

ESTUDO SISMICO DE BARRAGENS-ABOBADA PELA ANALISE DOS SEUS PRINCIPAIS MODOS DE VIBRAÇÃO

Por J. LAGINHA SERAFIM
Engenheiro Civil (IST).

e
JOSE DE OLIVEIRA PEDRO
Engenheiro Civil (IST).

INTRODUCCION

La aparición de un artículo en lengua extranjera en nuestra Revista — que a más de centenaria es el órgano de expresión profesional de un cuerpo nacional que se fundó hace más de ciento sesenta y cinco años — justifica una corta glosa de los antecedentes del tema.

Hace bastantes años la Revista portuguesa "Electricidade", que es vocera del gran movimiento de construcción hidroeléctrica en el vecino país, viene acogiendo en sus muy solventes páginas la colaboración de ingenieros españoles con el gesto cortés y significativo de no traducir nuestro idioma. Comentando este hecho con los colegas portugueses, la sugerencia de una reciprocidad en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS se impuso, naturalmente.

"Electricidade" consideró que debía tramitar su solicitud a través del Comité Nacional de Grandes Presas, entendiendo, acertadamente, que este Organismo era el llamado a ponderar, en razón de su autoridad técnica en el campo internacional, las calificaciones de "Electricidade" en otro plano, ya que la cordialidad había que darla por descontada.

El Comité Español de Grandes Presas no resolvió a la ligera, ni movido por su espontánea simpatía hacia la pretensión de "Electricidade": consultó con el Ministerio de Asuntos Exteriores, y antes de trasladar su recomendación al Comité de Redacción de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, midió la trascendencia de su decisión, teniendo en cuenta la importancia que implica amalgamar el más puro utensilio de nuestra técnica, es decir, el idioma, su instrumento de precisión con otra lengua, que no por fraterna deja de ser foránea. Era imposible no plantear el problema en términos de Hispanidad "v. s." Iberidad. Sería difícil pronunciarse ante tal ecuación — y nunca mejor llamada así — a la preposición que sitúa la raza, en términos igualatorios, con el corazón y el destino geográfico.

Afortunadamente, el Comité Español de Grandes Presas encontró el "considerando" clave para decidir. ¿Es que nuestros dos países no dependen, por encima y antes que cualquier otra razón vinculatoria, de una unidad de destino en lo hidrográfico, en lo hidro-

eléctrico? Los cuatro ríos de la meseta, como los cuatro ríos del Paraíso, son fuentes geológicas con respecto a la existencia de ambos pueblos. Y los otros, esos ríos que arrastran sus aguas y sus arenas de oro por tierras que entienden de "saudades", nuestra Galicia, nuestra antena atlántica, lanzan una frontera que, desde el punto de vista de los ingenieros de agua, no tiene realidad.

El Comité de Redacción de la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS, ha hecho una vez más honor a su estilo hidalgo y deportivo, y refrendó la recomendación del Comité de Grandes Presas.

Se inicia la colaboración portuguesa en la REVISTA DE OBRAS PÚBLICAS con un artículo de J. Laginha Serafim y José de Oliveira Pedro. Ninguno de los dos requiere presentación. Son amigos, grandes amigos de todos nosotros y firmas bien conocidas en la literatura técnica moderna en relación con la Grandes Presas. Joaquim Serafim, que además de gran ingeniero es hombre de afiladas sensibilidades, ha acertado en la elección del tema y también en sostener el tono que cuadra con la circunstancia. Tienes ante ti, querido compañero, un artículo de auténtica calidad, enjundioso, trascendental, como sea la colaboración que a partir de ahora se inicia con entusiasmo bilateral.

J. TORÁN

del Comité Español de Grandes Presas

1. Introdução.

A acção dos sismos sobre as barragens é, fundamentalmente, de dois tipos (1):

- desenvolvimento de forças de inércia no corpo da barragem que se vão sobrepôr às cargas estáticas aplicadas;
- desenvolvimento de forças de inércia nas massas de água em contacto com os paramentos, que provoquem variações da pressão hidrostática aplicada sobre estes.

Estas acções são particularmente importantes quando a estrutura tem períodos de vibração da ordem de grandeza dos períodos da vibração sísmica.

A consideração das acções sísmicas no dimensionamento de barragens de betão tem sido feita, em geral, por intermédio de coeficientes sísmicos e pelas fórmulas de Westergaard relativas à acção da inércia nas massas de água (2). Ultimamente, porém, estes métodos têm vindo a ser substituídos por ensaios dinâmicos sobre modelos reduzidos, em fase elástica e até à rotura (3, 4). A observação dos modos e frequências de vibração de algumas barragens (5) tem também contribuído para um melhor conhecimento do comportamento destas estruturas quando submetidas a fortes acelerações.

Nas barragens do tipo abóbada são especialmente importantes as vibrações na direcção radial, nas de gravidade tem ainda interesse a consideração de vibrações na direcção vertical e nas de contrafortes e abóbadas múltiplas têm particular importância as vibrações laterais.

Neste trabalho, procura-se desenvolver um método analítico, que consiste na análise dos modos e frequências de vibração de estruturas com muitos graus de liberdade, adaptando-o ao estudo sísmico de uma barragem abóbada. Este estudo é feito a partir da matriz de flexibilidade, que é definida por um método de ajustamento arcos-consolas inspirado no "Trial-Load Method" do Bureau of Reclamation. A consideração da solicitação

sísmica faz-se por intermédio das curvas espectrais estabelecidas por Housner (6) e Bycroft (7), para o sismo de "El Centro". N. S. 18-6-1940, determinando-se os efeitos máximos desenvolvidos na estrutura.

O método aqui referido foi aplicado ao estudo sísmico da barragem de Cachi, a construir na Costa Rica, figura 1, uma abóbada delgada de dupla curvatura, simétrica, com 80 m. de altura máxima acima da fundação, cerca de 1 de relação corda-altura e 7 m. de espessura na base da consola central.

2. Matriz de flexibilidade da abóbada.

Considera-se uma malha de cálculo de elementos de espessura unitária, horizontais (arcos) e verticais (consolas), desligados entre si nos diversos vértices da malha e apenas ligados nos vértices sobre a fundação, figura 1.

As deformações e as tensões correspondentes, desenvolvidos na estrutura por determinada solicitação, podem estudar-se supondo que a solicitação actua inicialmente apenas sobre um dos conjuntos de elementos, calculando as deformações a que dá origem em cada vértice da malha e aplicando em seguida um conjunto de esforços internos de ajustamento, de sinais opostos em cada ponto, que compatibilizam as deformações finais dos dois conjuntos de elementos de cálculo.

Os esforços internos de ajustamento unitários são definidos com o valor unidade no vértice correspondente da malha e varia do linearmente, segundo o arco e segundo a consola, até se anularem sobre os elementos vizinhos, figura 1.

A matriz de flexibilidade, cujos elementos são as deformações nos vértices da malha de cálculo devidos à actuação de cargas unitárias associadas a esses vértices, é determinada para cargas distribuídas de forma idêntica aos esforços internos de ajustamento.

Neste trabalho consideram-se apenas ajustamentos radiais, mas a formulação é idêntica para qualquer número de ajustamentos.

Os deslocamentos radiais e as tensões, desenvolvidos nas diversas secções dos arcos e das consolas de cálculo, elasticamente apoiados sobre a fundação, pela actuação de cargas radiais distribuídas e também por cargas concentradas sobre as nascenças dos arcos, são calculados por intermédio de programas previamente preparados para a análise corrente da barragem (8). Estes programas aplicam-se a estruturas e solicitações simétricas, tendo-se feito a sua generalização para solicitações assimétricas (Apêndice 1). No entanto, dispõe-se hoje de um programa que permite fazer o cálculo de estruturas e solicitações assimétricas (9).

Com os deslocamentos radiais assim calculados estabelecem-se as matrizes de flexibilidade dos arcos $[A]$ e das consolas $[C]$ funcionando como independentes, isto é, apenas ligados nos vértices da malha sobre a fundação. Nestas matrizes, que se apresentam nos quadros 1 e 2, além dos deslocamentos de um dado elemento devidos a cargas que actuam sobre ele próprio, aparecem deslocamentos desse elemento devidos a cargas que actuam sobre os elementos ligados a ele através da fundação. Estas interacções são calculadas por intermédio de cargas e deslocamentos aplicados nas nascenças dos arcos e na base das consolas.

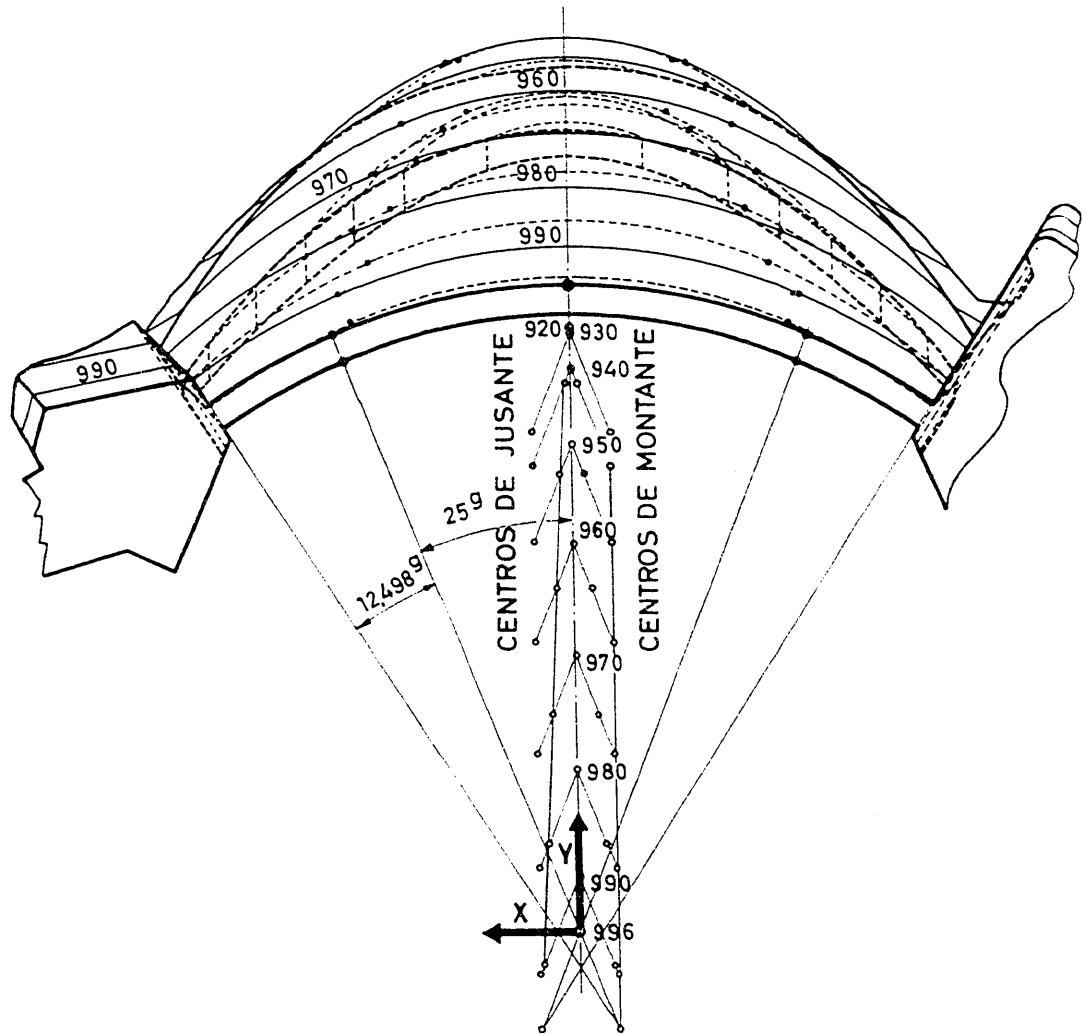
Designando por $[X]$ a matriz de esforços internos de ajustamento, com o sinal correspondente à actuação sobre os arcos, devidos às cargas unitárias para que é definida a matriz de flexibilidade, a condição de ajustamento das deformações dos arcos e das consolas nos diversos vértices da malha de cálculo pode escrever-se:

$$[A] + [A][X] = [C] + [C](-X). \quad (1)$$

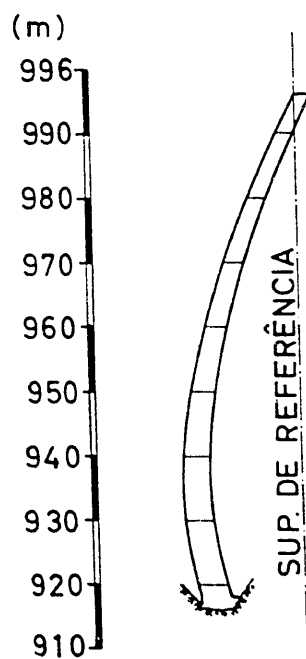
Esta equação, escrita na forma:

$$[A + C][X] = [C] - [A], \quad (2)$$

DEFINIÇÃO EM PLANTA



PERFIL CENTRAL



MALHA DE ARCOS E CONSOLAS DE CÁLCULO (ALÇADO PLANIFICADO NA SUPERFÍCIE DE REFERÊNCIA)

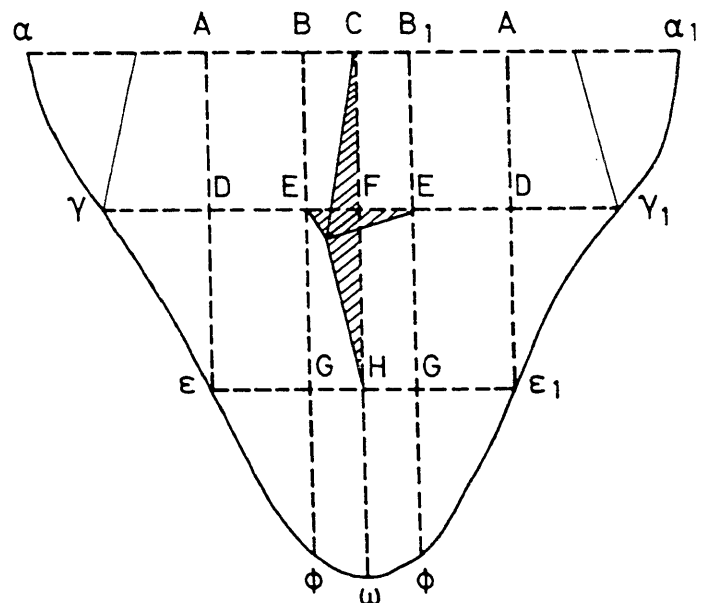


Fig. 1. — Barragem de Cachi.

e resolvida em ordem a $[X]$, permite determinar os esforços internos de ajustamento. Na equação (2) consideram-se apenas, para as diversas matrizes, as linhas correspondentes aos vértices de ajustamento, visto que, pela própria definição da malha de cálculo, as deformações nos vértices sobre a fundação resultam automaticamente ajustadas. A matriz $[A + C]$ é transformada numa matriz quadrada pelo princípio de continuidade dos diagramas de esforços internos de ajustamento na vizinhança da fundação.

As matrizes de termos independentes $[C]$ ou $[A]$ que representam, nos sistemas anteriores, os deslocamentos iniciais nos vértices de ajustamento devidos à actuação das cargas exteriores unitárias, são rectangulares, correspondendo as linhas aos vértices de ajustamento e as colunas a todos os vértices da malha de cálculo. Adopta-se $[C]$ ou $[A]$ consoante a carga actua inicialmente sobre as consolas ou sobre os arcos. De forma idêntica, a matriz de esforços internos de ajustamento $[X]$ é rectangular, correspondendo as suas linhas aos vértices de ajustamento e as suas colunas a todos os vértices da malha.

A matriz de flexibilidade $[F]$, isto é, o conjunto de deformações finais nos vértices da malha de cálculo devidas às cargas unitárias associadas a esses vértices, calcula-se a partir de $[X]$, por intermédio de qualquer dos membros da equação (1). Neste caso, as matrizes $[A]$ e $[C]$ como termos independentes são matrizes quadradas, correspondendo as suas linhas e colunas a todos os vértices da malha de cálculo, e, como factores, são matrizes rectangulares, com as linhas correspondentes a todos os vértices da malha e com as colunas respeitantes aos vértices de ajustamento. Assim, a matriz de flexibilidade resulta uma matriz quadrada, com as linhas e colunas correspondentes a todos os vértices da malha.

3. Equações do movimento.

Considere-se a abóbada representada na figura 1, elásticamente apoiada sobre a fundação, como um sistema de massas distribuídas num domínio bidimensional.

A equação do movimento da massa por unidade de superfície associada ao ponto P , ($m_p = \rho e_p$, sendo ρ a massa específica e e_p a espessura) e considerando apenas um grau de liberdade (deslocamentos radiais, R) pode escrever-se:

$$m_p \ddot{R}_p + \int_S K_p(S) R(S) dS = 0, \quad (3)$$

em que $K_p(S)$ é uma função característica da elasticidade da estrutura.

Esta equação exprime a igualdade das forças elásticas e de inércia, num referencial absoluto, em cada instante do movimento. Adoptando como referencial uma superfície S_0 do interior do maciço de fundação, que tem deslocamentos radiais muito pequenos em relação aos deslocamentos da estrutura e sobre a qual actua, no plano horizontal, uma aceleração sísmica constante de ponto para ponto, a equação (3) resulta:

$$m_p \ddot{r}_p + \int_S K_p(S) r(S) dS = -m_p \ddot{R}_0 \quad (4)$$

em que r representa os deslocamentos radiais em relação à superfície S_0 (sendo, por hipótese, $r \approx R$) e $\ddot{R}_0$ a componente radial da aceleração sísmica na superfície S_0 .

Para o movimento de conjunto da abóbada deve verificar-se simultaneamente uma equação do tipo (4) para cada uma das suas massas, isto é, verifica-se, em cada instante, equilíbrio entre os sólidos de forças elásticas e de inércia associados à sua superfície. Definindo estes sólidos de forças pelo valor das suas ordenadas nos vértices de uma malha de arcos e consolas, fig. 1, e considerando variações lineares entre cada dois elementos consecutivos, o conjunto das equações do movimento pode escrever-se:

$$[m] \ddot{r} + [K] r = -[m] \ddot{R}_0, \quad (5)$$

em que:

- $[m]$ representa a matriz diagonal das massas por unidade de superfície do paramento de montante da abóbada;
- $[k]$ representa a matriz de rigidez, isto é, a inversa da matriz de flexibilidade, $[F]$, anteriormente definida;
- $\{\ddot{r}\}$ e $\{r\}$ representam os vectores de acelerações e deslocamentos radiais;
- $\{R_0\}$ representa o vector das componentes radiais da vibração sísmica na superfície de referência S_0 .

Usando a matriz de flexibilidade, a equação (5) toma a forma:

$$[F][m]\{\ddot{r}\} + \{r\} = -[F][m]\{\ddot{R}_0\}.$$

A consideração do efeito de um amortecimento do tipo viscoso, pode ser feita pela introdução nas equações do movimento, de uma parcela proporcional às velocidades. O amortecimento é especialmente importante no cálculo das amplitudes, mas a sua influência pode ser desprezada no cálculo das frequências.

Tendo-se definido S_0 como uma superfície que praticamente não sofre deformação, a vibração da massa de terreno entre S_0 e a superfície de inserção da barragem fica associada às condições de vibração desta última, verificando-se assim simultaneamente nos vértices da malha sobre a fundação, duas equações do tipo (4), para as massas de terreno e de betão. Sendo idênticos os termos da matriz de rigidez, pode escrever-se uma única equação, adoptando uma massa específica média entre as massas específicas do terreno e do betão.

4. Análise do movimento livre. Frequências próprias e modos de vibração.

As oscilações livres da estrutura são definidas pelas equações (5) ou (6) por $\ddot{R}_0 = 0$.

Considerando soluções da forma $r = \phi \cos \omega t$, conclui-se facilmente, por substituição em (6), que deve verificar-se a relação (7) entre a matriz $[Fm]$, igual ao producto das matrizes $[F]$ e $[m]$, as frequências angulares ω e as amplitudes ϕ (10):

$$\left[[Fm] - \frac{1}{\omega^2} [1] \right] \phi = 0.$$

Representa-se por $[1]$ a matriz identidade.

Os valores e vectores próprios da matriz $[Fm]$ representam então as frequências e os correspondentes modos de vibração de uma estrutura com a matriz de massas $[m]$ e a matriz de flexibilidade $[F]$ (Apêndice 2). Para o cálculo dos valores e vectores próprios de uma matriz de ordem $N = 65$, utiliza-se um programa que permite obter os valores próprios por ordem de grandeza decrescente e, por consequência, por ordem crescente de frequências. Desta forma, não será necessário, em geral, fazer a determinação de todos os valores e vectores próprios correspondentes à ordem da matriz, uma vez que os modos com frequências de vibração muito afastadas do intervalo (0.4 - 5 Hz) não contribuem praticamente para a deformação da estrutura, quando solicitada por um sismo intenso (4), (6).

5. Análise do movimento forçado. Massas generalizadas e factores de participação. Espectro de velocidades dos osciladores independentes.

Sendo a matriz de massas diagonal e as matrizes de flexibilidade e de rigidez simétricas, os modos de vibração $\{\phi\}$, que resultam da resolução do sistema (7) para cada uma das frequências próprias da estrutura, são ortogonais (10) (Apêndice 3):

$$\{\phi\}^T [m] \{\phi\} = [M]; \quad (8)$$

$$\{\phi\}^T [k] \{\phi\} = [w^2] [M], \quad (9)$$

em que $[w^2]$ e $[M]$ são as matrizes diagonais dos quadrados das frequências angulares

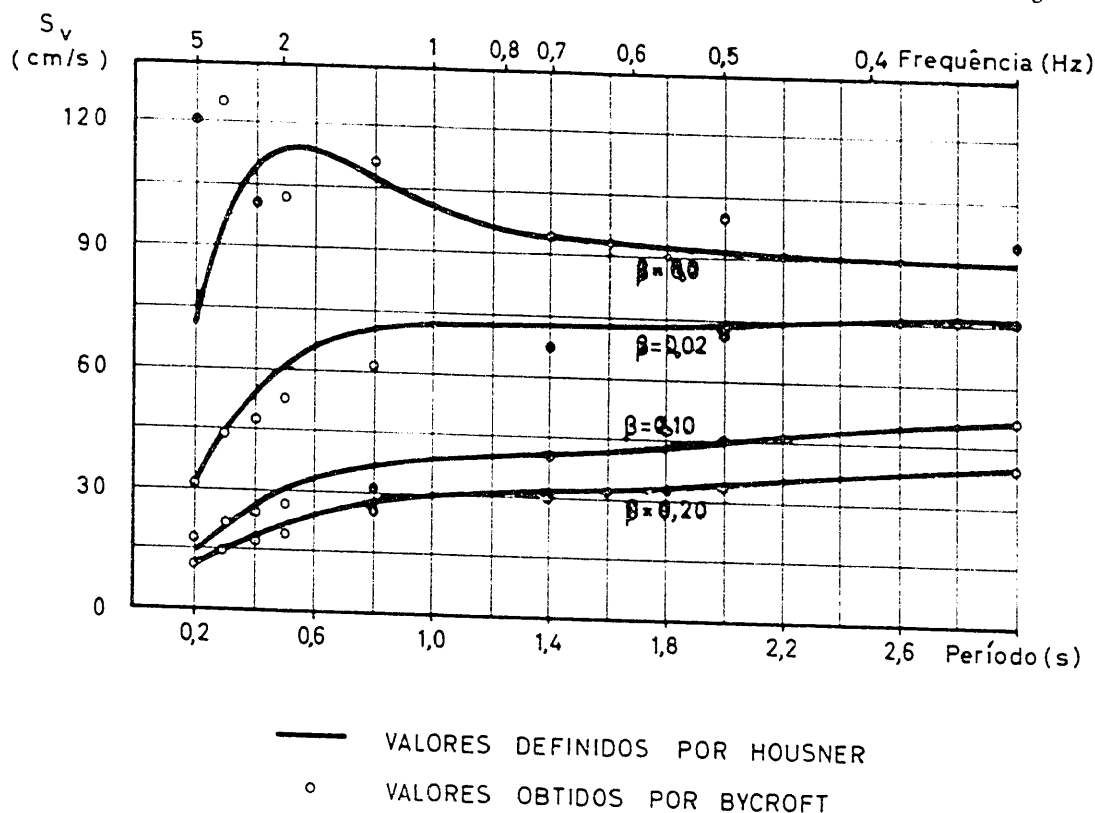


Fig. 2. -- Curvas médias de velocidade espectral. (*)

(*) Reproduzido da publicação com a referência (7) Sismo de «El Centro» N.º 5, 19-5-1940

de vibração e das massas generalizadas e $[K]$ e $[m]$ são as matrizes de rigidez e de massas, anteriormente definidas.

Fazendo a mudança de variáveis:

$$\{r\} = \{\phi\} \{a\}, \quad (10)$$

na equação do movimento (5), e atendendo às relações (8) e (9), pode escrever-se aquela equação sob a forma (11). (Apêndice 3).

$$\ddot{\{a\}} + [w^2] \{a\} = - \left\{ \frac{\sum m_i \ddot{x}_i}{\sum m_i \phi_i^2} \right\} \dot{R}_0, \quad (11)$$

em que as equações do movimento representam um conjunto de osciladores lineares independentes, com as frequências próprias de vibração da barragem. Os somatórios são estendidos a todas as massas de estrutura, para cada modo de vibração. Aos coeficientes $\sum m \phi$, que pesam a influência de cada um dos modos na deformação total, dá-se o nome de factores de participação. Os coeficientes $\sum m \phi^2$, que correspondem aos elementos de matriz $[M]$ e representam uma massa associada a cada modo de vibração chamam-se massas generalizadas.

Por intermédio das curvas espectrais definidas por Housner (6) e Bycroft (7) para o sismo de "El Centro", N-S, 18-5-1940, figura 2, determinam-se para cada modo de vibração as velocidades máximas $\{S v\}$, e os correspondentes deslocamentos máximos.

$$\{a_{MAX}\} = - \left\{ \begin{array}{c} \sum m \phi \quad S v \\ \sum m \phi^2 \quad w \end{array} \right\}, \quad (12)$$

adoptando uma certa percentagem do amortecimento crítico.

O conjunto de deslocamentos máximos nos vértices da malha de cálculo pode obter-se pela transformação (10), considerando os módulos dos modos de vibração. No entanto, nos casos em que vários modos contribuem de forma importante para a deformação total, e dado que não é provável que os máximos ocorram simultaneamente pode adoptar-se a média geométrica dos produtos ϕa_{MAX} .

6. Cargas estáticas equivalentes. Coeficientes sísmicos. Tensões desenvolvidas na estrutura.

As cargas estáticas equivalentes aos modos de vibração em regimen elástico, $\{q\}$, são obtidas por intermédio da matriz de rigidez usando a expressão:

$$\{q\} = [K] \{\varnothing\}. \quad (13)$$

A partir desta matriz calcula-se facilmente o conjunto de cargas estáticas mais desfavoráveis em cada vértice da malha $\{q_{MAX}\}$, multiplicando cada modo pelo correspondente coeficiente $\frac{\sum m \varnothing}{\sum m \varnothing^2}$, e somando os modos segundo um critério idêntico ao seguido para os deslocamentos.

Os coeficientes sísmicos correspondentes a $\{q_{MAX}\}$ serão, portanto:

$$\{C\} = \frac{1}{g} \left\{ \frac{q_{MAX}}{m} \right\}, \quad (14)$$

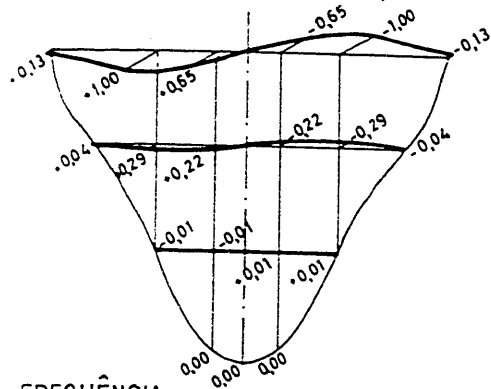
em que g representa a aceleração da gravidade.

As tensões desenvolvidas na estrutura calculam-se a partir das cargas estáticas equivalentes: determinam-se, pela expressão

$$\{x_q\} = [x] \{q\}, \quad (15)$$

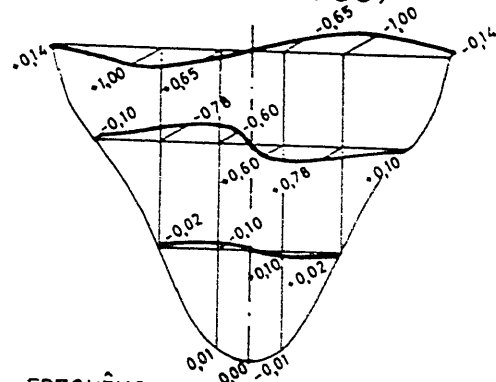
os esforços internos de ajustamento a que aquelas cargas dão origem no sistema de arcos e consolas independentes; os esforços totais que actuam sobre os arcos e sobre as consolas são respectivamente $\{X_q\}$ e $\{q - X_q\}$, no caso de carga actuar inicialmente sobre as consolas e $\{q + X_q\}$ e $\{-X_q\}$, no caso de carga actuar inicialmente sobre os arcos; a partir destes esforços determinam-se facilmente as tensões em cada um dos elementos de cálculo considerados (8), para cada modo de vibração, fazendo-se a sobreposição dos modos pelo critério adoptado para os deslocamentos e para as cargas estáticas.

1º MODO (ANTI-SIMÉTRICO)



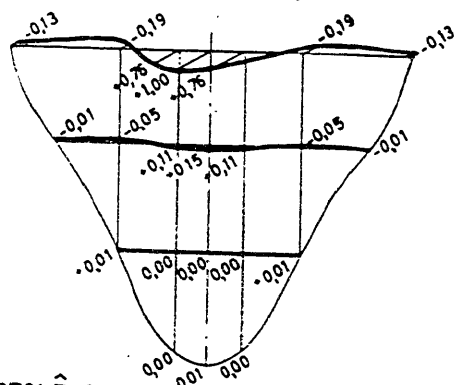
FREQUÊNCIA 3,19 Hz
MASSA GENERALIZADA $1,75 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$
FACTOR DE PARTICIPAÇÃO 0

2º MODO (ANTI-SIMÉTRICO)



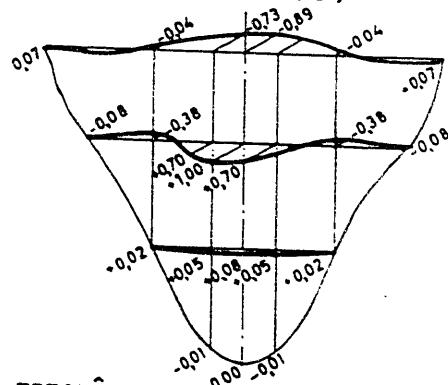
FREQUÊNCIA 4,88 Hz
MASSA GENERALIZADA $2,88 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$
FACTOR DE PARTICIPAÇÃO 0

3º MODO (SIMÉTRICO)



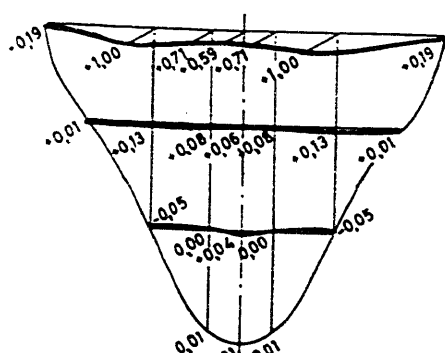
FREQUÊNCIA 5,31 Hz
MASSA GENERALIZADA $1,36 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$
FACTOR DE PARTICIPAÇÃO $0,85 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$

4º MODO (SIMÉTRICO)



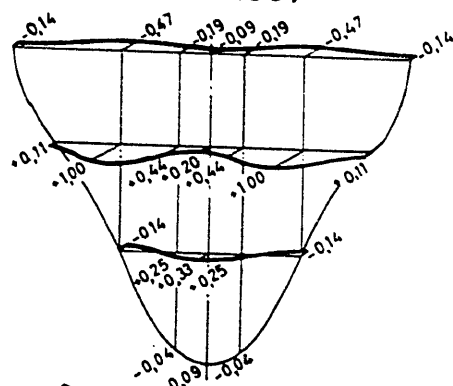
FREQUÊNCIA 6,72 Hz
MASSA GENERALIZADA $2,65 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$
FACTOR DE PARTICIPAÇÃO $0,26 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$

5º MODO (SIMÉTRICO)



FREQUÊNCIA 7,58 Hz
MASSA GENERALIZADA $1,99 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$
FACTOR DE PARTICIPAÇÃO $3,32 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$

6º MODO (SIMÉTRICO)



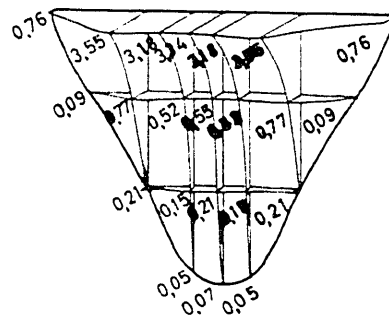
FREQUÊNCIA 10,55 Hz
MASSA GENERALIZADA $2,20 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$
FACTOR DE PARTICIPAÇÃO $1,00 \text{ tf} \cdot \text{seg}^2 / \text{m}^3$

Fig. 3.— Modos de vibração principais.

7. Estudo sísmico da barragem de Cachi.

A barragem de Cachi é uma abóbada delgada de dupla curvatura com a definição de formas que se indica na figura 1. Representa-se na mesma figura a malha de arcos e consolas de cálculo adoptada.

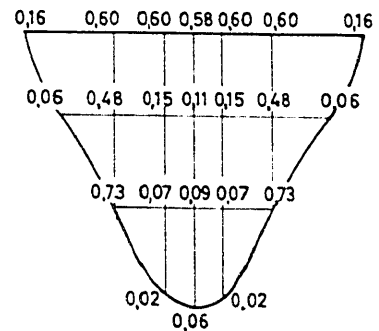
DESLOCAMENTOS RADIAIS MÁXIMOS



ESCALA DE DESLOCAMENTOS

0 5 mm

COEFICIENTES SÍSMICOS (CARGAS ESTÁTICAS EQUIVALENTES MÁXIMAS)

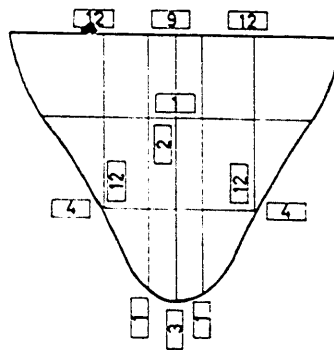


COEFICIENTE SÍSMICO MÉDIO...0,3

TENSÕES MÁXIMAS (kg/cm²)

□ TENSÕES NOS ARCOS
□ TENSÕES NAS CONSOLAS

MONTANTE



JUSANTE

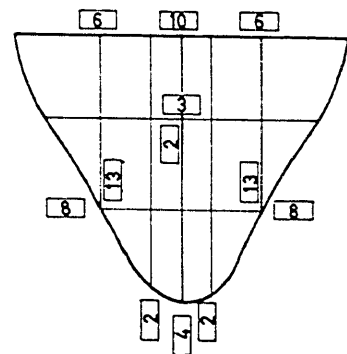


Fig. 4. — Resposta da estrutura do sismo de El Centro (núm. 5), 18-5-1940.

Os primeiros modos de vibração obtidos, os dois primeiros anti-simétricos e os quatro primeiros simétricos, estão representados na figura 3, indicando-se para cada um a frequência de vibração, a massa generalizada e o factor de participação.

Verifica-se que os modos de mais baixas frequências são anti-simétricos, enquanto

que os modos de vibração simétricos com maiores factores de participação são os que correspondem a vibrações simétricas segundo os arcos e segundo as consolas. Pensa-se que a forma e a ordem de frequências dos modos de vibração obtidos resultam do acentuado funcionamento da estrutura como arco.

De acordo com as curvas espectrais da figura 2 e para 10 % do amortecimento crítico, calcularam-se os deslocamentos radiais, as cargas estáticas equivalentes e as tensões mais desfavoráveis, desenvolvidas na estrutura por um sismo idêntico ao de "El Centro", N-6, 13-5-1940, figura 4. Vê-se que os coeficientes sísmicos são elevados em relação aos correntemente admitidos, no entanto, as tensões, são relativamente pouco importantes.

8. Conclusões.

O estudo das características de vibração de uma barragem do tipo abóbada e da sua estabilidade, quando solicitada por acelerações sísmicas intensas, parece realizável, com resultados aceitáveis, pelo método de análise modal, com base numa matriz de flexibilidade determinada analiticamente por ajustamentos de deformações entre arcos e consolas.

Existem, entretanto, algumas limitações, mas pensa-se que parte delas poderão ser em breve superadas, como, por exemplo, a consideração do efeito das forças de inércia desenvolvidas nas massas de água em contacto com a barragem e a consideração, para cada uma das massas de betão, de todos os graus de liberdade adoptados pelo Bureau of Reclamation no "trial load" Method.

A comparação entre os resultados obtidos por este método e os obtidos por ensaios de vibração de modelos reduzidos foi, em parte, realizada (4). Espera-se, no entanto, realizar outros estudos de comparação entre os dois métodos de cálculo.

APENDICE 1

Cálculo dos deslocamentos radiais nas secções de um arco simétrico, devidos a cargas assimétricas.

Estudado o arco simétrico representado na figura 5, pelo programa a que se fez referência (8), para actuação simultânea das duas cargas J , ficam a conhecer-se as matrizes de deslocamentos radiais e de esforços hiperestáticos no fecho $[r]$ e $[E_F]$:

$$[r] = \begin{bmatrix} r_{NN} & r_{NJ_1} & \dots & r_{NF} & r_{NQ} \\ r_{J_1N} & r_{J_1J_1} & \dots & r_{J_1F} & r_{J_1Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{FN} & r_{FJ_1} & \dots & r_{FF} & r_{FQ} \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$[E_F] = \begin{bmatrix} H_{FN} & H_{FJ_1} & \dots & H_{FF} & H_{FQ} \\ M_{FN} & M_{FJ_1} & \dots & M_{FF} & M_{FQ} \end{bmatrix} \quad (b)$$

Representam-se por J ($J = N, 1, 2, \dots, F$) as secções onde se calcularam deslocamentos radiais, as quais correspondem aos vértices das cargas triangulares consideradas, por Q as cargas concentradas nas nascenças do arco, por H o esforço normal e M o momento flector numa dada secção, e por i uma aduela genérica do arco.

Quando se retira uma das cargas J , os esforços hiperestáticos no fecho, H e M reduzem-se para metade e aparece um terceiro esforço hiperestático, o esforço transversal T . Na

nova matriz de esforços hiperestáticos no fecho $[E'_F]$, apenas é incógnita, portanto, a última linha:

$$[E'_F] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} H_{FN} & \frac{1}{2} H_{FJ_1} & \dots & \frac{1}{2} H_{FF} & \frac{1}{2} H_{FQ} \\ \frac{1}{2} M_{FN} & \frac{1}{2} M_{FJ_1} & \dots & \frac{1}{2} M_{FF} & \frac{1}{2} M_{FQ} \\ T'_{FN} & T'_{FJ_1} & \dots & T'_{FF} & T'_{FQ} \end{bmatrix} \quad (c)$$

Por outro lado, também por uma questão de simetria, os deslocamentos radiais no fecho devidos à actuação de uma só das cargas J vêm reduzidos para metade, de forma que a última linha da nova matriz $[r']$ fica conhecida.

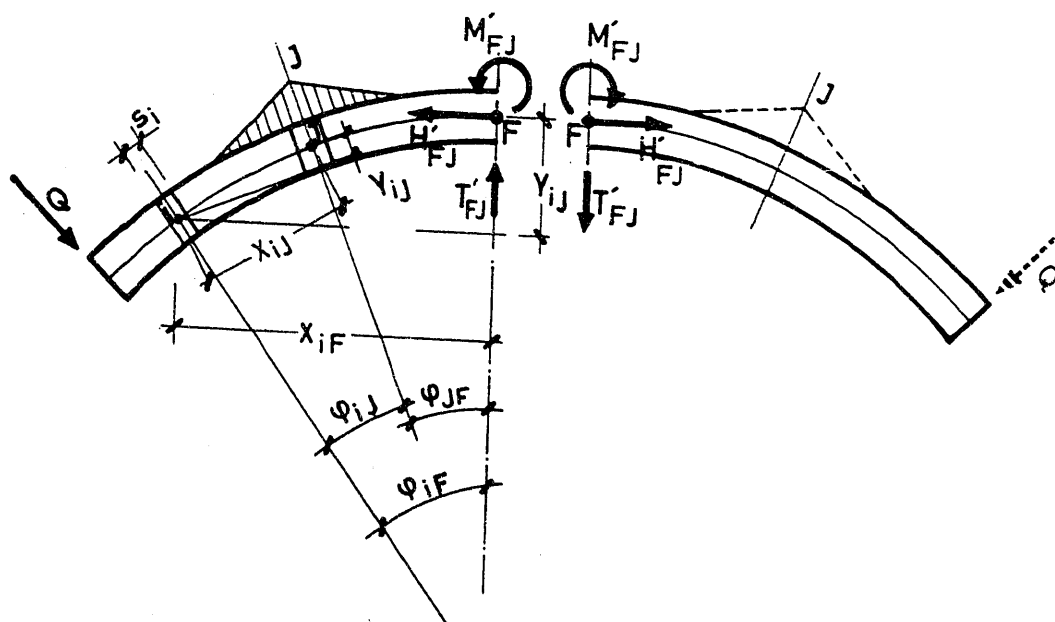


Fig. 5. — Arco simétrico. Solicitado por cargas assimétricas.

Considerando então a matriz $[D]$, em que cada coluna representa o conjunto de deslocamentos radiais obtidos num semi-arco descarregado, elasticamente apoiado sobre a fundação, quando solicitado por esforços unitários no fecho ($H = 1$, $T = 1$ e $M = 1$):

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{NH} & D_{NM} & D_{NT} \\ D_{J_1H} & D_{J_1M} & D_{J_1T} \\ \dots & \dots & \dots \\ D_{FH} & D_{FM} & D_{FT} \end{bmatrix}, \quad (d)$$

os deslocamentos radiais nos vários pontos de semi-arco descarregado, quando os esforços hiperestáticos no fecho são $[E'_F]$, serão como é evidente:

$$[r''] = [D][E'_F]. \quad (e)$$

Considerando a linha correspondente aos deslocamentos r'' no fecho e igualando com os deslocamentos radiais conhecidos nesse ponto (metade dos valores correspondentes à il-

tima linha da matriz $[r]$, obtém-se uma equação que permite calcular os esforços transversos hiperestáticos no fecho, para cada uma das cargas:

$$\{T_{FJ}\}^T = \frac{1}{2D_{FT}} \left\{ -\{r_{FJ}\}^T + \{D_F \quad D_{FM}\} [E_F] \right\}. \quad (f)$$

Com o símbolo $\{ \}^T$ representa-se um vector-linha.

Conhecidos todos os elementos da matriz $[E'_F]$, a equação (e) permite fazer o cálculo dos deslocamentos radiais no semi-arco descarregado. Os deslocamentos radiais no semi-arco carregado são obtidos, por sobreposição de efeitos, pela equação:

$$[r'] = [r] - [r'']. \quad (g)$$

Os elementos da matriz $[D]$ são calculados pelas expressões (h), (i), (j):

$$D_{JH} = \sum_{i=0}^{i=J} \left[-\frac{x_{iJ} y_{iF}}{I_i} s_i + \frac{\sin \varphi_{iJ} \cos \varphi_{iF} - 3 \sin \varphi_{iJ} \cos \varphi_{iF}}{e} s_i \right] - \alpha x_{0J} y_{0F} - \\ - \alpha_2 (x_{0J} \sin \varphi_{0J} + y_{0F} \cos \varphi_{0J}) - \gamma \cos \varphi_{0J} \sin \varphi_{0F} \quad (h)$$

$$D_{JM} = - \sum_{i=0}^{i=J} \frac{x_{iJ}}{I_i} s_i - \alpha x_{0J} - \alpha_2 \cos \varphi_{0J}. \quad (i)$$

$$D_{JT} = \sum_{i=0}^{i=J} \left[-\frac{x_{iJ} x_{iF}}{I_i} s_i - \frac{\sin \varphi_{iJ} \sin \varphi_{iF} + 3 \cos \varphi_{iJ} \cos \varphi_{iF}}{e_i} s_i \right] - \alpha x_{0J} x_{0F} - \\ - \alpha_2 (x_{0J} \cos \varphi_{0J} + x_{0F} \cos \varphi_{0J}) - \gamma \cos \varphi_{0J} \cos \varphi_{0F}, \quad (j)$$

em que x_{iJ} , $\cos_{iJ}$ e $\sin_{iJ}$ são definidos pelas expressões (h), (i) e (m) e sendo os somatórios estendidos:

$$x_{iJ} = (x_{iF} - x_{JF}) \cos \varphi_{JF} + (y_{iF} - y_{JF}) \sin \varphi_{JF}, \quad (k)$$

$$\cos \varphi_{iJ} = \cos \varphi_{iF} \cos \varphi_{JF} + \sin \varphi_{iF} \sin \varphi_{JF}, \quad (l)$$

$$\sin \varphi_{iJ} = \sin \varphi_{iF} \cos \varphi_{JF} - \cos \varphi_{iF} \sin \varphi_{JF}, \quad (m)$$

a um semi-arco que se supõe dividido em aduelas de comprimento s_i , secção A_i , momento de inércia I_i , coordenadas do centro de gravidade em relação ao sistema de eixos com origem no fecho, X_{iF} e Y_{iF} e abertura angular em relação ao fecho φ_{iF} , figura 5. α , β , γ e α_2 são as constantes de deformação da fundação nas nascenças do arco, tal como são definidas pelo Bureau of Reclamation, e E é o módulo de elasticidade longitudinal do material do arco. Supõe-se, nas expressões (h), (i) e (j), que $\mu = 0.22$ e $\frac{1}{KG} = \frac{3}{E}$, sendo k a constante de corte, G o módulo de elasticidade transversal e μ o coeficiente de Poisson.

APENDICE 2

Cálculo das frequências próprias e dos modos de vibração.

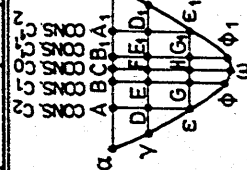
Os valores e vectores próprios da matriz $[F, m]$, que correspondem às frequências e modos de vibração da estrutura, são as soluções da equação:

$$\left[[F, m] - \frac{1}{w^2} [1] \right] \{ \} = 0. \quad (7)$$

QUADRO 1

MATRIZ DE FLEXIBILIDADE DOS ARCOS INDEPENDENTES

CARGAS PONTOS	α	a	b	c	b ₁	a ₁	α_1	γ	d	e	f	α_1	d ₁	γ_1	ϵ	g	h	g ₁	ϵ_1	ϕ	ω	ϕ_1
α	α_a	α_a	α_b	α_c	α_{b1}	α_{a1}	α_{a1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
A	A_a	A_a	A_b	A_c	A_{b1}	A_{a1}	A_{a1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B	B_a	B_a	B_b	B_c	B_{b1}	B_{a1}	B_{a1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
C	C_a	C_a	C_b	C_c	C_{b1}	C_{a1}	C_{a1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B ₁	B_{1a}	B_{1a}	B_{1b}	B_{1c}	B_{1b1}	B_{1a1}	B_{1a1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
A ₁	A_{1a}	A_{1a}	A_{1b}	A_{1c}	A_{1b1}	A_{1a1}	A_{1a1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
α_1	α_{1a}	α_{1a}	α_{1b}	α_{1c}	α_{1b1}	α_{1a1}	α_{1a1}	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
γ	—	—	—	—	—	—	—	γ_y	γ_d	γ_e	γ_f	γ_{e1}	γ_{d1}	γ_{y1}	—	—	—	—	—	—	—	—
D	—	—	—	—	—	—	—	D_y	D_d	D_e	D_f	D_{e1}	D_{d1}	D_{y1}	—	—	—	—	—	—	—	—
E	—	—	—	—	—	—	—	E_y	E_d	E_e	E_f	E_{e1}	E_{d1}	E_{y1}	—	—	—	—	—	—	—	—
F	—	—	—	—	—	—	—	F_y	F_d	F_e	F_f	F_{e1}	F_{d1}	F_{y1}	—	—	—	—	—	—	—	—
E_1	—	—	—	—	—	—	—	E_{1y}	E_{1d}	E_{1e}	E_{1f}	E_{1e1}	E_{1d1}	E_{1y1}	—	—	—	—	—	—	—	—
D ₁	—	—	—	—	—	—	—	D_{1y}	D_{1d}	D_{1e}	D_{1f}	D_{1e1}	D_{1d1}	D_{1y1}	—	—	—	—	—	—	—	—
γ_1	—	—	—	—	—	—	—	γ_{1y}	γ_{1d}	γ_{1e}	γ_{1f}	γ_{1e1}	γ_{1d1}	γ_{1y1}	—	—	—	—	—	—	—	—
ϵ	—	$-\epsilon''_a$	—	—	—	$-\epsilon'_a$	$-\epsilon'_a$	—	$-\epsilon''_d$	—	—	—	$-\epsilon''_d$	—	$\epsilon'_e - \epsilon''_e$	ϵ_g	ϵ_h	ϵ_g	$\epsilon'_e - \epsilon''_e$	—	—	—
ϕ	—	$-\phi''_a$	—	—	—	$-\phi'_a$	$-\phi'_a$	—	$-\phi''_d$	—	—	—	$-\phi''_d$	—	$\phi'_g - \phi''_g$	ϕ_g	ϕ_h	ϕ_g	$\phi'_g - \phi''_g$	—	—	—
H	—	$-\mathcal{H}''_a$	—	—	—	$-\mathcal{H}'_a$	$-\mathcal{H}'_a$	—	$-\mathcal{H}''_d$	—	—	—	$-\mathcal{H}''_d$	—	$\mathcal{H}'_g - \mathcal{H}''_g$	$\mathcal{H}_g$	$\mathcal{H}_h$	$\mathcal{H}_g$	$\mathcal{H}'_g - \mathcal{H}''_g$	—	—	—
G ₁	—	$-\mathcal{G}''_{1a}$	—	—	—	$-\mathcal{G}'_{1a}$	$-\mathcal{G}'_{1a}$	—	$-\mathcal{G}''_{1d}$	—	—	—	$-\mathcal{G}''_{1d}$	—	$\mathcal{G}'_{1g} - \mathcal{G}''_{1g}$	$\mathcal{G}_{1g}$	$\mathcal{G}_{1h}$	$\mathcal{G}_{1g}$	$\mathcal{G}'_{1g} - \mathcal{G}''_{1g}$	—	—	—
ϵ_1	—	$-\epsilon''_{1a}$	—	—	—	$-\epsilon'_{1a}$	$-\epsilon'_{1a}$	—	$-\epsilon''_{1d}$	—	—	—	$-\epsilon''_{1d}$	—	$\epsilon'_{1g} - \epsilon''_{1g}$	ϵ_{1g}	ϵ_{1h}	ϵ_{1g}	$\epsilon'_{1g} - \epsilon''_{1g}$	—	—	—
ϕ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ω	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ϕ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—



ARCO A₁
ARCO A₂
ARCO A₃

A_c Deslocamento radial do ponto A do arco A₁, devido a actuação da carga c, sobre o mesmo arco.

H_{a1} Deslocamento radial do ponto H do arco A₃, devido a actuação da carga a, sobre a consola C₁.

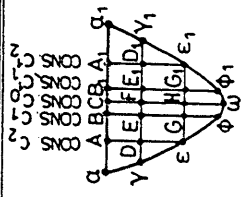
Deslocamentos (+) para jusante.

Cargas (+) quando actuam de montante para jusante.

MATRIZ DE FLEXIBILIDADE DAS CONSOLAS INDEPENDENTES

CARGAS	PONTOS	a	b	c	b ₁	a ₁	α ₁	γ	d	e	f	α ₁	d ₁	γ ₁	ε	g	h	g ₁	ε ₁	φ	ω	φ ₁
A	A	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B	B	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
C	C	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
B ₁	B ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
A ₁	A ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
α ₁	α ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
γ	γ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
D	D	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
E	E	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
F	F	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
E ₁	E ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
D ₁	D ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
γ ₁	γ ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ε	ε	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
G	G	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
H	H	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
G ₁	G ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
E ₁	E ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
φ	φ	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
ω	ω	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
φ ₁	φ ₁	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

A_d Deslocamento radial do ponto A da consola C_2 , devido à carga do vértice em d,
 actuando sobre a mesma consola.
 E_a Deslocamento radial da base da consola C_2 , devido à carga do vértice em a,
 actuando sobre a mesma consola.
 E_{a1} Deslocamento radial da base da consola C_2 , devido à carga do vértice em a₁,
 actuando sobre a consola C_2 .
 E_h Deslocamento radial da base da consola C_2 , devido à carga do vértice em h,
 actuando sobre o arco A_3 .
 Deslocamentos (+) para jusante
 Cargas (+) de montante para jusante.



ARCO A₁
 ARCO A₂
 ARCO A₃

Esta equação representa um sistema de N equações lineares e homogêneas nas variáveis ϕ , sendo N a ordem das matrizes de flexibilidade e de massas, e para que existam soluções diferentes de zero deve ser nulo o determinante do sistema:

$$[F \cdot m] - \frac{1}{\omega^2} [1] = 0. \quad (6)$$

A resolução do determinante conduz a uma equação de grau N na incógnita $\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$ a qual, resolvida, fornece as N frequências de vibração do sistema.

Introduzindo agora estas frequências no sistema (7) e resolvendo os correspondentes sistemas indeterminados, obtém-se a matriz $[\phi]$ de modos de vibração da estrutura.

APENDICE 3

Equações do movimento em coordenadas principais.

Introduzindo na equação do movimento:

$$[m] \ddot{r} + [K] r = -[m] \ddot{R}_0, \quad (8)$$

soluções da forma $r = \phi \cos \omega t$, a equação do movimento livre ($\ddot{R}_0 = 0$), conduz à relação (a), idêntica a (7):

$$[[K] - \omega^2 [m]] \phi = 0. \quad (a)$$

Considerem-se dois vectores, $\{\phi\}_i$ e $\{\phi\}_j$, correspondentes à resolução do sistema indeterminado (a) para ω_i^2 e ω_j^2 , isto é:

$$[K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 [m] \{\phi\}_i; \quad (b)$$

$$[K] \{\phi\}_j = \omega_j^2 [m] \{\phi\}_j. \quad (c)$$

Transpondo os dois membros da primeira equação e multiplicando à direita pelo vector $\{\phi\}_j$ e multiplicando à esquerda os dois membros da segunda equação pelo vector $\{\phi\}_i^T$, obtêm-se as expressões (d) e (e):

$$\{\phi\}_j^T [K] \{\phi\}_i = \omega_i^2 \{\phi\}_j^T [m] \{\phi\}_i; \quad (d)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = \omega_j^2 \{\phi\}_i^T [m] \{\phi\}_j. \quad (e)$$

Notando que (d) se pode escrever sob a forma (f):

$$\{\phi\}_j^T [K]^T \{\phi\}_i = \omega_i^2 \{\phi\}_j^T [m]^T \{\phi\}_i, \quad (f)$$

e subtraindo membro a membro as duas equações, como $[K]^T = [K]$ e $[m]^T = [m]$ por $[K]$ ser simétrica e $[m]$ diagonal, obtém-se:

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\phi\}_j^T [m] \{\phi\}_i. \quad (g)$$

Esta expressão mostra que os vectores $\{\phi\}_i$ e $\{\phi\}_j$ são ortogonais.

Para o conjunto dos vectores ϕ , pode então escrever-se:

$$[\phi]^T [m] [\phi] = [M]; \quad (h)$$

$$[\phi]^T [K] [\phi] = [\omega^2] [M], \quad (i)$$

em que $[M]$ é a matriz diagonal das massas generalizadas e $[w^2]$ a matriz diagonal dos quadrados das frequências angulares.

Considerando nas equações do movimento, a mudança de variáveis:

$$\{x\} = [C] \{z\}, \quad (10)$$

obtem-se:

$$[m][C]\ddot{\{z\}} + [K][C]\{z\} = -[m]\ddot{R}_0. \quad (h)$$

Multiplicando à esquerda por $[\phi]^T$ e atendendo a (8) e (9) é fácil de concluir:

$$\ddot{\{z\}} + [w^2]\{z\} = -[M]^{-1}[C]^T[m]\ddot{R}_0. \quad (i)$$

Escrevendo os productos $[\phi]^T [m] \ddot{R}_0$ e $[M] = [\phi]^T [m] [\phi]$ sob as formas $\left\{ \sum_{l=1}^N m_l \phi_l \ddot{R}_0 \right\}$ e $\left\{ \sum_{l=1}^N m_l \phi_l^2 \right\}$ em que os somatórios se estendem a todas as massas da estrutura, a expressão (i), resulta:

$$\ddot{\{z\}} + [w^2]\{z\} = - \left\{ \frac{\sum m \phi}{\sum m \phi^2} \right\} \ddot{R}_0. \quad (11)$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

1. SERAFIM, J. LAGINHA: "Novos estudos sobre o efeito dos sismos nas barragens". *Reunião sobre Construção Anti-Sísmica*. L. N. E. C., Lisboa, 1961.
2. WESTERGAARD, H. M.: "Water pressure on dams during earthquakes". *Trans. A. S. C. E.*, paper 1835, vol. 98, 1933.
3. LANE, R. G. T.; SERAFIM, J. Laginha: "The structural design of Tang - e Soleyman dam." *Technical Paper* núm. 212, L. N. E. C., Lisboa, 1963.
4. BORGES, J. Ferry; PEREIRA, J. Jervis; A. RAVARA; J. PEDRO: "Seismic studies on concrete dam models". *Symposium on Concrete Dam Models*. L. N. E. C., Lisboa, 1963.
5. OKOMOTO, S.; TAKAHASHI, Tadashi: "On behaviour of arch dams during earthquakes." *II World Conference on Earthquakes Engineering*. Toquio, 1960.
6. HOUSNER, G. W.: "Behaviour of structures during earthquakes". *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 85, núm. EM4, October, 1959.
7. BYCROFT, G. N.: "White noise representation of earthquakes". *Journal of the Engineering Mechanics Division*, vol. 86, núm. EM2, April, 1960.
8. SERAFIM, J. Laginha; RODRIGUES, J. Caldeira; FERNANDES, J. Salvador: "Arch and cantilever analysis for the radial adjustment of arch dams". *Symposium on the Use of Computers in Civil Engineering*. L. N. E. C., Lisboa, 1962.
9. RODRIGUES, J. C.; CRUZ, Margarida V.: "Matrix analysis and programing of arches for stresses and radial, tangencial and angular deflections of arches". *International Symposium on the Theory of Arch Dams*. Southampton. England, 1964.
10. GROVER, L. Rogers: "Dynamics of Framed Structures". *John Wiley & Sons, Inc.* New York.