CALCULO DE PRESAS BOVEDAS MEDIANTE EMPLEO DE ORDENADORES ELECTRONICOS

Por ALFONSO ALVAREZ MARTINEZ
y JOSE A. BAZTAN DE GRANDA
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

En el presente trabajo se da a conocer el procedimiento seguido para aplicar los ordenadores electrónicos al cálculo de presas bóvedas y se reseñan los resultados obtenidos en algunas presas calculadas por este procedimiento. Se hace también una revisión del estudio elástico de bóvedas. Por la extensión del trabajo se dividirá en tres partes, publicándose a continuación la primera.

PREÁMBULO

En la Sección de Estudios Hidráulicos del Departamento de Construcción de AUXINI, nos enfrentamos desde hace algún tiempo con el estudio de diversas presas, varias de las cuales, de tipo bóveda, dadas las características del terreno.

Ya que en el proyecto de una presa bóveda es muy importante la parte de cálculo para llegar a deducir tensiones, pensamos desde el primer momento en la conveniencia de preparar un programa, para poder realizar el cálculo con auxilio de los ordenadores electrónicos.

Después de la correspondiente labor de adiestramiento con las características de la máquina tipo UNIVAC de la casa Remington, llegamos, tras cerca de dos años de trabajo, a la confección de la serie completa de instrucciones que deben suministrarse a la calculadora, reflejadas en un voluminoso paquete de fichas perforadas (programa según el lenguaje utilizado para ordenadores electrónicos). Inmediatamente le aplicamos a la presa de la Barca, bóveda de 78 m. de altura, obteniendo resultados plenamente satisfactorios y que coinciden totalmente con los deducidos posteriormente por el Laboratorio Central, mediante ensayos en modelo elástico.

Más tarde hemos realizado el cálculo de otras tres presas, llegando a la conclusión de que el problema de determinar esfuerzos, corrimientos y tensiones, que antes requería bastantes meses de trabajo a un equipo experimentado, puede lograrse con nuestros procedimientos en solamente unos días.

El presente artículo tiene por objeto dar a conocer el planteamiento matemático de que hemos partido, con una revisión cuidadosa de las hipótesis establecidas y el método que hemos seguido.

Todos estos trabajos se han realizado con la colaboración de D. Miguel Pérez Cabo y D. José M. San Miguel, ayudantes de Obras Públicas y alumnos de tercer curso de la Escuela de Ingenieros de Caminos.

Notación empleada.

X, Y, Z — Triedro de referencia fijo.
x, y, z — Triedro de referencia particular de cada dovela.
T — Fuerza de masa tangencial (sentido de x).
R — Fuerza de masa radial (sentido de y).
V — Fuerza de masa vertical (sentido de z).
N_x — Fuerza normal (sentido x, según arco).
N_z — Fuerza normal (sentido z, según ménsula).
Q_x — Esfuerzo cortante (sentido y, según arco).
Q_z — Esfuerzo cortante (sentido y, según ménsula).
T_x — Esfuerzo tangencial (sentido z, según arco).
T_z — Esfuerzo tangencial (sentido x, según ménsula).
M_x — Momento flector (sentido z, según arco).
M_z — Momento flector (sentido x, según ménsula).
D_x — Momento torsor (sentido x, según arco).
D_z — Momento torsor (sentido z, según ménsula).
α — Angulo en plano horizontal.
φ — Angulo en plano vertical.
r_x — Radio de curvatura en plano horizontal.
r_z — Radio de curvatura en plano vertical.
h — Altura de una dovela de ménsula.
s — Longitud de una dovela de arco (medida según la directriz).

e Espesor de la bóveda en el punto que se considere.

u_{xm}, u_{ym}, u_{zm} — Deformación de la cara superior de la dovela de ménsula con respecto a la inferior. Según eje x. Según eje y. Según eje z.

U_{xm}, U_{ym}, U_{zm} — Corrimientos totales del centro de gravedad de una dovela de ménsula cuando se deforman todas las inferiores. Según eje x. Según eje y. Según eje z.

u_{xa}, u_{ya}, u_{za} — Deformación de la cara izquierda de la dovela de ménsula con respecto a la derecha. Según eje x. Según eje y. Según eje z.

U_{xa}, U_{ya}, U_{za} — Corrimientos totales del centro de gravedad de una dovela de arco. Según eje x. Según eje y. Según eje z.

S_m Sección horizontal de una dovela de ménsula.

I_m Momento de inercia de la sección S_m.

S_a Sección vertical de una dovela de arco.

I_a Momento de inercia de la sección S_a.

I_f Momento de inercia ficticio de la sección S_a.

η Coeficiente de reparto de esfuerzos cortantes, es decir, el que liga el esfuerzo cortante medio con la deformación media.

t_1 Incremento de temperatura en el paramento de aguas arriba.

t_2 Incremento de temperatura en el paramento de aguas abajo.

K Coeficiente de dilatación térmica.

d_g Distancia del centro de gravedad de dovela de ménsula al centro de dicha dovela (situado sobre la superficie mediana).

d_n Distancia de la fibra neutra del arco al centro de la dovela.

w_{xm}, w_{zm} — Giro de la cara superior de la dovela de ménsula, con respecto a la inferior. Según eje x. Según eje z.

i Subíndice que representa una dovela genérica.

Σ_n Suma desde el cimiento hasta la dovela n considerada.

α_i Angulo horizontal correspondiente a una dovela determinada i.

X_e, Y_e — Coordenadas genéricas del centro de una cara frontal {izquierda (arcos) / superior (ménsulas)} de dovela, respecto de los ejes fijos (X, Y).

X, Y — Coordenadas del centro de una dovela genérica, respecto de los ejes (X, Y).

N_{xp}, Q_{xp}, T_{xp}, M_{xp}, D_{xp} — Esfuerzos genéricos en una sección del arco, debidos exclusivamente a las reacciones hiperestáticas.

N_p, Q_p, T_p, M_p, D_p — Reacciones hiperestáticas del arco.

J Subíndice que representa la sección en que se hallan esfuerzos.

INTRODUCCIÓN

0.1. Superficie mediana.

Llamaremos superficie mediana de la bóveda la superficie continua engendrada por las directrices o fibras medias de los arcos horizontales.

0.2. Elemento diferencial de bóveda.

Para analizar el comportamiento elástico de la bóveda se considera una dovela o elemento comprendido entre dos secciones horizontales a la distancia infinitesimal $d\,h$ y dos secciones verticales radiales separadas un ángulo infinitesimal $d\,\alpha$ y los paramentos de aguas arriba y aguas abajo de la presa.

Se define como elemento de superficie mediana, la parte de dicha superficie comprendida dentro del elemento de bóveda.

0.3. Ejes de referencia.

Los ejes de referencia, forman un triedro trirectángulo cuyo origen coincide con el centro de elemento diferencial de superficie mediana.

Un eje es vertical. Otro es la intersección del plano tangente a la superficie mediana, en su punto medio, con un plano horizontal. El tercer eje es normal al plano definido por los otros dos (fig. 1.ª).

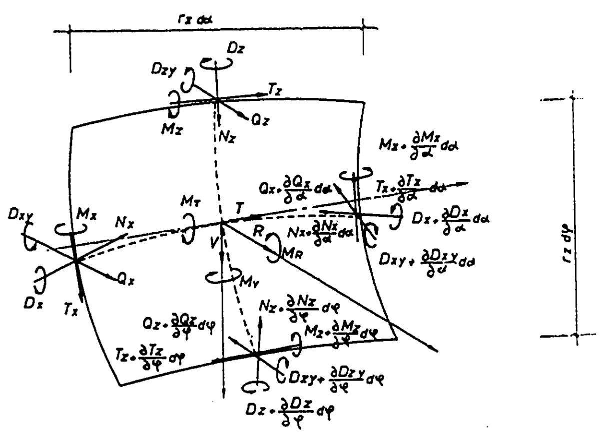

Fig. 1.ª — Acciones referidas a la superficie media.

El error cometido por referir el equilibrio al triedro descrito, y no a otro que pasara por el centro de gravedad de la dovela es despreciable.

0.4. Hipótesis admitidas.

De acuerdo con Love (*Elasticity*, Nueva York, 1944) y con Lombardi (*Les barrages en voûte mince*, Lausanne, 1955) se admiten las hipótesis siguientes:

1.ª El comportamiento de la bóveda es elástico.

2.ª El material es homogéneo e isótropo.

3.ª Las deformaciones son pequeñas comparadas con los espesores y con los radios de la bóveda.

4.ª Los puntos situados en planos normales a la superficie mediana siguen siendo coplanarios después de la deformación, y los nuevos planos son normales a la superficie mediana deformada.

5.ª Las tensiones son funciones continuas y derivables de las coordenadas del punto al cual corresponden. Son también continuas las derivadas primera y segunda de dichas tensiones.

6.ª Las deformaciones son funciones lineales de los corrimientos y de sus derivadas primera y segunda.

7.ª El empuje hidrostático se puede considerar bien como fuerza de masa o bien como fuerza de superficie. En uno y otro caso las resultantes de las fuerzas elementales pasan por el centro del elemento de superficie mediana.

Hipótesis 7.ª. — Empuje hidrostático.

De acuerdo con los estudios sobre subpresión y percolación de Harza, Leliawski, Laginha Serafim, etcétera, podemos establecer que sólo una parte del empuje hidrostático actúa realmente sobre el paramento, repartiéndose el resto, como fuerza de masa, en el interior del hormigón.

Aunque las modernas investigaciones se encaminan a ello, es todavía difícil precisar qué porcentaje de la presión hidrostática actúa como fuerza de superficie y, por lo tanto, qué parte actúa como fuerza de masa.

A) *Empuje hidrostático como fuerza de masa.*

Si se considera una fibra radial horizontal de sección dA, podemos suponer que la presión hidrostática varía linealmente desde el valor z en el paramento de aguas arriba, a cero en el paramento de aguas abajo.

Cada partícula elemental de longitud Δe de la fibra considerada, sufre un empuje en sentido radial, que es:

$$\frac{Z \cdot dA}{e} \Delta e,$$

constante a lo largo de la fibra. Por consiguiente, la resultante de empujes sobre estas partículas elementales actuará sobre el punto medio de la fibra que pertenece a la superficie mediana.

B) *Empuje hidrostático como fuerza de superficie.*

En el caso de considerar el empuje como fuerza de superficie, si la inclinación del paramento no es muy grande y tampoco los espesores, puede considerarse sin gran error que la resultante pasa por el centro de la dovela.

Fuerzas sísmicas. — Cuya resultante tendrá una componente radial y otra tangencial, pasando también por el centro de la dovela por tratarse de fuerza de inercia. También existe una componente vertical, de menor magnitud, cuya importancia es pequeña frente a las otras dos componentes.

Dado que el ángulo $d\alpha$ es pequeño, tomaremos:

$$\cos d\alpha = 1$$

$$\operatorname{Sen} d\alpha = d\alpha .$$

Finalmente, se desprecian los términos infinitesimales de segundo orden.

Teniendo en cuenta todas las simplificaciones anteriores, las condiciones de equilibrio de un elemento diferencial de bóveda son:

Fuerzas:

$$\text{Eje } X: T r_x r_z - \frac{\partial N_x}{\partial \alpha} r_z + Q_x r_z - \frac{\partial T_z}{\partial \varphi} r_x = 0.$$

$$\text{Eje } Y: R r_x r_z - \frac{\partial Q_z}{\partial \varphi} r_x - N_x r_z - \frac{\partial Q_x}{\partial \alpha} r_z = 0.$$

$$\text{Eje } Z: V r_x r_z - \frac{\partial N_z}{\partial \varphi} r_x - \frac{\partial T_x}{\partial \alpha} r_z = 0.$$

Momentos:

$$\text{Eje } X: M_T r_x r_z + D_{xy} r_z - \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} r_x - \frac{\partial D_x}{\partial \alpha} r_z -$$

$$- N_z r_x r_z \operatorname{sen} \varphi + Q_z r_x r_z \cos \varphi = 0.$$

$$\text{Eje } Y: M_R r_x r_z - D_x r_z - \frac{\partial D_{zy}}{\partial \varphi} r_x - \frac{\partial D_{xy}}{\partial \alpha} r_z +$$

$$+ T_x r_x r_z - T_z r_z r_x \cos \varphi = 0.$$

$$\text{Eje } Z: M_v r_x r_z - \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} r_z - \frac{\partial D_z}{\partial \varphi} r_x - Q_x r_x r_z +$$

$$+ T_z r_x r_z \operatorname{sen} \varphi = 0.$$

Capítulo I.

EQUILIBRIO DE UN ELEMENTO DIFERENCIAL DE BÓVEDA

1.1. Simplificaciones que se admiten.

Tratándose de un elemento de dimensiones suficientemente pequeñas, puede considerarse que el centro de gravedad de la dovela está en la superficie mediana, y coincide con el centro geométrico de la dovela, al cual referiremos las solicitaciones para establecer el equilibrio.

Sobre el elemento de bóveda supuesto aislado de los demás *existirán*:

a) Acciones transmitidas por los demás elementos de la bóveda.

b) Fuerzas exteriores.

Como fuerzas exteriores consideraremos:

Peso propio. — Según dirección vertical y con resultante aplicada en el baricentro que coincide con el centro geométrico.

Empuje hidrostático. — Como vimos en las hipótesis, se considera como fuerza de masa y como fuerza de superficie, a lo largo de este estudio. Su dirección es radial, con una componente vertical en los casos de paramento inclinado. La resultante se supone, también, aplicada en el centro de la dovela.

1.2. Planteamiento del problema elástico.

Hemos visto que las solicitaciones actuantes sobre un elemento de bóveda han de satisfacer las seis ecuaciones de equilibrio que se han obtenido.

Como el número de incógnitas, que son las acciones transmitidas por los elementos contiguos, es igual a doce, resulta un problema hiperestático, interno, y para resolverlo hemos de acudir a las relaciones existentes entre esfuerzos y desplazamientos, teniendo en cuenta, además, las condiciones de contorno.

Podría resolverse el problema deduciendo una ecuación diferencial de cuarto orden, cuya variable independiente es el desplazamiento radial, según hace B. Gilg, en su trabajo "Die Anwendung der Schalenstatik auf die Berechnung von Bogenstaumauern" (Stockholm, 1960).

Esta ecuación diferencial ha de aplicarse a todos los puntos de la bóveda, y deben satisfacerse además las condiciones de contorno. La solución general de la ecuación diferencial no ha sido hallada hasta ahora, y solamente se ha integrado en casos particulares, recurriendo a simplificaciones más o menos discutibles; tal es, por ejemplo, lo que hace Tölke en el caso de bóvedas con ángulo central de 360°, o Lombardi si se trata de bóvedas delgadas.

Sin embargo, siempre puede hacerse una integración aproximada por el método de incrementos finitos, obteniendo un sistema algebraico de ecuaciones lineales, que aunque sean en número elevado, puede resolverse fácilmente con auxilio de los cerebros electrónicos.

De este tipo de resolución nos ocuparemos en otra ocasión. Ahora trataremos del estudio de la bóveda suponiéndola descompuesta en una malla de elementos horizontales y verticales (arcos y ménsulas).

Capítulo II.

CÁLCULO MEDIANTE ARCOS Y MÉNSULAS

2.1. Descomposición en arcos y ménsulas.

Una dovela de bóveda puede considerarse formando parte, bien de un arco o bien de una ménsula.

Las acciones sobre las caras horizontales serán las transmitidas a través de la ménsula de que forma parte.

Las acciones sobre las caras verticales laterales estarán transmitidas por el arco.

Las fuerzas exteriores se pueden considerar desdobladas en parejas de componentes, de tal modo que de cada pareja, una componente, se equilibre con las acciones transmitidas por el arco, y la otra, con la transmitidas por la ménsula.

Según esto, las seis ecuaciones de equilibrio se desdoblan en las doce siguientes:

Arcos:

$$\left.\begin{aligned} &T_a r_x r_z - \frac{\partial N_x}{\partial \alpha} r_z + Q_x r_z = 0. \\ &R_a r_x r_z - N_x r_z - \frac{\partial Q_x}{\partial \alpha} r_z = 0. \\ &V_a r_x r_z - \frac{\partial T_x}{\partial \alpha} r_z = 0. \end{aligned}\right\} \text{Fuerzas.}$$

$$\left.\begin{aligned} &M_{Ta} r_x r_z + D_{xy} r_z - \frac{\partial D_x}{\partial \alpha} r_z = 0. \\ &M_{Ra} r_x r_z - D_x r_z - \\ &\quad - \frac{\partial D_{xy}}{\partial \alpha} r_z + T_x r_x r_z = 0. \\ &M_{Va} r_x r_z - \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} r_z - Q_x r_x r_z = 0. \end{aligned}\right\} \text{Momentos.}$$

Ménsulas:

$$\left.\begin{aligned} T_m r_x r_z - \frac{\partial T_z}{\partial \varphi} r_x &= 0. \\ R_m r_x r_z - \frac{\partial Q_z}{\partial \varphi} r_x &= 0 \\ V_m r_x r_z - \frac{\partial N_z}{\partial \varphi} r_x &= 0. \end{aligned}\right\} \text{Fuerzas.}$$

$$\left.\begin{aligned} & M_{Tm} r_x r_z - \frac{\partial M_z}{\partial \varphi} r_x - N_z r_x r_z \operatorname{sen} \varphi + \\ & \quad + Q_z r_x r_z \cos \varphi = 0. \\ & M_{Rm} r_x r_z - \frac{\partial D_{zy}}{\partial \varphi} r_x - T_z r_x r_z \cos \varphi = 0. \\ & M_{Vm} r_x r_z - \frac{\partial D_z}{\partial \varphi} r_x + T_z r_x r_z \operatorname{sen} \varphi = 0, \end{aligned}\right\} \text{Momentos}$$

debiéndose además verificar que:

$$\begin{aligned} T_a + T_m &= T. \\ R_a + R_m &= R. \\ V_a + V_m &= V. \\ M_{Ta} + M_{Tm} &= M_T. \\ M_{Ra} + M_{Rm} &= M_R. \\ M_{Va} + M_{Vm} &= M_V. \end{aligned}$$

2.2. Resolución del problema elástico.

Como ya se dijo en 1.2, el problema es hiperestático y hay que acudir a las relaciones entre deformaciones y tensiones, teniendo en cuenta las condiciones de contorno para poder conocer el estado elástico de la bóveda.

Es evidente que cada dovela debe sufrir los mismos desplazamientos considerada como formando parte del sistema arcos o del sistema ménsulas, ya que no se trata de dos sistemas independientes, sino de un artificio de cálculo.

Por consiguiente, llamando U_{xa}, U_{ya}, U_{za}, a los corrimientos del centro de una dovela en sentido de los ejes x, y, z, cuando forma parte de un arco, U_{xm}, U_{ym}, U_{zm}, a los corrimientos de la misma dovela formando parte de ménsula, y W_{xa}, W_{ya}, W_{za}, W_{xm}, W_{ym}, W_{zm}, a los giros que experimenta la dovela, debe verificarse para cada uno de los elementos de la bóveda:

$$\left.\begin{aligned} U_{xa} &= U_{xm}. \\ U_{ya} &= U_{ym}. \\ U_{za} &= U_{zm}. \end{aligned}\right\} \text{Corrimientos}$$

$$\left.\begin{aligned} W_{xa} &= W_{xm}. \\ W_{ya} &= W_{ym}. \\ W_{za} &= W_{zm}. \end{aligned}\right\} \text{Giros.}$$

Pero además:

$$U_{xa} = U(N_x, N_z, T_x, T_z, D_x, D_z, M_x, M_z, D_{xy}, D_{zy})$$
$$W_{xa} = W(N_x, N_z \ldots),$$

y análogamente todas las demás.

En definitiva tenemos:

12 incógnitas de esfuerzos internos.
6 incógnitas de desplazamientos como arco.
6 incógnitas de desplazamiento como ménsula.
6 incógnitas de reparto de acciones externas entre arcos y ménsulas.

En total, 30 incógnitas.

Y han de satisfacer las siguientes ecuaciones:

12 ecuaciones de equilibrio.
6 ecuaciones de identidad de desplazamientos.
12 ecuaciones de desplazamientos en función de tensiones internas.

En total, 30 ecuaciones.

El problema queda resuelto teóricamente de una forma general sin más que aplicar estas ecuaciones a todos y cada uno de los puntos de la bóveda. Naturalmente esto es imposible, y en la práctica hemos de conformarnos con la solución aproximada que se obtenga aplicando las ecuaciones únicamente a unos cuantos elementos, elegidos con criterio adecuado.

(*Continuará*).