

DETERMINACION ANALITICA DEL ABRIGO PRODUCIDO POR UN DIQUE SEMIINDEFINIDO EN PROFUNDIDAD CONSTANTE

Por MIGUEL ANGEL HACAR BENITEZ

Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

Se indica una función que permite determinar en cualquier punto abrigado por un dique la altura de la ola y su fase, haciendo aplicación a un ejemplo.

1. INTRODUCCIÓN.

En el caso de tratarse de un dique como el representado en planta en la figura 1.^a por DD' , hacia el que avanza el oleaje con celeridad c , si la profundidad h es prácticamente constante en la zona que de-

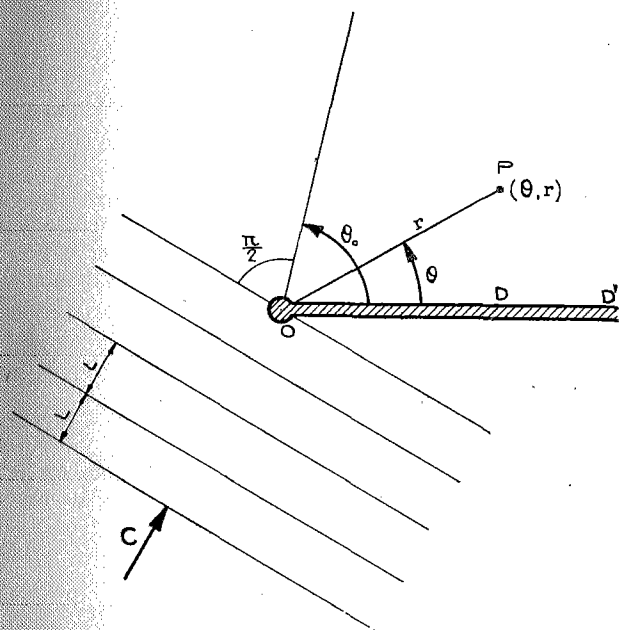


Figura 1.^a

seamos estudiar, la determinación de la amplitud o altura de la ola, así como su fase en un punto cualquiera P , es cuestión que se resuelve analíticamente sin más que hallar el módulo y el argumento de una expresión compleja, función de las coordenadas de posición de dicho punto P , como vamos a ver a continuación.

(1) Véase, por ejemplo, Lamb: "Hidrodinámica", 1932. Dover Publications, o N. N. Djoukovski y P. K. Bojitch: "La houle et son action sur les côtes et les ouvrages côtiers". Ed. Eyrolles, París.

2. FUNCIÓN COMPLEJA AUXILIAR.

Sea $L = 2\pi/k$ la longitud de ola antes de ser perturbada por el dique, y

$$c = \sqrt{\frac{2\pi g}{L} \tanh \frac{2\pi h}{L}} = \sqrt{\frac{g}{k} \tanh kh}, \quad (1)$$

su celeridad.

La función de las coordenadas polares (θ, r) del punto P :

$$F(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \left[\frac{\pi}{4} - kr \cos(\theta_0 - \theta) \right]} \int_{-\infty}^{u_1} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}} dv + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i \left[\frac{\pi}{4} - kr \cos(\theta_0 + \theta) \right]} \int_{-\infty}^{u_2} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}} dv, \quad [1]$$

siendo $i = \sqrt{-1}$, es tal que su *módulo* nos da la relación entre la altura de la ola en P y la altura de la ola antes de acercarse al dique. Su *argumento* nos da la fase (2).

Los límites superiores de las integrales anteriores son:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \sin \frac{\theta_0 - \theta}{2}, \quad [2]$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{4kr}{\pi}} \sin \frac{\theta_0 + \theta}{2}. \quad [2']$$

3. CÁLCULO DE LA FUNCIÓN.

Recordando que se llaman integrales de Fresnel a las dos siguientes (3):

$$C(u) = \int_0^u \cos \frac{\pi u^2}{2} du \quad S(u) = \int_0^u \sin \frac{\pi u^2}{2} du,$$

(2) Véase J. A. Putnam and R. S. Arthur: "Diffraction of water waves by breakwaters", en *Transactions American Geophysical Union*, agosto 1948, págs. 481 a 490.

(3) Véase, por ejemplo, Bruhat: "Optique", Masson et Cie., págs. 184 y siguientes.

y que, por lo tanto:

$$\int_0^u e^{-\frac{i\pi v^2}{2}} dv = C(u) - iS(u).$$

Como $C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2}$, resulta que:

$$\int_{-\infty}^{u_1} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}} dv = \left[\frac{1}{2} - C(-u_1) \right] + i \left[S(-u_1) - \frac{1}{2} \right]; \quad [3]$$

y del mismo modo:

$$\int_{-\infty}^{u_2} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}} dv = \left[\frac{1}{2} - C(-u_2) \right] + i \left[S(-u_2) - \frac{1}{2} \right]. \quad [3']$$

Las integrales quedan, pues, obtenidas sustituyendo en [3] y [3'] los valores de u_1 y u_2 hallados en [2] y [2'].

Por la utilidad que puede tener en las aplicaciones, damos al final una tabla de integrales de Fresnel. Por interpolación lineal o parabólica obtendríamos cualquier valor intermedio.

Sustituyéndolas en [1] obtenemos la función $F(r, \theta)$ buscada para el punto P .

4. EJEMPLO.

Para aclarar mejor lo que hemos expuesto, vamos a aplicarlo a un ejemplo (fig. 2.^a).

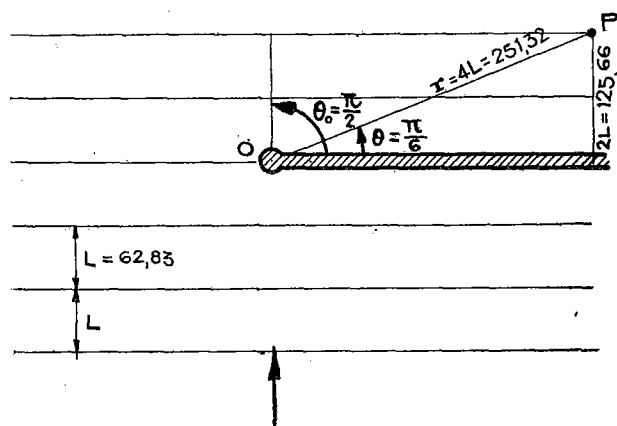


Figura 2.^a

Sea $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ (olas avanzando perpendicularmente al dique de abrigo).

Longitud de ola, $L = 20\pi = 62,83$ m.

Por tanto, $K = 2\pi/L = 0,1$.

Calculemos el abrigo en el punto P situado detrás del dique cuyas coordenadas sean:

$$\theta = \frac{\pi}{6} = 30^\circ; \quad r = 4L = 80 \cdot \pi = 251,20 \text{ m.}$$

Las fórmulas [2] y [2'] dan:

$$u_1 = -\sqrt{\frac{4 \times 0,1 \times 80 \pi}{\pi}} \sin \frac{\pi}{6} = -\sqrt{8};$$

$$u_2 = -\sqrt{\frac{4 \times 0,1 \times 80 \pi}{\pi}} \sin \frac{\pi}{3} = -\sqrt{24},$$

y tomando de la tabla de las integrales de Fresnel, después de interpolar, obtenemos:

$$C(\sqrt{8}) = 0,599; \quad S(\sqrt{8}) = 0,696;$$

$$C(\sqrt{24}) = 0,327; \quad S(\sqrt{24}) = 0,485.$$

Sustituyendo estos valores en [3] y [3'], queda:

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{8}} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}} dv = (0,500 - 0,599) + i(0,696 - 0,500) = -0,099 + 0,196i;$$

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{24}} e^{-\frac{i\pi v^2}{2}} dv = (0,500 - 0,327) + i(0,485 - 0,500) = 0,173 - 0,015i.$$

Sustituyendo los valores de estas integrales en [1] y teniendo en cuenta que las cantidades que las multiplican son:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - 0,1 \times 80 \cos \frac{\pi}{3}\right)} = 0,5 + 0,5i;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(\frac{\pi}{4} - 0,1 \times 80 \cos \frac{2\pi}{3}\right)} = 0,5 + 0,5i,$$

resulta:

$$F(r, \theta) = (0,5 + 0,5i)(-0,099 + 0,196i) + (0,5 + 0,5i)(0,173 - 0,015i) = 0,054 + 0,127i.$$

Esta cantidad compleja tiene de módulo 0,139, y de argumento, $\arctg 2,35 = 67^\circ$.

Por lo tanto, la altura de la ola en P viene a ser casi el 14 por 100 de la altura de la ola antes de atacar el dique.

5. COMPARACIÓN CON EL MÉTODO DEL PROF. IRIBARRÉN.

En la figura 3.^a reproducimos el esquema que resultaría de los frentes de onda al aplicar su método (1).

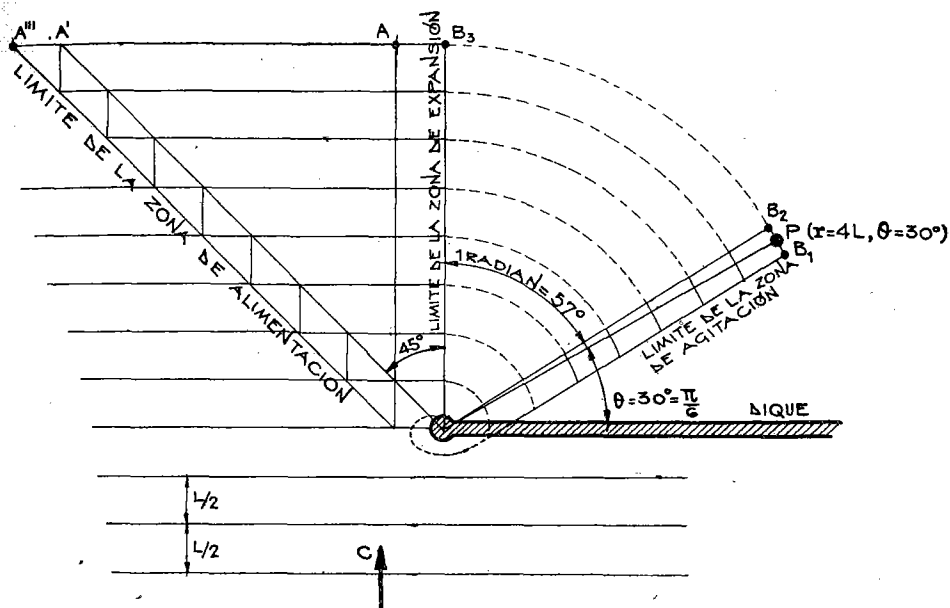


Figura 3.^a

La línea $A''' A' A B_3 B_2 P B_1$ aparece rectificada en la figura 4.^a, y perpendicularmente a ella hemos dibujado la ley sinusoidal (con tangente horizontal en A_1) que da de alturas de la ola.

6. APLICACIÓN PRÁCTICA.

Para facilitar los cálculos es conveniente determinar la altura relativa de la ola y su fase en los puntos

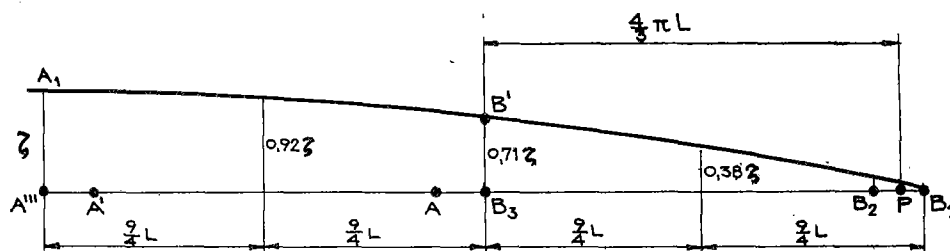


Figura 4.^a

De este cuarto de senoide resulta como factor de multiplicación de la altura de la ola en P (ξ es la altura de la ola antes de ser perturbada por el dique):

$$\cos \frac{A''P}{A''B_1} \frac{\pi}{2} = \frac{\frac{9}{2}L + \frac{\pi}{3}4L}{9L} =$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^2}{13,5} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{13,5} \right) = 0,055,$$

(1) Véase Iribarren: REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, enero 1941.

de una malla. Uniendo luego los puntos próximos de la misma fase, se obtienen los frentes de onda (figura 5.^a).

Conviene hacer los cálculos para una serie de puntos P_1, P_2, P_3, \dots , del mismo radio vector $OP_1 = OP_2 = OP_3 = \dots$, y tales que sus ángulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$, difieran en una constante $\Delta\theta$ (que puede ser 10° ó 15°).

Después pasaríamos a los puntos $P'_1, P'_2, P'_3 \dots$ Y así sucesivamente a los $P''_1, P''_2, P''_3, \dots$, etc.

Examinando las fórmulas [1], [2] y [2'] vemos

VALOR DE LAS INTEGRALES DE FRESNEL.

u	$C(u)$	$S(u)$	u	$C(u)$	$S(u)$	u	$C(u)$	$S(u)$
0,0	0,0000	0,0000	16,0	0,4743	0,5961	36,0	0,4342	0,5094
0,1	0,2521	0,0084	16,5	0,4323	0,5709	36,5	0,4382	0,4769
0,2	0,3554	0,0237	17,0	0,4080	0,5293	37,0	0,4571	0,4504
0,3	0,4331	0,0434	17,5	0,4066	0,4818	37,5	0,4863	0,4363
0,4	0,4966	0,0665	18,0	0,4278	0,4400	38,0	0,5184	0,4380
0,5	0,5502	0,0924	18,5	0,4660	0,4139	38,5	0,5456	0,4547
0,6	0,5962	0,1205	19,0	0,5113	0,4093	39,0	0,5613	0,4822
0,7	0,6356	0,1504	19,5	0,5528	0,4269	39,5	0,5620	0,5137
0,8	0,6693	0,1818	20,0	0,5804	0,4616	40,0	0,5475	0,5415
0,9	0,6979	0,2143	20,5	0,5878	0,5049	40,5	0,5217	0,5580
1,0	0,7217	0,2476	21,0	0,5738	0,5459	41,0	0,4909	0,5616
1,5	0,7791	0,4155	21,5	0,5423	0,5748	41,5	0,4627	0,5494
2,0	0,7533	0,5628	22,0	0,5012	0,5849	42,0	0,4439	0,5253
2,5	0,6710	0,6658	22,5	0,4607	0,5742	42,5	0,4390	0,4953
3,0	0,5610	0,7117	23,0	0,4307	0,5458	43,0	0,4490	0,4668
3,5	0,4520	0,7002	23,5	0,4181	0,5068	43,5	0,4713	0,4468
4,0	0,3682	0,6421	24,0	0,4256	0,4670	44,0	0,5004	0,4399
4,5	0,3252	0,5565	24,5	0,4511	0,4361	44,5	0,5290	0,4477
5,0	0,3285	0,4659	25,0	0,4879	0,4212	45,0	0,5502	0,4682
5,5	0,3724	0,3918	25,5	0,5269	0,4258	45,5	0,5590	0,4962
6,0	0,4433	0,3499	26,0	0,5586	0,4483	46,0	0,5533	0,5248
6,5	0,5222	0,3471	26,5	0,5755	0,4829	46,5	0,5347	0,5471
7,0	0,5901	0,3812	27,0	0,5738	0,5211	47,0	0,5078	0,5577
7,5	0,6318	0,4415	27,5	0,5541	0,5534	47,5	0,4793	0,5540
8,0	0,6393	0,5120	28,0	0,5217	0,5721	48,0	0,4562	0,5373
8,5	0,6129	0,5755	28,5	0,4846	0,5731	48,5	0,4439	0,5117
9,0	0,5608	0,6172	29,0	0,4518	0,5562	49,0	0,4455	0,4834
9,5	0,4969	0,6286	29,5	0,4314	0,5260	49,5	0,4603	0,4595
10,0	0,4370	0,6084	30,0	0,4279	0,4900	50,0	0,4847	0,4457
10,5	0,3951	0,5632	30,5	0,4420	0,4570			
11,0	0,3804	0,5048	31,0	0,4700	0,4350			
11,5	0,3952	0,4478	31,5	0,5048	0,4291			
12,0	0,4346	0,4058	32,0	0,5379	0,4406			
12,5	0,4881	0,3882	32,5	0,5613	0,4663			
13,0	0,5425	0,3983	33,0	0,5694	0,4999			
13,5	0,5846	0,4325	33,5	0,5605	0,5329			
14,0	0,6047	0,4818	34,0	0,5370	0,5575			
14,5	0,5989	0,5337	34,5	0,5049	0,5677			
15,0	0,5693	0,5758	35,0	0,4720	0,5613			
15,5	0,5240	0,5982	35,5	0,4464	0,5401			

(1) Véase E. Jahnke a, F. Emde: "Funktionentaffeln", páginas 35 a 37.

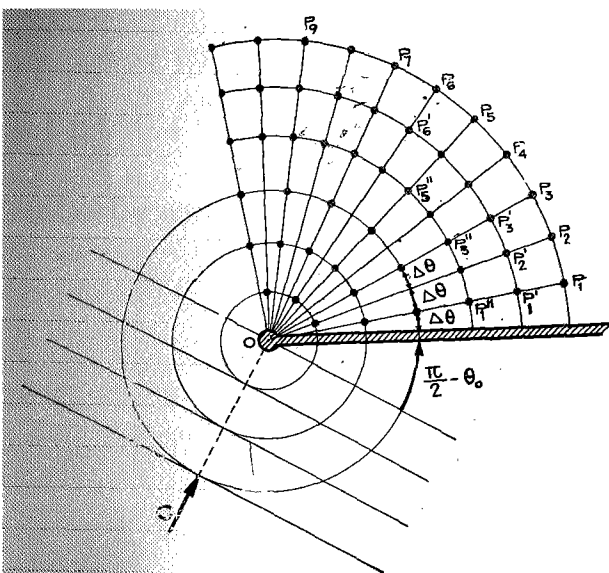


Figura 5.ª

que en ellas intervienen como únicos parámetros θ_0 y el producto $kr = 2\pi \frac{r}{L}$.

Por tanto, podríamos hacer el estudio de la distribución del oleaje para distintos ángulos θ_0 , variables, por ejemplo, de 10 en 10 grados entre 40 y 130°.

Estos 10 gráficos hechos con puntos, tales que sus radios vectores fuesen múltiplos de L o de $L/2$, nos servirían para todos los casos sin más que en cada aplicación tomarlos a escala conveniente.

Es trabajo que dejamos para otra ocasión.

En el caso de que la profundidad sea variable, determinaríamos los frentes de ondas inmediatas al extremo del dique (tomando una profundidad media constante) y luego continuaríamos determinando su avance (en profundidad variable) por el método de los planos de oleaje.