{1}{R}\right)' \bar{n} + \frac{1}{R} \left(-\frac{1}{R}\bar{t} + \frac{1}{T}\bar{b}\right) = - \\ -\frac{1}{R^2}\bar{t} + \frac{R'}{R^2}\bar{n} + \frac{1}{TR}\bar{b};$$

$$\frac{d^2\bar{n}}{ds^2} = -\left(\frac{1}{R}\right)' \bar{t} - \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R}\bar{n} + \left(\frac{1}{T}\right)' \bar{b} - \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{R}\bar{n} = - \\ -\frac{R'}{R^2}\bar{t} - \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2}\right)\bar{n} - \frac{T'}{T^2}\bar{b};$$

$$\frac{d^2\bar{b}}{ds^2} = -\left(\frac{1}{T}\right)' \bar{n} - \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{R}\bar{t} + \frac{1}{T}\bar{b}\right) = \\ = \frac{1}{TR}\bar{t} - \frac{T'}{T^2}\bar{n} - \frac{1}{T^2}\bar{b}.$$

Y como evidentemente

$$\frac{1}{R^2} = K^2 \rightarrow \frac{1}{T^2} = \tau^2 \rightarrow -\frac{R'}{R^2} = K' \rightarrow -\frac{T'}{T^2} = \tau',$$

resulta que las derivadas segundas de los vectores $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$, respecto de s pueden escribirse en forma sim-

bólica con auxilio de una matriz simétrica, en la forma siguiente:

$$\begin{array}{c|ccc} & \bar{t} & \bar{n} & \bar{b} \\ \hline \frac{d^2 \bar{t}}{ds^2} & -K^2 & K' & K\tau \\ \frac{d\bar{n}}{ds} & K' & -K^2 - \tau^2 & \tau^2 \\ \frac{d^2 \bar{b}}{ds^2} & K\tau & \tau' & -\tau^2 \end{array}$$

Una generalización o forma diferente de las fórmulas de Frenet útil para el estudio de un punto sobre una superficie es, considerando, no los vectores \bar{t} , \bar{n} , \bar{b} , sino otros tres también unitarios y trirrectangulares que designaremos por \bar{t} , \bar{N} , \bar{u} .

De ellos, \bar{t} es el mismo que antes, \bar{N} es normal a la superficie y \bar{u} es el producto vectorial $\bar{u} = \bar{N} \wedge \bar{t}$.

Si por K_n , K_g designamos la curvatura normal y geodésica, y por τ_g la torsión geodésica, respectivamente, como (*):

$$K_n = \frac{-d\bar{r} \cdot d\bar{N}}{ds^2}, \quad K_g = \bar{u} \cdot \frac{d\bar{N}}{ds}, \quad \tau_g = \bar{u} \cdot \frac{d\bar{N}}{ds}.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{t}}{ds} &= K_n \bar{N} + K_g \bar{u}; \\ \frac{d\bar{N}}{ds} &= -K_n \bar{t} + \tau_g \bar{u}; \\ \frac{d\bar{u}}{ds} &= -K_g \bar{t} - \tau_g \bar{N}; \end{aligned} \right\}$$

o simbólicamente:
$$\begin{array}{c|ccc} & \bar{t} & \bar{N} & \bar{u} \\ \hline \frac{d\bar{t}}{ds} & 0 & K_n & K_g \\ \frac{d\bar{N}}{ds} & -K_n & 0 & \tau_g \\ \frac{d\bar{u}}{ds} & -K_g & -\tau_g & 0 \end{array}$$

(Torsión geodésica τ_g de una curva C contenida en una superficie S , en un punto M , es la torsión de la geodésica de S que pasando por M tiene la misma dirección de la curva en M .)

Otras cuestiones.

Es evidente que existen otros problemas en que intervienen las sobreaceleraciones, y que trataremos de desarrollar en otra ocasión. Así, por ejemplo, en la composición de movimientos del punto, ¿cómo se componen las sobreaceleraciones? Es fácil llegar a obtenerlas de modo análogo a como se componen las velocidades (teorema de Roberval) y las aceleraciones (teorema de Coriolis).

Es también interesante analizar cómo se distribuyen las velocidades, las aceleraciones y las sobreaceleraciones instantáneas de los distintos puntos de un sólido rígido. La distribución de las velocidades es clásica y aparece estudiada en casi todos los tratados

de Mecánica (eje del movimiento helicoidal equivalente, etc.). La de las aceleraciones y sobreaceleraciones no es tan corriente y, sin duda, es importante, pues del mismo se deducirán las fuerzas y variaciones de las fuerzas de inercia.

¿Qué puntos de un sólido tienen en un instante dado una velocidad de módulo dado V_0 ? Fácil es probar que están en la superficie de un cilindro concéntrico con el eje del movimiento helicoidal equivalente.

¿Qué puntos de un sólido tienen el mismo valor absoluto de aceleración j_0 o de sobreaceleración sj_0 ?

En el movimiento plano y a la vista de las ecuaciones [7], [8''] y [9''], podemos decir:

1.º Puntos de velocidad de valor absoluto v_0 están en una circunferencia de centro en el centro instantáneo de rotación y radio $v_0 : \omega$.

2.º Puntos de aceleración de valor absoluto j_0 están en una circunferencia con centro en el de aceleramiento y de radio $j_0 : \sqrt{\dot{w}^2 + w^4}$.

3.º Puntos de sobreaceleración de valor absoluto sj_0 están en una circunferencia con centro en el de sobreaceleraciones y cuyo radio es:

$$sj_0 : \sqrt{\ddot{w}^2 - 2\dot{w}^2 \dot{w} + 9w^2 \dot{w}^2 + w^4}.$$

(*) Véase J. Echarte Reula: "Las formas diferenciales en la teoría de superficies. Formas relativas a la torsión geodésica". *Gaceta Matemática*, 1960, págs. 209 a 216.