

CALCULO DE PRESAS BOVEDAS MEDIANTE EMPLEO DE ORDENADORES ELECTRONICOS

Por ALFONSO ALVAREZ MARTINEZ
y JOSE A. BAZTAN DE GRANDA

Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Publicamos a continuación los capítulos III y IV del interesante tema epigrafiado, que se inició en nuestro número de mayo último, y que terminará en el próximo.

CAPÍTULO III

CÁLCULO POR DOVELAS FINITAS

3.1. PLANTEAMIENTO GENERAL Y SIMPLIFICACIONES.

Planteado el problema teóricamente, y en toda su extensión, pasamos a la fase de cálculo práctico por el sistema de arcos y ménsulas, del que se habló en el capítulo precedente.

Como se dijo en 2.2, se pretende expresar el equilibrio en un número finito de puntos. Estos puntos son los nudos de una malla de arcos y ménsulas. Para que este equilibrio parcial refleje lo más fielmente posible el trabajo real de la estructura, es preciso que el sistema de arcos y ménsulas se elija de modo que queden representadas tanto las singularidades de la bóveda como las discontinuidades del cimiento.

Tanto los arcos como las ménsulas se dividen en un número finito de dovelas, que sustituyen en el cálculo práctico a los elementos diferenciales de bóveda.

Las dovelas se designan por $1 \ 2 \dots i \dots$, empezando por la margen izquierda en arcos, y por la coronación, en ménsulas.

Sobre cada una de estas dovelas actuarán los esfuerzos y las acciones exteriores indicadas en la figura 2.^a, estando estas últimas aplicadas en el centro del elemento de superficie mediana.

Aparte de las hipótesis ya reseñadas en 0.4, admitiremos en lo que sigue las siguientes simplificaciones:

1. Según se vió en 1.1, las fuerzas exteriores a considerar, actuando sobre el centro de la dovela, son: peso propio, fuerzas sísmicas y empuje hidrostático. Por consiguiente, y salvo casos especiales en

que actúen fuerzas distintas de las reseñadas, las fuerzas exteriores no producirán momentos al referirlas al centro de la dovela.

2. Por existir continuidad de unas ménsulas a

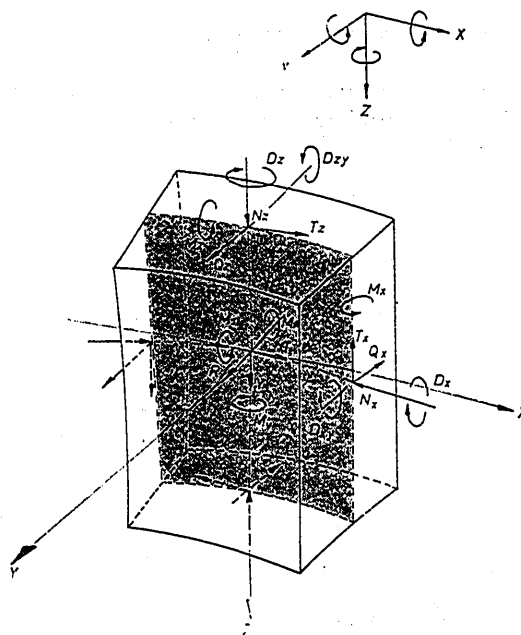


Fig. 2.^a—Los sentidos positivos de las fuerzas exteriores son los sentidos de los ejes. Asimismo, las fuerzas de reacción hiperestática se consideran positivas en dicho sentido de los ejes.

otras, y de unos arcos a otros, puede considerarse que

$$D_{xy} = D_{zy} = 0.$$

3. Se desprecian los giros alrededor de ejes radiales, en el estudio de deformaciones.

4. Para cada dovela se supone $\Delta \alpha$ lo suficientemente pequeño para que

$$\cos \Delta \alpha = 1,$$

$$\sin \Delta \alpha = \Delta \alpha.$$

En los apartados sucesivos se van a obtener las fórmulas que intervienen en el cálculo, en el siguiente orden:

1. Expresión de los esfuerzos que actúan sobre cada dovela, en función de las fuerzas exteriores.

2. Determinación de deformaciones de dovelas, tanto en ménsulas como en arcos, en función de los esfuerzos relativos a la dovela.

3. Determinación de corrimientos totales en función de las deformaciones de dovelas ya obtenidas.

4. Obtención de reacciones hiperestáticas en arcos.

En definitiva se tienen todas las expresiones necesarias para pasar de acciones exteriores a corrimientos totales de cualquier sección, tanto de arcos como de ménsulas.

3.2. DEFORMACIÓN DE DOVELAS DE MÉNSULAS.

3.2.1. Consideraciones generales.

Entendemos por deformación de una dovela de ménsula los corrimientos y los giros según los tres ejes de la dovela, del centro de la cara superior, res-

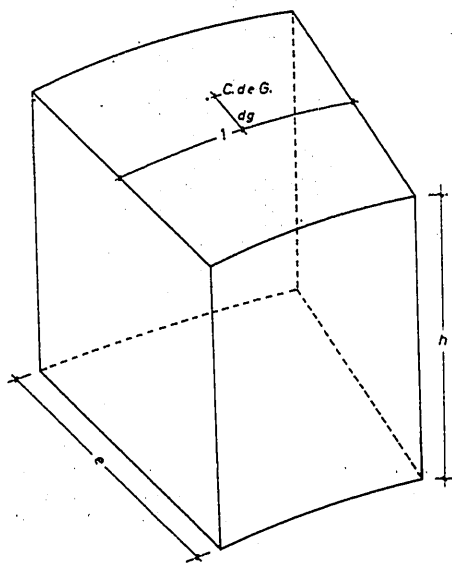


Fig. 3.^a — Dovelas de ménsula.

pecto de la cara inferior, debidos a los esfuerzos actuantes.

En cada dovela se determinan las deformaciones u_{xm} , u_{ym} , u_{zm} , según los tres ejes x , y , z ; y los dos

giros w_{xm} , w_{zm} , alrededor de los ejes x , z , de la cara superior con respecto a la inferior.

Se consideran ménsulas de ancho unidad, medido sobre la superficie mediana (fig. 3.^a).

Según las condiciones de contorno, la ménsula estará libre en su extremo superior y elásticamente empotrada en el terreno por su extremo inferior. Por consiguiente, en los desplazamientos de cada punto de la ménsula influirán solamente las deformaciones de las dovelas situadas por debajo del mismo.

Los sentidos positivos, tanto de deformaciones como de giros, son los mismos que los elegidos para fuerzas y momentos exteriores.

Se designan por S_m la sección horizontal de una dovela de ménsula, y por S_a la sección vertical de una dovela de arco.

Asimismo, I_m representa el momento de inercia de la sección S_m ; I_a , el momento de inercia de la sección S_a , y distinguimos por d_g y d_n , respectivamente, las distancias del centro de gravedad de dovela de ménsula, al centro de la dovela, y de la fibra neutra del arco al centro de la dovela correspondiente.

Para determinar los desplazamientos de cada punto es preciso conocer previamente la deformación que sufre cada dovela elemental bajo las diversas acciones que actúan sobre ella. Se tienen en cuenta las sollicitaciones siguientes:

a) Las fuerzas N_z , T_z , Q_z , y momentos D_z , M_z , transmitidos por la ménsula.

b) Las deformaciones que, según el módulo de elasticidad transversal producen las acciones transmitidas por el arco que pasa por la dovela.

c) Las deformaciones que, según el módulo de elasticidad transversal, produce el reparto de presión hidrostática.

d) Las deformaciones provocadas por una variación de temperatura, con distribución lineal desde un incremento t_1 en el paramento de aguas arriba a otro t_2 en el paramento de aguas abajo.

Se tienen en cuenta las hipótesis siguientes:

1.^a Los esfuerzos considerados en el cálculo, por unidad de superficie, se suponen distribuidos uniformemente en la cara de la dovela correspondiente. La distribución real no es uniforme. Sin embargo, se toman unos esfuerzos de cálculo, tales que produzcan la misma deformación total que los realmente existentes.

2.^a Los esfuerzos de arco se consideran constantes, dado que la altura de la dovela es pequeña.

3.^a Las deformaciones transversales son proporcionales a las correspondientes deformaciones longitudinales directas.

4.^a La presión hidrostática actúa en sentido normal al plano tangente al paramento de aguas arriba en el centro de la cara de la dovela.

Hay que tener en cuenta que los momentos M_x , M_z producen un corrimiento según el eje y de la cara superior de la dovela respecto de la inferior, debido

a la curvatura que adquiere el eje de la dovela en su flexión, tal como se puede observar en la figura 4.^a.

El momento de inercia de torsión se refiere al eje normal a la dimensión menor de la pieza. En nuestro caso, pues, será $e \cdot I^3 = e$.

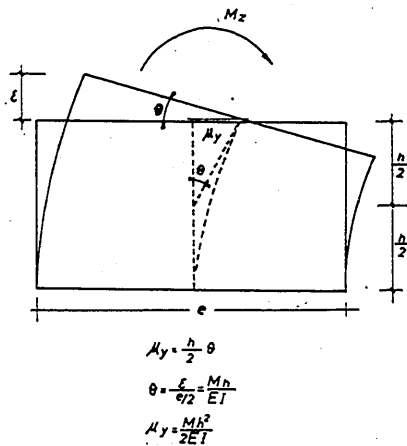


Figura 4.^a

El coeficiente η que aparece en las fórmulas es el de reparto de esfuerzos cortantes; es decir, liga el cizallamiento medio con la deformación media cuando las tensiones cortantes varían, anulándose en ciertas partes de contorno de la sección.

3.2.2. Deformaciones.

Las deformaciones serán:

$$u_{xm} = \frac{2(1+\nu)}{E} h \frac{T_z e}{S_m};$$

$$u_{ym} = \frac{2\eta(1+\nu)}{E} h \frac{Q_z e}{S_m} + \frac{1}{2E} \left(\frac{h^2 M_z e}{I_m} + \frac{h^2 \nu M_x e}{I_a} \right) + \frac{h^2}{2e} \left(\frac{\nu \sigma_3}{E} + K(t_1 - t_2) \right);$$

$$u_{zm} = \frac{h}{E} \left(\frac{N_z e}{S_m} - \nu \frac{N_x e}{S_a} \right) - \frac{h}{E} \left(\frac{M_z e}{I_m} d m - \nu \frac{M_x e}{I_a} d_a \right) - \frac{h}{2} K(t_1 + t_2) - \frac{\nu h}{2E} \sigma_2;$$

$$w_{xm} = \frac{1}{E} \left(h \frac{M_z e}{I_m} + \nu h \frac{M_x e}{I_a} \right) + \frac{h}{e} \left(\frac{\nu \sigma_2}{E} + K(t_1 - t_2) \right);$$

$$w_{zm} = 6 \frac{(1+\nu)}{E} \frac{h D_z e}{e}.$$

Como la sección es trapezoidal, el área, momento de inercia y distancias características serán:

$$S_m = e.$$

$$I_m = \frac{e^3}{12} \left(1 - \frac{e^2}{12 r_x^2} \right).$$

$$dg = \frac{e^2}{12 r_x}.$$

3.3. DEFORMACIÓN DE DOVELAS DE ARCOS.

3.3.1. Consideraciones generales.

Son los desplazamientos y giros de una cara respecto de la opuesta que se considera perfectamente empotrada (fig. 5.^a).

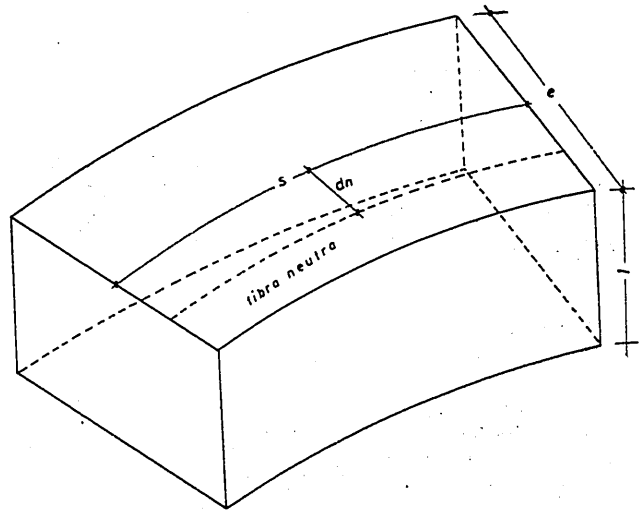


Fig. 5.^a — Dodela de arco.

Se tienen en cuenta:

a) Las fuerzas N_x , Q_x , T_x y los momentos M_x , D_x del arco medidos por unidad de superficie mediana.

b) La fuerza N_z y momento M_z , medidos por unidad de superficie, que transmite transversalmente la ménsula que pasa por la dovela considerada.

c) Las deformaciones producidas por el reparto de la presión hidrostática.

d) Las deformaciones provocadas por una variación de temperatura con distribución lineal desde un incremento t_1 en el paramento de aguas arriba a otro t_2 en el paramento de aguas abajo.

La distribución lineal de temperatura significa una variación lineal en los incrementos de la misma, a los cuales son proporcionales las deformaciones en las distintas fibras.

En consecuencia, las secciones planas seguirán siendo planas después de la deformación. En las dovelas de ménsula estas secciones se conservarán para-

lelas a sí mismas, y en las dovelas de arcos sufrirán un giro, debido a la distinta longitud de las fibras.

Siendo s_1 y s_2 las longitudes de las fibras extremas, t_1 y t_2 los incrementos de temperatura correspondientes y s la longitud de la fibra media, se tendrá que el aumento de longitud debido a temperatura es:

$$K \frac{t_1 s_1 - t_2 s_2}{s},$$

o bien:

$$K \left(t_1 \left(1 + \frac{e}{2r_x} \right) - t_2 \left(1 - \frac{e}{2r_x} \right) \right) = K \left((t_1 - t_2) + (t_1 + t_2) \frac{e}{2r_x} \right).$$

Se suponen arcos de espesor vertical unidad.

El planteamiento general de cálculo es semejante al caso de ménsula. La única diferencia estriba en que, a causa de que la dovela se corta radialmente, influye en la deducción de tensiones y deformaciones la diferencia de longitudes de las fibras a distintas alturas.

3.3.2. Deformación de secciones radiales en pieza curva.

Resolveremos el problema, en lo que aquí nos interesa, siguiendo el procedimiento de Timoshenko en su obra *Teoría de las Estructuras*.

Todo giro debido a tensiones de flexión tiene la forma:

$$\frac{M l}{E K}$$

siendo M el momento de flexión, E el módulo de elasticidad del material, l una longitud y K un coeficiente función de las características geométricas de la sección considerada.

En el caso de pieza recta este coeficiente es el momento de inercia.

En el caso de pieza curva, su expresión es distinta, siendo la pieza recta un caso particular cuando el radio de curvatura es infinito. Por extensión lo denominaremos momento de inercia ficticio.

Supóngase una sollicitación en la dovela de arco que sea un momento flector puro.

Esta sollicitación equivale a un par de fuerzas $N = \frac{M}{r_x}$ [1], tales que su momento intrínseco sea M .

Una de ellas normal a la sección en su centro de gravedad, y la otra pasando por el centro de curvatura.

Estudiamos el efecto de cada una en particular para superponer los giros parciales y obtener el giro definitivo de la sección.

A) Fuerza normal a la sección de arco.

Esta fuerza da lugar a una distribución uniforme de tensiones que producen un giro alrededor del centro de curvatura, debido a la distinta longitud de las fibras de la dovela (fig. 6.^a, a).

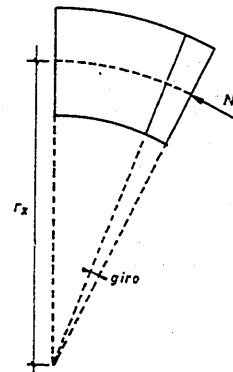


Figura 6.^a, a.

El giro sufrido por la sección será:

$$\text{giro} = \frac{N s}{r_x e E} \text{ o bien, según [1]: } \frac{M s}{r_x^2 e E}$$

B) Fuerza en el centro de curvatura.

En virtud del teorema de reciprocidad, una fuerza en el centro de curvatura da lugar a un giro alrededor del centro de gravedad de la sección. La distribución de tensiones que resulta no es lineal, sino hiperbólica (fig. 6.^a, b).

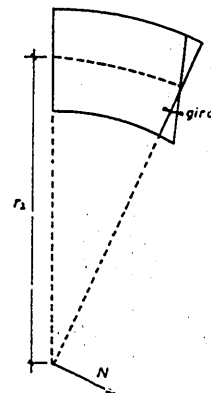


Figura 6.^a, b.

En este caso el giro vale:

$$\frac{M s}{E I'} \text{ donde } I' = \int_{-e/2}^{+e/2} \frac{y^2}{1 - \frac{y}{r_x}} dy.$$

Es decir:

$$I' = -e r_x^2 + r_x^2 \log_e \frac{1 + \frac{e}{2r_x}}{1 - \frac{e}{2r_x}}.$$

C) Momento flector aplicado al centro de gravedad.

Este caso es la superposición de los dos anteriores (fig. 6.^a, c).

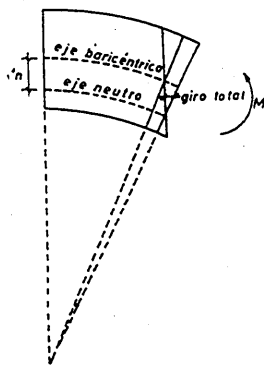


Figura 6.^a, c.

El giro total será:

$$\frac{Ms}{r_x^2 e E} + \frac{Ms}{EI'}.$$

Para que esta expresión tome la forma general de que ya hemos hablado:

$$\frac{Ms}{EI_f},$$

en la cual el momento de inercia ficticio es I_f , ha de verificarse:

$$I_f = \frac{1}{\frac{1}{I'} + \frac{1}{r_x^2 e}}. \quad [2]$$

Por otra parte, vemos que el eje neutro no coincide con el eje baricéntrico. La distancia d_n entre ambos es:

$$d_n = r_x - \frac{e}{\log_e \frac{1 + \frac{e}{2r_x}}{1 - \frac{e}{2r_x}}},$$

y por tanto:

$$I' = \frac{e r_x^2 d_n}{r_x - d_n}.$$

Luego la expresión [2] será:

$$I_f = e r_x d_n,$$

y el giro será:

$$\text{giro} = \frac{Ms}{EI_f} = \frac{Ms}{E e r_x d_n}.$$

$$S_a = e.$$

$$I_a = \frac{e^3}{12}.$$

Los valores s_n y s_g de las longitudes de la línea neutra de la dovela y de la línea baricéntrica de las ménsulas cruzadas serán:

$$s_n = s \left(1 - \frac{d_n}{r_x} \right),$$

$$s_g = s \left(1 + \frac{e^2}{12 r_x^2} \right).$$

3.3.3. Deformaciones.

Una vez estudiados los giros en pieza curva, pasamos a determinar los valores de las deformaciones definitivas en dovelas.

La deducción de dichas deformaciones es inmediata a partir de la teoría desarrollada:

$$u_{xa} = \frac{s}{E} \left(-\frac{N_x e}{S_a} - \frac{M_x e}{I_f} d_n \right) + \frac{\nu s}{E} \left(\frac{N_z e}{S_m} - \frac{M_z e}{S_m} d_g \right) + \frac{s}{2} \left(\frac{\nu \sigma_3}{E} + K(t_1 + t_2) \right),$$

$$u_{ya} = -\frac{2\eta(1+\nu)sQ_x e}{E S_a} - \frac{s^2}{2E} \frac{M_x e}{I_f} - \frac{\nu s^2}{2E} \frac{M_z e}{I_m} + \frac{s^2}{2e} \left(\frac{\nu \sigma_3}{E} + K(t_1 - t_2) \right),$$

$$u_{za} = -\frac{2(1+\nu)s}{E} \frac{T_x e}{S_a},$$

$$w_{xa} = -\frac{6(1+\nu)sD_x e}{E e},$$

$$w_{za} = \frac{-sM_x e}{EI_f} - \frac{\nu s_g M_z e}{EI_m} + \frac{s}{e} \left(\frac{\nu \sigma_3}{E} + K(t_1 - t_2) + K(t_1 + t_2) \frac{e}{2r_x} \right).$$

3.4. CORRIMIENTOS TOTALES.

Conocidas las deformaciones producidas en las distintas dovelas, pasamos a determinar los corrimientos en una sección cualquiera.

Los corrimientos en las secciones de ménsulas, son debidos a las deformaciones parciales de todas y cada una de las dovelas que se encuentran por debajo de la sección considerada.

En los arcos, el caso es distinto, por tratarse de una estructura hiperestática. Las fases de cálculo son las siguientes:

a) Suponer el arco libre en su extremo izquierdo, sometido al sistema de fuerzas exteriores.

Tanto las deformaciones, como corrimientos y esfuerzos, relativos a esta fase, los denominamos isostáticos. Su obtención es semejante al caso de ménsulas.

b) Suponer el arco libre en su extremo izquierdo, y sometido al sistema de fuerzas y momentos en la sección libre, tales que anulen los corrimientos isostáticos. Estas sollicitaciones las denominaremos hiperestáticas, por coincidir con las reacciones de empotramiento izquierdo. Asimismo denominaremos hiperestáticos los esfuerzos y corrimientos debidos a estas sollicitaciones.

c) Superponer los dos casos anteriores, tanto en deformaciones como en esfuerzos, con lo que se tiene la situación real de la estructura.

3.4.1. Corrimientos de secciones de arcos.

A) *Ejes de referencia.* — Los corrimientos totales de una sección determinada, son la suma vectorial de los corrimientos parciales debidos a las deformaciones propias de cada dovela.

Estas deformaciones están referidas a unos ejes, fijos para cada dovela, pero distintos entre sí. Es preciso determinar sus proyecciones sobre un triedro fijo, que sea el mismo para las diferentes dovelas.

Teóricamente, el triedro fijo puede ser cualquiera, siempre que sea fijo respecto a la ladera. Sin embargo, se han deducido las fórmulas suponiendo un eje Z vertical, otro eje X , tangente a la directriz del arco de coronación, y un tercer eje Y normal a los dos anteriores.

El origen puede ser un punto cualquiera de la directriz del arco de coronación. En el caso de bóveda simétrica se debe tomar para mayor comodidad, como origen, el centro de la directriz del arco de coronación.

Obtenidas las componentes de las distintas deformaciones de una dovela, según estos ejes, volvemos a proyectarlos según los propios de la sección, cuyo corrimiento total, se halla.

Hay que tener en cuenta que las flexiones producen también corrimientos horizontales, y que las torsiones originan corrimientos verticales.

B) *Corrimientos.* — Designamos por U_{xa} , U_{ya} , U_{za} los corrimientos totales de una sección cualquiera, según sus ejes x , y , z , y W_{xa} , W_{za} los giros totales de dicha sección alrededor de sus ejes x , z .

La Σ engloba todas las dovelas, desde la sección

de empotramiento, hasta la sección cuyos corrimientos se están hallando. El subíndice n se refiere a la sección en que se está hallando el corrimiento. La i representa una sección genérica.

Los desplazamientos y giros totales serán:

$$U_{xa} = \cos \alpha_n \Sigma (u_{xa} \cos \alpha - u_{ya} \sin \alpha + w_{za} Y_e)_i + \\ + \sin \alpha_n \Sigma (u_{xa} \sin \alpha + u_{ya} \cos \alpha - w_{za} X_e)_i + \\ + (X_e \sin \alpha - Y_e \cos \alpha)_n \Sigma (w_{za})_i .$$

$$U_{ya} = - \sin \alpha_n \Sigma (u_{xa} \cos \alpha - u_{ya} \sin \alpha + w_{za} Y_e)_i + \\ + \cos \alpha_n \Sigma (u_{xa} \sin \alpha + u_{ya} \cos \alpha - w_{za} X_e)_i + \\ + (X_e \cos \alpha + Y_e \sin \alpha)_n \Sigma (w_{za})_i .$$

$$U_{za} = \Sigma (u_{za} - w_{xa} \sin \alpha (X_{en} - X_e) + w_{xa} \cos \alpha (Y_{en} - Y_e))_i .$$

$$W_{za} = \Sigma (w_{za})_i ;$$

$$w_{xa} = \cos \alpha_n \Sigma (w_{xa} \cos \alpha)_i + \sin \alpha_n \Sigma (w_{xa} \sin \alpha)_i .$$

3.4.2. Corrimientos de secciones de ménsulas.

El procedimiento a seguir es análogo al caso de arcos.

Designamos por U_{xm} , U_{ym} , U_{zm} los corrimientos totales de una sección cualquiera, según los ejes x , y , z ; y W_{xm} , W_{zm} los giros totales de dicha sección alrededor de los ejes x , z , de su dovela correspondiente.

Igualmente, hemos de recordar que los giros de una dovela cualquiera dan lugar a corrimientos horizontales y verticales, en las dovelas posteriores a ella.

La Σ engloba, como en el caso de arcos, todas las dovelas comprendidas entre el empotramiento y la sección considerada n .

Los corrimientos totales serán:

$$U_{xm} = \cos \alpha_n \Sigma (u_{xm} \cos \alpha - u_{ym} \sin \alpha - Y_e w_{zm} - Z_e w_{xm} \sin \alpha)_i + \\ + \sin \alpha_n \Sigma (u_{xm} \sin \alpha + u_{ym} \cos \alpha - X_e w_{zm} + Z_e w_{xm} \cos \alpha)_i + \\ + (X_e \sin \alpha - Y_e \cos \alpha)_n \Sigma (w_{zm})_i + Z_{en} \cos \alpha_n \Sigma (w_{xm} \sin \alpha)_i - \\ - Z_{en} \sin \alpha_n \Sigma (w_{xm} \cos \alpha)_i .$$

$$U_{ym} = - \sin \alpha_n \Sigma (u_{xm} \cos \alpha - u_{ym} \sin \alpha + Y_e w_{zm} - \\ - Z_e w_{xm} \sin \alpha)_i + \cos \alpha_n \Sigma (u_{xm} \sin \alpha + u_{ym} \cos \alpha - \\ - X_e w_{zm} + Z_e w_{xm} \cos \alpha)_i + (X_e \cos \alpha + \\ + Y_e \sin \alpha)_n \Sigma (w_{zm})_i - Z_{en} \sin \alpha_n \Sigma (w_{xm} \sin \alpha)_i - \\ - Z_{en} \cos \alpha_n \Sigma (w_{xm} \cos \alpha)_i .$$

$$U_{zm} = \Sigma (u_{zm} + (X_e \sin \alpha - Y_e \cos \alpha) w_{xm})_i - \\ - X_{en} \Sigma (w_{xm} \sin \alpha)_i + Y_{en} \Sigma (w_{xm} \cos \alpha)_i .$$

$$W_{zm} = \Sigma (w_{zm})_i .$$

$$W_{xm} = \cos \alpha_n \Sigma (w_{xm} \cos \alpha)_i + \sin \alpha_n \Sigma (w_{xm} \sin \alpha)_i .$$

3.5. ESFUERZOS EN LAS MÉNSULAS.

Se trata de determinar los esfuerzos que actúan en una sección cualquiera de una ménsula, en función de las acciones exteriores.

En el cálculo de deformaciones de una dovela se tuvieron en cuenta únicamente los esfuerzos sobre la cara superior, que son, tratándose de una ménsula cuyo extremo superior está libre, la suma de todas las acciones que actúan sobre las dovelas situadas por encima de la considerada.

Este cálculo de deformaciones sería exacto en el caso de que sobre la dovela en cuestión no actuasen fuerzas exteriores. Si como ordinariamente ocurre, actúan fuerzas exteriores sobre la dovela, habrá que

$$T_{zm} = \sin \alpha_j \sum_1^j (h (R \cos \alpha + T \sin \alpha))_i - \cos \alpha_j \sum_1^j (h (R \sin \alpha - T \cos \alpha))_i - \frac{1}{2} (Th)_j.$$

$$Q_{zm} = \sin \alpha_j \sum_1^j (h (R \sin \alpha - T \cos \alpha))_i + \cos \alpha_j \sum_1^j (h (R \cos \alpha + T \sin \alpha))_i - \frac{1}{2} (Rh)_j.$$

$$N_{zm} = \sum_1^j (Vh)_i - \frac{1}{2} (Vh)_j.$$

$$D_{zm} = \sum_1^j (h (M_v + (X \cos \alpha + Y \sin \alpha) R + (X \sin \alpha - Y \cos \alpha) T))_i - X_{ge} \sum_1^j (h (R \cos \alpha + T \sin \alpha))_i - Y_{ge} \sum_1^j (h (R \sin \alpha - T \cos \alpha))_i - \frac{1}{2} (h (T d_n + M_v))_j.$$

$$M_{zm} = (Z \sin \alpha)_j \sum_1^j (h (R \sin \alpha - T \cos \alpha))_i + \left(h \left(\frac{Rh}{6} - \frac{Vdg}{2} - \frac{M_T}{2} \right) \right)_j + (Z \cos \alpha)_j \sum_1^j (h (R \cos \alpha + T \sin \alpha))_i + \\ + (X_g \sin \alpha - Y_g \cos \alpha)_j \sum_1^j (Vh)_i - \sin \alpha_j \sum_1^j (h (Z (R \sin \alpha - T \cos \alpha) + X V - M_T \sin \alpha))_i - \cos \alpha_j \sum_1^j (h (Z (R \cos \alpha + T \sin \alpha) - Y V - M_T \cos \alpha))_i.$$

La j representa la sección en que se calculan los esfuerzos.

Prescindiendo de estos términos j tendremos los esfuerzos en la cara inferior de la dovela.

Todos los esfuerzos se refieren al centro de gravedad de la sección.

$$N'_{xa} = - \sin \alpha_j \sum_1^j ((R \cos \alpha + T \sin \alpha) s)_i + \cos \alpha_j \sum_1^j ((R \sin \alpha - T \cos \alpha) s)_i + \frac{1}{2} (Ts)_j.$$

$$Q'_{xa} = - \sin \alpha_j \sum_1^j ((R \sin \alpha - T \cos \alpha) s)_i - \cos \alpha_j \sum_1^j ((R \cos \alpha + T \sin \alpha) s)_i + \frac{1}{2} (Rs)_j.$$

$$T'_{xa} = - \sum_1^j (Vs)_i + \frac{1}{2} (Vs)_j.$$

$$M'_{xa} = - \sum_1^j ((X \cos \alpha + Y \sin \alpha) R + (X \sin \alpha - Y \cos \alpha) T + M_v) s)_i + X_j \sum_1^j (s (R \cos \alpha + T \sin \alpha))_i + Y_j \sum_1^j (s (R \sin \alpha - T \cos \alpha))_i - \left(s \left(\frac{-R_x s}{6} - \frac{T d_n}{2} - \frac{M_v}{2} \right) \right)_i.$$

$$D'_{xa} = (X \sin \alpha - Y \cos \alpha)_j \sum_1^j (Vs)_i - \frac{1}{2} (M_T s)_i - \sin \alpha_j \sum_1^j ((X V - M_T \sin \alpha) s)_i + \cos \alpha_j \sum_1^j ((Y V + M_T \cos \alpha) s)_i.$$

sumar a las fórmulas de los párrafos 3.2 y 3.3 las deformaciones que en el interior de la dovela producen las acciones exteriores que actúan sobre cada sección horizontal de ella, y que son variables en función de Z .

Se prefiere, sin embargo, utilizar por ser más sencillas las fórmulas citadas de los párrafos 3.2 y 3.3, pero introduciendo en ellas unos esfuerzos que produzcan las mismas deformaciones totales que las sumas de las que originan los esfuerzos en la cara superior, más las acciones en el interior de la dovela. Las fuerzas exteriores que intervienen en el cálculo son fuerzas por unidad de volumen, así como los esfuerzos son por unidad de área.

Las expresiones de los esfuerzos serán:

3.6. ESFUERZOS EN LOS ARCOS.

Llamando i a una dovela genérica, y j a la dovela que se estudia, los esfuerzos isostáticos, debidos a las fuerzas exteriores, sin incluir las reacciones hiperestáticas del arco, son:

3.7. DETERMINACIÓN DE REACCIONES HIPERESTÁTICAS EN LOS ARCOS.

Los arcos están empotrados en ambas laderas. Por lo tanto, el problema de determinar las reacciones de empotramiento, y en consecuencia, los esfuerzos de las distintas secciones, es hiperestático. Para resolverlo, hemos de hacer intervenir las deformaciones del arco.

El método de cálculo, que empleamos para resolver este problema, es el siguiente:

1.º Suponer el arco libre en su empotramiento de la margen izquierda, con lo que se tiene una estructura isostática, cuyo cálculo es semejante al caso de ménsula.

Las fuerzas exteriores producirán en esta estructura unos esfuerzos isostáticos; y en el extremo libre, unos corrimientos y giros. Tanto los corrimientos como los giros, y los esfuerzos, han sido calculados en los apartados anteriores.

2.º Llevar la sección de corte a su posición real, mediante la introducción de unas fuerzas hiperestáticas en dicha sección, que anulen los corrimientos y giros anteriores.

El estado final del arco, tanto en esfuerzos de las distintas secciones como en deformaciones, será la superposición de los dos estados parciales: el debido a los esfuerzos hiperestáticos en el extremo, y el ya determinado, considerando el extremo libre.

Es evidente que las reacciones hiperestáticas del arco coinciden con los esfuerzos introducidos, que anulan los desplazamientos del extremo izquierdo.

Las fases que se van a seguir en la ordenación de cálculos, son las siguientes:

a) Expresión general de esfuerzos de cualquier sección debidos a las reacciones hiperestáticas introducidas.

b) Desplazamientos totales del extremo izquierdo debidos al sistema de esfuerzos hiperestáticos aplicados.

c) Igualación de dichos desplazamientos a los llamados isostáticos, obtenidos anteriormente, cuando se suponía libertad de movimiento del extremo izquierdo.

a) *Expresión de esfuerzos.* — Designamos a las reacciones hiperestáticas por N_p, Q_p, T_p, M_p, D_p .

Los esfuerzos hiperestáticos (debidos única y exclusivamente a las reacciones hiperestáticas) llevan también subíndice p .

Así, pues, tenemos en cada dovela:

$$\begin{aligned} N_x - N'_x &= N_{xp} = -N_p \cos(\alpha_p - \alpha) + Q_p \sin(\alpha_p - \alpha) \\ Q_x - Q'_x &= Q_{xp} = -N_p \sin(\alpha_p - \alpha) - Q_p \cos(\alpha_p - \alpha) \\ T_x - T'_x &= T_{xp} = -T_p \\ M_x - M'_x &= M_{xp} = -M_p + (Y_p - Y_e)(N_p \cos \alpha_p - Q_p \sin \alpha_p) - (X_p - X_e)(N_p \sin \alpha_p + Q_p \cos \alpha_p) \\ D_x - D'_x &= D_{xp} = -D_p \cos(\alpha - \alpha_p) - T_p(Y_p - Y_e) \cos \alpha + T_p(X_p - X_e) \sin \alpha \end{aligned}$$

Con estos esfuerzos determinados, pasamos a la segunda fase, o sea a la determinación de corrimientos debidos a estos esfuerzos hiperestáticos.

b) *Desplazamientos totales del extremo izquierdo.* Las deformaciones de dovelas de arco, debidas a las hiperestáticas introducidas, las denominamos: $u_{xp}, u_{yp}, u_{zp}, w_{xp}, w_{zp}$, y vienen dadas por las mismas ecuaciones obtenidas anteriormente, sin más que sustituir N_x, T_x, Q_x, M_x, D_x por:

$$N_{xp}, T_{xp}, Q_{xp}, M_{xp}, D_{xp},$$

y haciendo:

$$N_z = T_z = Q_z = M_z = D_z = 0.$$

Asimismo:

$$\sigma_3 = 0 \quad t_1 = t_2 = 0.$$

Así, pues, queda:

$$\begin{aligned} u_{xp} &= \frac{s}{E} \left(-\frac{N_{xp}}{S_a} - \frac{M_{xp}}{I_f} d_n \right) e, \\ u_{yp} &= \frac{2\eta(1+\nu)sQ_{xp}e}{E S_a} - \frac{s^2}{2E} \frac{M_{xp}}{I_f} e, \\ u_{zp} &= -\frac{2(1+\nu)s}{E} \frac{T_{xp}}{S_a} e; \\ w_{xp} &= -\frac{6(1+\nu)sD_{xp}}{Ee} e. \\ w_{zp} &= -\frac{sM_{xp}}{EI_f} e. \end{aligned}$$

Conocidas las deformaciones de la cara izquierda de la dovela con respecto a la cara derecha, pasamos a determinar los corrimientos totales del extremo izquierdo del arco, para lo cual empleamos las mismas fórmulas deducidas en el caso de pieza curva, con extremo izquierdo libre:

$$\begin{aligned} U_{xp} &= \cos \alpha_p \sum_1^p (u_{xp} \cos \alpha - u_{yp} \sin \alpha + w_{zp} Y_e)_i + \\ &+ \sin \alpha_p \sum_1^p (u_{xp} \sin \alpha + u_{yp} \cos \alpha - w_{zp} X_e)_i + \\ &+ (X_e \sin \alpha - Y_e \cos \alpha)_p \sum_1^p (w_{zp})_i. \\ U_{yp} &= -\sin \alpha_p \sum_1^p (u_{xp} \cos \alpha - u_{yp} \sin \alpha + w_{zp} Y_e)_i + \\ &+ \cos \alpha_p \sum_1^p (u_{xp} \sin \alpha + u_{yp} \cos \alpha - w_{zp} X_e)_i + \\ &+ (X_e \cos \alpha - Y_e \sin \alpha)_p \sum_1^p (w_{zp})_i. \end{aligned}$$

$$U_{zp} = \sum_1^P (u_{zp} - w_{xp} \operatorname{sen} \alpha (X_{ep} - X_e) + w_{xp} \cos \alpha (Y_{ep} - Y_e))_i.$$

$$W_{zp} = \sum_1^P (w_{zp})_i.$$

$$W_{xp} = \cos \alpha_p \sum_1^P (w_{xp} \cos \alpha)_i + \operatorname{sen} \alpha_p \sum_1^P (W_{xp} \operatorname{sen} \alpha)_i.$$

c) *Condición de igualdad de corrimientos.* — La condición definitiva será que el corrimiento, superposición de los dos estados anteriores sea:

$$U_{xp} + U_{xa} = U'_x;$$

$$U_{yp} + U_{ya} = U'_y;$$

$$U_{zp} + U_{za} = U'_z;$$

$$W_{xp} + W_{xa} = W'_x;$$

$$W_{zp} + W_{za} = W'_z.$$

En estas expresiones, dejamos constancia de unos corrimientos remanentes. Estos corrimientos son nulos, es decir:

$U'_x = U'_y = U'_z = W'_x = W'_z = 0$, si se supone empotramiento perfecto en la ladera.

En caso contrario, estos corrimientos tendrán un valor, que coincidirá precisamente con la deformación del cimiento en el extremo derecho.

3.8. FORMA PRÁCTICA DE ABORDAR EL PROBLEMA HIPERESTÁTICO EN LOS ARCOS.

Con vistas al cálculo electrónico, es mejor plantear el problema hiperestático por partes. En definitiva, consiste en ir obteniendo por separado y ordenadamente los distintos coeficientes del sistema de ecuaciones.

En efecto, el sistema viene dado por cinco ecuaciones del tipo: $U_{xp} + U_{xa} = U'_x$, y sus homólogas.

Pero

$$U_{xp} = K_1 N_p + K_2 Q_p + K_3 T_p + K_4 M_p + K_5 D_p.$$

U_{xa} es conocido en función de un reparto de cargas dado.

Si nos fijamos en la expresión de U_{xp} , vemos que K_1 es el valor de U_{xp} en el caso de que fuesen $N_p = 1$; y $Q_p = T_p = M_p = D_p = 0$.

Igualmente K_2 , sale para $Q_p = 1$, y los demás igual a 0, y así sucesivamente.

De modo que estos coeficientes se obtienen inmediatamente mediante los cinco sistemas de valores sucesivos:

Sistemas	N_p	Q_p	T_p	M_p	D_p
1.º	1	0	0	0	0
2.º	0	1	0	0	0
3.º	0	0	1	0	0
4.º	0	0	0	1	0
5.º	0	0	0	0	1

introducidos en las ecuaciones obtenidas anteriormente.

CAPÍTULO IV

DEFORMACIÓN DEL CIMIENTO Y EFECTOS TÉRMICOS

4.1. ESTUDIO DE LA DEFORMACIÓN DEL CIMIENTO.

Seguimos el procedimiento de F. Vögt, publicado en su artículo "Über die Berechnung der Fundament Deformation".

Sus fórmulas están basadas en estudios de Bousinesq y Cerruti, para obtener las deformaciones de un sólido elástico isótropo, cargado uniformemente, con fuerzas normales a su superficie, con fuerzas tangenciales, y con pares en sentido paralelo y normal al plano.

Estas fórmulas dan las distintas deformaciones del cimiento, relacionando las deformaciones con las fuerzas, y las características geométricas y elásticas, mediante unos coeficientes, debidos precisamente a Vögt.

Las características geométricas introducidas en el cálculo son las de un rectángulo equivalente a la superficie desarrollada de la cimentación. Este rectángulo ha de ser equivalente a los efectos de cargas deformaciones, a la superficie desarrollada de cimentación. Sus dimensiones serán a y b ($b > a$).

4.2. COEFICIENTES DE VÖGT.

Las deformaciones del cimiento vienen dadas por Vögt en la siguiente forma:

a) Rotaciones producidas por un momento unidad de eje paralelo al lado mayor b , del rectángulo de cimentación

$$\alpha' = \frac{K_1}{E_c b a^2}.$$

b) Traslaciones producidas por una fuerza unidad de dirección normal a la superficie de cimentación

$$\beta' = \frac{K_2}{b E_c}.$$

c) Traslaciones producidas por una fuerza unidad de dirección paralela al lado menor a , del rectángulo de cimentación

$$\gamma' = \frac{K_3}{b E_c}$$

d) Rotación producida por un momento de eje normal a la superficie de cimentación

$$\delta' = \frac{K_4}{E_c b a^2}$$

e) Rotación de eje paralelo al lado mayor b , producida por una fuerza unidad paralela al lado a ,

$$\alpha'' = \frac{K_5}{E_c a b}$$

f) Traslación paralela al lado a , producida por un momento unidad de eje paralelo al lado b ,

$$\gamma'' = \frac{K_6}{E_c a b}$$

g) Traslación producida por una fuerza de dirección paralela al lado mayor b , del rectángulo de cimentación

$$\gamma''' = \frac{K'_3}{E_c b}$$

El módulo de elasticidad empleado, E_c , es el que corresponde a la roca de cimentación.

Los coeficientes K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 y K'_3 , son los coeficientes de Vögt. Sus valores se obtienen para distintas relaciones $\frac{b}{a}$, según gráficos dados por el autor.

Sin embargo, el Bureau of Reclamation sigue la práctica de determinar los coeficientes, entrando en el gráfico con un valor, que en el caso de K_1, K_3 y K_5 es $\frac{b}{a}$; en el caso de K_2, K_4 y K'_3 , vale $\frac{b}{2a}$ siempre que las superficies desarrolladas de las cimentaciones de ambas márgenes sean semejantes.

En el caso de una cimentación heterogénea, no hay nada establecido.

4.3. DESPLAZAMIENTOS DE LOS APOYOS DE LOS ARCOS.

El ángulo ψ , tal como se indica en la figura 7.^a, representa el formado por la sección de arco, y el plano del cimient.

Las acciones sobre la cimentación estarán producidas por los esfuerzos transmitidos por las dovelas contiguas. Estas acciones serán iguales y de sentido

contrario a las que actúan sobre la cara de la dovela, frontal a la cimentación, tal como se indica en la figura 7.^a.

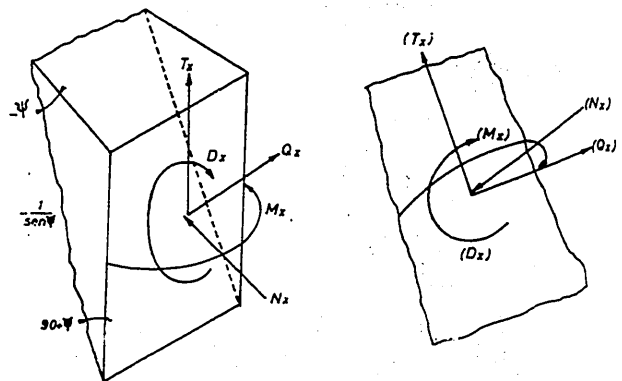


Figura 7.^a

Refiriendo los esfuerzos al plano de la cimentación, se tendrá:

$$(N_x) = -N_x \sin \Psi - T_x \cos \Psi$$

$$(T_x) = N_x \cos \Psi - T_x \sin \Psi$$

$$(Q_x) = Q_x$$

$$(M_x) = -M_x \sin \Psi + D_x \cos \Psi$$

$$(D_x) = -M_x \sin \Psi + M_x \cos \Psi$$

Basándonos en las expresiones de Vögt, tendremos los corrimientos referidos al plano del cimient, siendo e el ancho de la cimentación:

$$\alpha' = \frac{(M_x)}{b} \frac{K_1}{E_c e^2} = \frac{(-M_x \sin \Psi + D_x \cos \Psi)}{-1/\sin \Psi} \frac{K_1}{E_c e^2}$$

$$\beta' = \frac{(N_x)}{b} \frac{K_2}{E_c} = \frac{(-N_x \sin \Psi - T_x \cos \Psi)}{-1/\sin \Psi} \frac{K_2}{E_c}$$

$$\gamma' = \frac{(Q_x)}{b} \frac{K_3}{E_c} = \frac{Q_x}{\sin \Psi} \frac{K_3}{E_c}$$

$$\delta' = \frac{(D_x)}{b} \frac{K_4}{E_c e^2} = \frac{(-D_x \sin \Psi - M_x \cos \Psi)}{\sin \Psi} \frac{K_4}{E_c e^2}$$

$$\alpha'' = \frac{(Q_x)}{b} \frac{K_5}{E_c e} = \frac{Q_x}{\sin \Psi} \frac{K_5}{E_c e}$$

$$\gamma'' = \frac{(M_x)}{b} \frac{K'_3}{E_c e} = \frac{(-M_x \sin \Psi + D_x \cos \Psi)}{\sin \Psi} \frac{K'_3}{E_c e}$$

$$\gamma''' = \frac{(T_x)}{b} \frac{K'_3}{E_c} = \frac{(N_x \cos \Psi - T_x \sin \Psi)}{\sin \Psi} \frac{K'_3}{E_c}$$

Queremos obtener los desplazamientos en las direcciones definidas por los ejes indicados. Para ello, los corrimientos referidos a la cimentación han de referirse de nuevo a la cara vertical del arco.

Así, pues, tendremos:

$$u_{xc} = -\gamma''' \cos \Psi + \beta' \sin \Psi = \\ = \frac{\sin \Psi}{e E_c} (a T_x (K_2 - K'_3) \sin \Psi \cos \Psi + a N_x (K_2 \sin^2 \Psi + \\ + K'_3 \cos^2 \Psi)).$$

$$u_{yc} = -(\gamma' + \gamma'') = \frac{\sin \Psi}{E_c e} Q_x e K_3 +$$

$$+ D_x \cos \Psi K_5 - M_x \sin \Psi K_5).$$

$$u_{zc} = \beta' \cos \Psi + \gamma''' \sin \Psi =$$

$$= \frac{\sin \Psi}{e E_c} (N_x e (K_2 - K'_3) \sin \Psi \cos \Psi +$$

$$+ e T_x (K_2 \cos^2 \Psi + K'_3 \sin^2 \Psi)).$$

$$w_{xc} = \delta' \sin \Psi - (\alpha' + \alpha'') \cos \Psi =$$

$$= \frac{\sin \Psi}{e E_c} \left(\frac{M_x}{e} \sin \Psi \cos \Psi (K_4 - K_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{D_x}{e} (K_4 \sin^2 \Psi + K_1 \cos^2 \Psi) + Q_x K_5 \cos \Psi \right).$$

$$w_{zc} = \delta' \cos \Psi + (\alpha' + \alpha'') \sin \Psi =$$

$$= \frac{\sin \Psi}{E_c e} \left(\frac{M_x}{e} (K_4 \cos^2 \Psi + K_1 \sin^2 \Psi) - \right.$$

$$\left. - Q_x K_5 \sin \Psi + \frac{D_x}{e} \sin \Psi \cos \Psi (K_4 - K_1) \right).$$

Los sentidos positivos de estas deformaciones son los adoptados tanto en arcos como en ménsulas, para cualquier tipo de deformación.

4.4. DESPLAZAMIENTOS DE APOYOS DE MÉNSULAS.

De forma semejante al caso anterior, se tendrá (figura 8.^a):

$$(N_z) = N_z \sin \varphi - T_z \cos \varphi.$$

$$(T_z) = N_z \cos \varphi + T_z \sin \varphi.$$

$$(Q_z) = Q_z.$$

$$(M_z) = D_z \cos \varphi + M_z \sin \varphi.$$

$$(D_z) = D_z \sin \varphi + M_z \cos \varphi.$$

Conservamos la notación de Vögt (φ) para el ángulo indicado en la figura.

Basándose en las expresiones de Vögt, podremos escribir:

$$\alpha' = \frac{(M_z)}{b} \frac{K_1}{E_c e^2} = \frac{D_z \cos \varphi + M_z \sin \varphi}{E_c e^2} K_1 \sin \varphi;$$

$$\beta' = \frac{(N_z) K_2}{b E_c} = \frac{N_z \sin \varphi - T_z \cos \varphi}{E_c} K_2 \sin \varphi;$$

$$\gamma' = \frac{(Q_z) K_3}{b E_c} = \frac{Q_z}{E_c} K_3 \sin \varphi;$$

$$\delta' = \frac{(D_z) K_4}{E_c b e^2} = \frac{D_z \sin \varphi - M_z \cos \varphi}{E_c e^2} K_4 \sin \varphi;$$

$$\alpha'' = \frac{(Q_z) K_5}{e E_c b} = \frac{Q_z}{E_c e} K_5 \sin \varphi;$$

$$\gamma'' = \frac{(M_z) K_5}{E_c e b} = \frac{D_z \cos \varphi + M_z \sin \varphi}{E_c e} K_5 \sin \varphi;$$

$$\gamma''' = \frac{(T_z) K_3}{E_c b} = \frac{N_z \cos \varphi + T_z \sin \varphi}{E_c} K'_3 \sin \varphi.$$

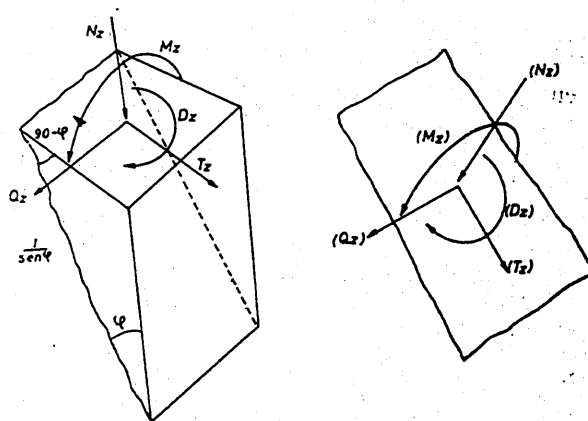


Figura 8.^a

Con estos corrimientos referidos a la cimentación obtenemos los definitivos, en la dirección de los ejes de la dovela:

$$u_{xc} = \gamma''' \sin \varphi - \beta' \cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{E_c e} (e N_z (K'_3 - K_2) \sin \varphi \\ \cos \varphi + e T_z (K'_3 \sin^2 \varphi + K_2 \cos^2 \varphi));$$

$$u_{yc} = \gamma' + \gamma'' = \frac{\sin \varphi}{e E_c} (e Q_z K_3 + D_z K_5 \cos \varphi + \\ + M_z K_5 \sin \varphi);$$

$$u_{zc} = \beta' \sin \varphi + \gamma''' \cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{e E_c} (e N_z (K_4 \sin^2 \varphi + \\ + K'_3 \cos^2 \varphi) + e T_z (K'_3 - K_2) \sin \varphi \cos \varphi).$$

$$w_{xc} = \delta' \cos \varphi + (\alpha' + \alpha'') \sin \varphi = \frac{\sin \varphi}{E_c e} \left(\frac{M_z}{e} (K_4 \cos^2 \varphi + K_1 \sin^2 \varphi) + \frac{D_z}{e} (K_1 - K_4) \sin \varphi \cos \varphi + K_5 Q_z \sin \varphi \right);$$

$$w_{zc} = + \delta' \sin \varphi + (\alpha' + \alpha'') \cos \varphi = \frac{\sin \varphi}{E_c e} \left(\frac{M_z}{e} (K_1 - K_4) \sin \varphi \cos \varphi + \frac{D_z}{e} (K_4 \sin^2 \varphi + K_1 \cos^2 \varphi) + Q_z K_5 \cos \varphi \right).$$

4.5. EFECTOS TÉRMICOS.

El efecto de temperatura se hace intervenir en los cálculos actuando sobre arcos y ménsulas.

Su ajuste se realiza a través del mismo procedimiento seguido para repartir la presión hidrostática.

En efecto: en las fórmulas que dan las deformaciones de dovelas, se ha supuesto una deformación temperatura en arcos y ménsulas, que se ajusta posteriormente, como las deformaciones debidas al resto de las solicitaciones.

(Continuará.)

