



# Revista de OBRAS PÚBLICAS

Año CXII

SEPTIEMBRE 1964

Núm. 2993

## INFLUENCIA DE LAS PRESIONES INTERSTICIALES EN UN MEDIO POROSO, SOBRE SU ESTADO TENSIONAL APLICACION A PRESAS DE GRAVEDAD Y PRESAS BOVEDA<sup>(1)</sup>

Por ALEJANDRO DEL CAMPO AGUILERA  
y JOSE PIQUER CHANZÁ  
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

### Trabajo realizado en el Centro de Estudios Hidrográficos

Ha sido muy discutida la influencia de las presiones intersticiales o más concretamente, la subpresión sobre la estabilidad de las presas de gravedad. En cambio, generalmente, se da relativamente poca importancia a los efectos de las presiones intersticiales en las presas bóveda, aunque si su altura es considerable, pueden occasionar tracciones de cierta importancia en las secciones horizontales próximas a la cimentación de los elementos verticales o ménsulas.

Ya a fines del siglo pasado, Levy defendió como necesario, que las compresiones unitarias en cada punto del paramento de agua arriba de las presas de gravedad, deberían ser superiores a la presión hidrostática aplicada en dicho punto, con objeto de evitar la penetración del agua a través de las posibles grietas horizontales.

Más adelante, se comprobó que el agua no solamente podía penetrar por las grietas de la obra de fábrica y cimentación de las presas, sino también por la red de poros existentes en todo macizo de hormigón.

Fundándose en esta consideración, Fillunger desarrolló una teoría, de acuerdo con la cual se producía una importante reducción de la superficie del sólido sobre la que actúan las presiones intersticiales, siendo el coeficiente de reducción función de las porosidades del hormigón y pasta de cemento.

Se debe a Hoffman interesantes estudios sobre el reparto de presiones intersticiales en presas e intuyó que la parte de estas presiones transmitida al sólido, debería ser mayor que la porosidad del hormigón y aun de la pasta de cemento.

Durante años, se discutió sobre los coeficientes de reducción que debían afectar a las presiones hidrostáticas o subpresiones, para el dimensionamiento de las presas de gravedad, sin que los estudios correspondientes fueran acompañados de ensayos rigurosos para determinar experimentalmente dichos coeficientes de subpresión.

En el año 1936, Terzaghi realizó una serie de ensayos, introduciendo cuerpos po-

(1) Por la extensión de este importante trabajo, lo dividimos en tres partes.

rosos saturados en líquidos que se sometían a fuertes presiones, sin que en el sólido llegasen a observarse deformaciones apreciables. De estos ensayos dedujo que las presiones intersticiales deben actuar sobre, prácticamente, la totalidad de la superficie aparente del cuerpo sólido en cualquier sección.

Esta conclusión se recibió con cierto excepticismo, y las normas para cálculo de presas de gravedad seguían admitiendo que la superficie sometida a la subpresión fuera afectada de un coeficiente de reducción superficial.

En el año 1947, Leliavsky Bey realizó una serie de ensayos por distinto procedimiento, de los que claramente resultó que el coeficiente de subpresión es muy próximo a la unidad, conclusión que ha sido confirmada por numerosos ensayos practicados posteriormente por varios investigadores. Al publicarse el trabajo de Leliavsky Bey, se inició una interesante discusión, que contribuyó grandemente a esclarecer los efectos de la subpresión o presiones intersticiales y en menor escala a la explicación de la actuación de dichas presiones en la microestructura del hormigón, suponiéndose que la sección de las ligazones de la pasta de cemento son muy reducidas.

En consecuencia, las presiones intersticiales actúan sobre, prácticamente, todo el volumen del hormigón, no siendo admisible aplicar coeficientes superficiales de reducción, aunque sí se puede obtener una reducción de las presiones que actúan en el interior del cuerpo poroso, por medio de pantallas impermeabilizantes y sistemas de drenaje.

No nos extendemos sobre este tema, tratado por numerosos autores y que puede estudiarse en la bibliografía incluida al final del artículo, y especialmente en el magnífico trabajo de J. Laginha Serafim "A Subpressão nas barragens", publicado por el Laboratorio Nacional de Engenharia Civil de Lisboa.

La influencia de las presiones intersticiales sobre el estado de tensiones en las presas que conozcamos, no ha sido frecuentemente estudiado con rigurosidad, excepto en el artículo de Zienkiewicz citado en la bibliografía, que conocimos después de concluido este trabajo.

En la práctica, se presentan los siguientes casos particulares, que simplificados pueden resolverse por los métodos de la Mecánica Elástica.

a) Presa de gravedad con perfil triangular indefinido, en el que el régimen natural de circulación del agua sea modificado por una pantalla de hormigón menos permeable o por una pantalla de drenaje, pasando por el vértice de la presa, con objeto, en ambos casos, de reducir las subpresiones actuantes en la mayor parte del cuerpo de la presa.

b) En las secciones horizontales de las presas en arco, se ha discutido si puede prescindirse de la acción de las presiones intersticiales o si, por el contrario, es más riguroso calcular las tensiones en los arcos con las presiones aplicadas al paramento de agua arriba, deduciéndo de ellas las presiones intersticiales, con lo que se incrementarían sensiblemente las tracciones en el paramento de agua arriba de la presa.

Primeramente analizaremos el problema general, y posteriormente pasaremos a estudiar los casos particulares citados.

Las hipótesis en que se basa nuestro estudio son:

1.<sup>a</sup> El agua circula en el medio poroso según la ley de Darcy.

2.<sup>a</sup> El estado tensional investigado se refiere a tensiones medias sobre elementos de dimensiones muy superiores a las de los elementos que componen el hormigón.

3.<sup>a</sup> Las presiones intersticiales actúan sin ser afectadas por ningún coeficiente apreciable de reducción superficial.

rosos saturados en líquidos que se sometían a fuertes presiones, sin que en el sólido llegasen a observarse deformaciones apreciables. De estos ensayos dedujo que las presiones intersticiales deben actuar sobre, prácticamente, la totalidad de la superficie aparente del cuerpo sólido en cualquier sección.

Esta conclusión se recibió con cierto excepticismo, y las normas para cálculo de presas de gravedad seguían admitiendo que la superficie sometida a la subpresión fuera afectada de un coeficiente de reducción superficial.

En el año 1947, Leliavsky Bey realizó una serie de ensayos por distinto procedimiento, de los que claramente resultó que el coeficiente de subpresión es muy próximo a la unidad, conclusión que ha sido confirmada por numerosos ensayos practicados posteriormente por varios investigadores. Al publicarse el trabajo de Leliavsky Bey, se inició una interesante discusión, que contribuyó grandemente a esclarecer los efectos de la subpresión o presiones intersticiales y en menor escala a la explicación de la actuación de dichas presiones en la microestructura del hormigón, suponiéndose que la sección de las ligazones de la pasta de cemento son muy reducidas.

En consecuencia, las presiones intersticiales actúan sobre, prácticamente, todo el volumen del hormigón, no siendo admisible aplicar coeficientes superficiales de reducción, aunque sí se puede obtener una reducción de las presiones que actúan en el interior del cuerpo poroso, por medio de pantallas impermeabilizantes y sistemas de drenaje.

No nos extendemos sobre este tema, tratado por numerosos autores y que puede estudiarse en la bibliografía incluida al final del artículo, y especialmente en el magnífico trabajo de J. Laginha Serafim "A Subpressão nas barragens", publicado por el Laboratorio Nacional de Engenharia Civil de Lisboa.

La influencia de las presiones intersticiales sobre el estado de tensiones en las presas que conozcamos, no ha sido frecuentemente estudiado con rigurosidad, excepto en el artículo de Zienkiewicz citado en la bibliografía, que conocimos después de concluido este trabajo.

En la práctica, se presentan los siguientes casos particulares, que simplificados pueden resolverse por los métodos de la Mecánica Elástica.

a) Presa de gravedad con perfil triangular indefinido, en el que el régimen natural de circulación del agua sea modificado por una pantalla de hormigón menos permeable o por una pantalla de drenaje, pasando por el vértice de la presa, con objeto, en ambos casos, de reducir las subpresiones actuantes en la mayor parte del cuerpo de la presa.

b) En las secciones horizontales de las presas en arco, se ha discutido si puede prescindirse de la acción de las presiones intersticiales o si, por el contrario, es más riguroso calcular las tensiones en los arcos con las presiones aplicadas al paramento de agua arriba, deduciendo de ellas las presiones intersticiales, con lo que se incrementarían sensiblemente las tracciones en el paramento de agua arriba de la presa.

Primeramente analizaremos el problema general, y posteriormente pasaremos a estudiar los casos particulares citados.

Las hipótesis en que se basa nuestro estudio son:

1.<sup>a</sup> El agua circula en el medio poroso según la ley de Darcy.

2.<sup>a</sup> El estado tensional investigado se refiere a tensiones medias sobre elementos de dimensiones muy superiores a las de los elementos que componen el hormigón.

3.<sup>a</sup> Las presiones intersticiales actúan sin ser afectadas por ningún coeficiente apreciable de reducción superficial.

4.<sup>a</sup> Las presiones intersticiales no producen, directamente, deformaciones en los elementos del cuerpo poroso, despreciándose la deformabilidad de los granos impermeables que lo forman. Esta condición es sensiblemente equivalente a la anterior.

5.<sup>a</sup> Las deformaciones del cuerpo sólido poroso están ligadas con las tensiones por la ley de Hook.

### Circulación del agua y reparto de presiones en un medio poroso.

En el caso de que un líquido en reposo, llene los poros de un cuerpo sólido, las presiones hidrostáticas  $p$  se repartirán según la ley:

$$\frac{p}{\gamma} - z = \psi \text{ (constante);}$$

siendo:

$\gamma$ , el peso específico del líquido.

$z$ , la profundidad del punto considerado bajo un plano de comparación.

Si la función  $\psi = \frac{p}{\gamma} - z$  no fuera constante en el espacio poroso considerado, el líquido circularía según el gradiente del potencial  $\psi$ , con una velocidad  $v$  que de acuerdo con la ley de Darcy será:

$$v = -K \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

Siendo  $K$  el coeficiente de permeabilidad.

Vectorialmente la velocidad quedará definida:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= -K \vec{\nabla} \psi; \\ v_x &= -K \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{K}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ v_y &= -K \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{K}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ v_z &= -K \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{K}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} + K; \end{aligned}$$

La condición de continuidad exige que el caudal entrante en un paralelepípedo elemental sea igual al saliente, más el que pudiera surgir de este volumen elemental:

$$\text{Div } \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\varphi;$$

siendo  $\varphi$  el caudal absorbido o sumido por unidad de volumen.

La ecuación de continuidad en función de la presión resultará:

$$\frac{1}{\gamma} \left[ K \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\varphi}{\gamma} \right] = 0.$$

Deducimos que la ley de presiones deberá cumplir la ecuación de Laplace  $\nabla^2 p = 0$ , en caso de que no existan en el espacio considerado manantiales o dre-

najes, es decir, que  $\rho = 0$  y que la permeabilidad  $K$  sea constante en todo el macizo, o al menos, según las direcciones de los ejes coordenados, es decir, que  $K_x, K_y$  y  $K_z$  sean constantes.

Si el medio considerado es bidimensional, correspondiéndose la vertical con el eje  $y$ , las ecuaciones de circulación en medios porosos quedarán reducidas a:

$$v_x = -K \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{K}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x};$$

$$v_y = -K \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{K}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} + K;$$

$$\frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\partial \left( K \frac{\partial p}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( K \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma K \right)}{\partial y} \right] = \rho.$$

Y en caso de que la permeabilidad sea uniforme, y dentro del espacio considerado no existan drenes o manantiales, la presión deberá cumplir la condición de Laplace:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

No se complica el problema en coordenadas cartesianas, si la permeabilidad en sentido horizontal  $K_x$ , es diferente de la permeabilidad  $K_y$ , en sentido vertical, como ocurre frecuentemente en las presas.

En coordenadas polares, las ecuaciones de circulación en medios porosos, prescindiendo del efecto de la gravedad, son:

$$v_r = -K \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{K}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial r};$$

$$v_\varphi = -\frac{K}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -\frac{K}{\gamma r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}.$$

Y la ecuación de continuidad exigirá:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = -\rho;$$

$$\frac{1}{\gamma} \left[ \frac{\partial \left( K \frac{\partial p}{\partial r} \right)}{\partial r} + \frac{K}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left( K \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)}{\partial \varphi} \right] = \rho.$$

Si la permeabilidad es constante:

$$\frac{K}{\gamma} \left[ \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} \right] = \rho.$$

### Condiciones elásticas de equilibrio en un medio poroso saturado con circulación de agua.

Suponemos que, de acuerdo con la experiencia, la presión hidráulica  $p$  actúa sobre todas las superficies sin coeficiente de reducción.

Las ecuaciones de equilibrio en un paralelepípedo elemental, sometido a la pre-

sión  $p$  y a las tensiones sobre los elementos sólidos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$  y  $\tau_{zy}$ , dan:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \quad [1]$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial (\sigma_x + p)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_y + p)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0; \quad [2]$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = m_z; \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial (\sigma_z + p)}{\partial z} = m_z.$$

Consideramos que las tensiones  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ , y  $\sigma_z$  son positivas si son compresiones, y  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{zy}$  y  $\tau_{zx}$  son positivas si siguen el sentido creciente de las coordenadas aplicadas a las caras vistas desde los ejes coordinados.

Llamamos  $m_z$  al peso por unidad de volumen de las partículas sólidas y el líquido contenido en los poros. Sin embargo, el principio de superposición en mecánica elástica nos permitirá separar y superponer los efectos producidos por fuerzas exteriores y el peso propio, de los producidos por las presiones internas que vamos a estudiar en este caso, en que consideraremos  $m_z$  nulo.

Las ecuaciones de equilibrio [2], nos indican que desde un punto de vista exclusivamente estático, los efectos de las presiones intersticiales pueden considerarse como unas fuerzas másicas cuyo valor por unidad de volumen fuera:

$$m_x = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad m_y = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad m_z = -\frac{\partial p}{\partial z};$$

o bien, como si existiesen unas tensiones conjuntas sobre sólido y líquido  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  y  $\sigma'_z$ , de las que debería deducirse la presión intersticial  $p$  para obtener las tensiones en el sólido:

$$\sigma_x = \sigma'_x - p; \quad \sigma_y = \sigma'_y - p; \quad \sigma_z = \sigma'_z - p.$$

Para obtener las tensiones en un medio elástico continuo, se deben calcular las deformaciones en función de las tensiones, deduciéndose las condiciones a que obliga la continuidad del medio y las ligazones en los contornos.

Por los experimentos de Terzaghi y otros posteriores, sabemos que las presiones intersticiales uniformes no influyen sensiblemente sobre las deformaciones del cuerpo sólido, por lo que se podrá aplicar a este caso la ley de Hook, considerando sólo las tensiones sobre las partículas sólidas.

Llamaremos  $u$ ,  $v$  y  $w$  los desplazamientos, según los ejes coordinados. Las deformaciones unitarias en función de estos desplazamientos y de las tensiones son:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x)] \end{aligned} \quad [3]$$

$$\begin{aligned}\gamma_{x,y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{x,y}; \\ \gamma_{x,z} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \tau_{x,z}; \\ \gamma_{y,z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{G} \tau_{y,z}.\end{aligned}\quad [4]$$

Siendo  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  el coeficiente de elasticidad al esfuerzo cortante y  $\mu$  el módulo de Poisson.

Entre las ecuaciones [3] y [4] debe verificarse:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{x,y}}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{y,z}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{x,z}}{\partial z \partial x}.\end{aligned}\quad [5]$$

Desarrollemos la primera ecuación [5] en función de las tensiones:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} \right) = 2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{x,y}}{\partial x \partial y}, \quad [6]$$

Derivando las ecuaciones [2], respectivamente, respecto a  $x, y, z$ , sumando las dos primeras, y restando la tercera, queda, suponiendo  $m_z = 0$ :

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Sustituyendo en [6]:

$$(1+\mu) \nabla^2 \tau_z - \nabla^2 s + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} - (1+\mu) \nabla^2 p + 2(1+\mu) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0;$$

y del mismo modo se obtiene:

$$\begin{aligned}(1+\mu) \nabla^2 \tau_x - \nabla^2 s + \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - (1+\mu) \nabla^2 p + 2(1+\mu) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= 0; \\ (1+\mu) \nabla^2 \tau_y - \nabla^2 s + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} - (1+\mu) \nabla^2 p + 2(1+\mu) \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= 0.\end{aligned}$$

Siendo

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

el operador de Laplace, y  $s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ .

Sumando las tres ecuaciones:

$$\begin{aligned}(1+\mu) \nabla^2 s - 3 \nabla^2 s + \nabla^2 s - 3(1+\mu) \nabla^2 p + 2(1+\mu) \nabla^2 p &= 0; \\ (1-\mu) \nabla^2 s &= -(1+\mu) \nabla^2 p.\end{aligned}$$

De donde queda:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \tau_x &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \nabla^2 p + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0; \\ \nabla^2 \tau_y &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \nabla^2 p + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0; \\ \nabla^2 \tau_z &+ \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + \frac{\mu}{1-\mu} \nabla^2 p + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.\end{aligned}$$

También de las ecuaciones [3] y [4] se deduce:

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{x,y}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{x,z}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{y,z}}{\partial x^2}.$$

En función de las tensiones:

$$2(1+\mu) \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} - 2\mu \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} = 2(1+\mu) \left( \frac{\partial^2 \tau_{x,y}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{x,z}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau_{y,z}}{\partial x^2} \right).$$

Derivando la tercera ecuación de [2], respecto a  $y$ , y la segunda, respecto a  $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{x,z}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{y,z}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial y} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{x,y}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{y,z}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Sustituyendo:

$$\nabla^2 \tau_{y,z} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial z} = 0;$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \tau_{z,x} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial z \partial x} + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} &= 0; \\ \nabla^2 \tau_{x,y} + \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} &= 0;\end{aligned}$$

Para que se pudiera con estos sistemas de ecuaciones diferenciales obtener las tensiones ficticias  $\sigma'_x = \sigma_x + p$ ;  $\sigma'_y = \sigma_y + p$ ;  $\sigma'_z = \sigma_z + p$ , a partir sólo de las presiones en los contornos, deberán anularse en las ecuaciones [7] y [8] los términos en  $p$ , lo que exigiría que todas las derivadas segundas de la presión fueran nulas; en otro caso, habría que obtener las tensiones considerando las fuerzas másticas que introduce la presión.

### Estado bidimensional de tensiones.

Son muy raros los problemas elásticos tridimensionales que pueden resolverse analíticamente, resultando, en cambio, más sencillas las ecuaciones elásticas en dos dimensiones.

Las ecuaciones elementales de equilibrio exigen:

$$\begin{aligned} \tau_{x,y} + \tau_{y,x} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{x,y}}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial (\sigma_x + p)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{x,y}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \tau_{y,x}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= m_y; \quad \frac{\partial \tau_{y,x}}{\partial x} + \frac{\partial (\sigma_y + p)}{\partial y} = m_y. \end{aligned} \quad [9]$$

Siendo  $m_y$  el peso unitario del hormigón saturado, cuyos efectos pueden calcularse por separado, y prescindir de este término al calcular las tensiones producidas por las presiones intersticiales.

Las ecuaciones de deformaciones y desplazamientos, en el caso de estado elástico bidimensional, quedan reducidas a:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x + \mu \sigma_y); \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y + \mu \sigma_x); \\ \gamma_{x,y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{x,y}. \end{aligned} \quad [10]$$

La condición de compatibilidad entre deformaciones exige:

$$\frac{\partial^2 \gamma_x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}. \quad [11]$$

En función de las tensiones, resultará:

$$2(1+\mu) \frac{\partial^2 \tau_{x,y}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad [12]$$

Derivando las ecuaciones [9] respecto a  $x$  e  $y$ , respectivamente, y sumándolas (suponiendo  $m_y = 0$ ):

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{x,y}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Sustituyendo en [12]:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) + (1 + \mu)^{-1} \nabla^2 p = 0.$$

Si la presión es una función laplaciana  $\frac{\partial^2}{\partial p} = 0$ .  
Llamando:

$$\sigma'_x = \sigma_x + p; \quad \sigma'_y = \sigma_y + p;$$

queda:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0; \quad \nabla^2 (\sigma'_x + \sigma'_y) = 0.$$

Lo que en este caso permitirá calcular las tensiones  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  obteniendo las que resultarán de aplicar las presiones en el contorno y restar de ellas las presiones internas  $p$ .

En caso de no cumplir las presiones la función de Laplace, quedaría:

$$\nabla^2 (\sigma'_{xx} + \sigma'_{yy}) = (1 - \mu) \nabla^2 p;$$

en cuyo caso el procedimiento anterior no sería admisible, salvo si  $\mu = 1$ , cosa no posible en la práctica, y habría que calcular las tensiones partiendo de las fuerzas másicas:

$$m_x = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad m_y = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Por no aplicarse las presiones sobre las superficies límites, sino sobre el medio poroso, las condiciones de equilibrio según los ejes  $x$  e  $y$  en los contornos, formando un ángulo  $\alpha$  con el eje  $y$ , darian:

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos \alpha &= \tau_{xy} \sin \alpha; & \sigma_x &= \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha; \\ \tau_{xy} \cos \alpha &= \sigma_y \sin \alpha; & \tau_{xy} &= \sigma_y \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

En caso de ser  $\nabla^2 p = 0$ , podría partirse de unas condiciones en el contorno:

$$\begin{aligned} \sigma'_{xx} \cos \alpha - \tau_{xy} \sin \alpha &= p \cos \alpha; & \sigma'_{xx} - p &= \tau_{xy} \operatorname{tg} \alpha; \\ \tau'_{xy} \cos \alpha - \sigma_y \sin \alpha &= -p \sin \alpha; & \tau'_{xy} &= (\sigma'_y - p) \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Como conclusión, podemos resumir:

Si la ley de presiones dentro de un medio poroso cumple la ecuación diferencial de Laplace, el estado de tensiones bidimensional puede obtenerse restando la presión en cada punto del estado de tensiones que se obtendría de aplicar las presiones sobre el contorno del medio, suponiendo dicho contorno impermeable.

Si varía dentro del medio poroso la permeabilidad, o existen contornos cerrados que actúan como drenes o manantiales, la ley de presiones ya no cumplirá la condición de Laplace, y no será admisible calcular las tensiones partiendo de cargas exteriores, sino que será preciso considerar las presiones como unas fuerzas de masa de magnitud:

$$m_x = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad m_y = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Del mismo modo se puede operar en coordenadas polares, obteniéndose las siguientes ecuaciones elementales de equilibrio interno  $\tau_{rr} = \tau_{\varphi\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (\tau_r - \tau_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial p}{\partial r} &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Las deformaciones estarán ligadas con los desplazamientos y tensiones por las siguientes fórmulas:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} (\tau_r - \mu \tau_{\varphi\varphi});$$

$$\varepsilon_{\varphi} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{E} (\tau_{\varphi\varphi} - \mu \tau_r);$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{r\varphi}.$$

De estas ecuaciones se deduce la condición entre tensiones para comprobar la continuidad:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_z}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} + \\ & + (1 + \eta) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r - \sigma_z) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_r - \sigma_z) \right] + 2(1 + \eta) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (r \tau_{rz}) = 0. \end{aligned}$$

o bien, en función de las tensiones normales y de la presión:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} [\sigma_r + \sigma_z + (1 + \eta) p] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [\sigma_r + \sigma_z + (1 + \eta) p] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [\sigma_r + \sigma_z + (1 + \eta) p] = 0.$$

### Ejemplos de aplicación.

Calcularemos a continuación el estado de presiones producido al circular el agua en un perfil triangular de presa de gravedad y la influencia en el estado de presiones de una pantalla de hormigón relativamente impermeable y de una red continua de drenaje.

Con las presiones resultantes, calcularemos los estados de tensiones que se producen en el cuerpo de la presa de perfil triangular indefinido.

Más adelante calcularemos el efecto de las presiones intersticiales sobre el reparto de tensiones en presas bóveda.

### Perfil triangular de presa homogéneo con nivel del agua a la altura del vértice. Cálculo de las presiones intersticiales.

Las distancias, presiones y velocidades serán homotéticas respecto al vértice (figura 1.º), por lo que la ley de presiones puede tener la forma:

$$p = a x + b y.$$

En el paramento de agua arriba;  $x = 0$ :

$$p = \gamma y = b y; \quad b = \gamma.$$

En el paramento de agua abajo;  $x = m y$ :

$$0 = p = a m y + b y; \quad a = -\frac{\gamma}{m}.$$

Resultando:

$$\frac{p}{\gamma} = -\frac{1}{m} x + y.$$

Las velocidades de circulación serán:

$$v_x = -\frac{k_x}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{k_x}{m}.$$

$$v_y = -k_y \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y} - 1 \right] = 0,$$

Condición de compatibilidad:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

El agua circulará horizontalmente, por lo que esta misma solución valdrá en caso de ser el cimiento impermeable, mientras en caso de ser el cimiento permeable,

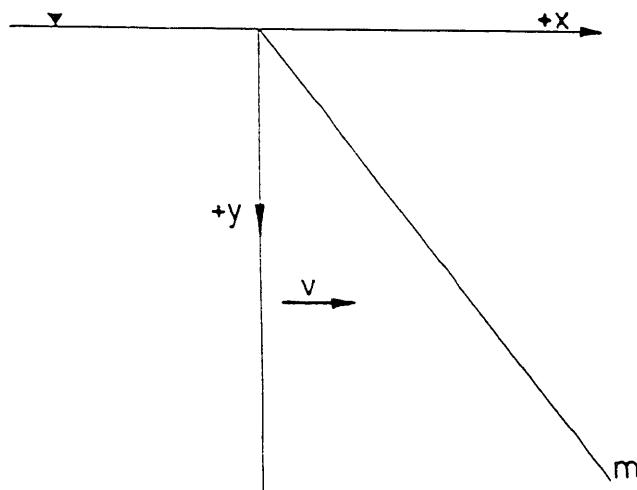


Figura 1.<sup>a</sup>

las presiones serían inferiores y la circulación tendrá una componente vertical hacia abajo.

El caudal que circulará hasta una profundidad  $h$  será:

$$q = \frac{h k_x}{m},$$

El agua transmitiría al hormigón unas cargas máscicas unitarias:

$$m_x = -\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\gamma}{m};$$

$$m_y = -\frac{\partial p}{\partial y} = -\gamma.$$

**Perfil triangular de presa con pantalla de menor permeabilidad que el cuerpo de la presa y espesor linealmente creciente con pendiente  $n$ .**

En este caso (fig. 2.<sup>a</sup>) también las presiones serán homotéticas respecto al vértice y, por consiguiente, proporcionales a la profundidad y a una función de  $x/y$ .

Podemos comprobar que también en este caso la presión es función lineal en cada una de las zonas poco permeable y permeable, utilizando para la primera el subíndice 1 y para la segunda el subíndice 2:

$$p_1 = a_1 x + b_1 y;$$

$$p_2 = a_2 x + b_2 y.$$

Las condiciones de contorno darán:  
Paramento de agua arriba:  $x = 0; p = \gamma y$ :

$$\gamma y = b_1 y; \quad b_1 = \gamma.$$

Línea de separación entre las dos zonas:  $x = n y$ . Deben igualarse las presiones y caudal que pasa por cada elemento lineal:  $a_1 n + b_1 = a_2 n + b_2$ :

$$v_{1x} = -\frac{k_{1x}}{\gamma} \frac{\partial p_1}{\partial x} = -\frac{a_1 k_{1x}}{\gamma}; \quad v_{1y} = -k_{1y} \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p_1}{\partial y} - 1 \right] = k_{1y} \left( 1 - \frac{b_1}{\gamma} \right);$$

$$v_{2x} = -\frac{a_2 k_{2x}}{\gamma}; \quad v_{2y} = k_{2y} \left( 1 - \frac{b_2}{\gamma} \right).$$

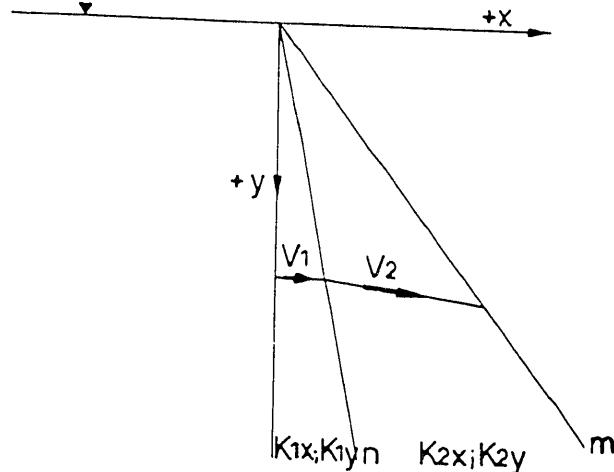


Figura 2.<sup>a</sup>

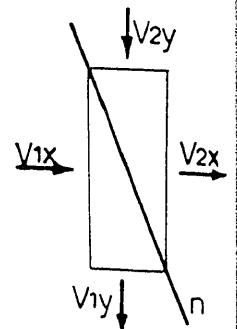


Figura 3.<sup>a</sup>

Para que exista continuidad (fig. 3.<sup>a</sup>):

$$v_{1x} - n v_{1y} = v_{2x} - n v_{2y},$$

$$-a_1 k_{1x} + n b_1 k_{1y} - n \gamma k_{1y} = -a_2 k_{2x} + n b_2 k_{2y} - n \gamma k_{2y};$$

finalmente, en el paramento de agua abajo  $x = m y$ , la presión debe ser nula:

$$a_2 m + b_2 = 0.$$

De este sistema de ecuaciones, deducimos:

$$a_1 = -\frac{k_{2x} + n^2 k_{2y}}{(m-n) k_{1x} + n k_{2x} + n^2 m k_{2y}} \gamma \Rightarrow b_1 = \gamma;$$

$$a_2 = -\frac{k_{1x} + n^2 k_{2y}}{(m-n) k_{1x} + n k_{2x} + n^2 m k_{2y}} \gamma \Rightarrow b_2 = -a_2 m.$$

Si la permeabilidad fuera igual en todas las direcciones, poniendo:

$$\frac{k_{2x}}{k_{1x}} = \frac{k_{2y}}{k_{1y}} = \lambda;$$

$$\frac{p_1}{\gamma} = -\frac{\lambda(1+n^2)}{(m-n)+\lambda n(1+m n)} x + y = -\left(\frac{1-\alpha}{n} + \frac{\alpha}{m}\right) x + y;$$

$$\frac{p_2}{\gamma} = -\frac{(1+n^2)\lambda}{(m-n)+\lambda n(1+m n)} \left(\frac{x}{m} - y\right) = -\alpha \left(\frac{x}{m} - y\right).$$

Siendo  $\alpha$  la relación entre las presiones con pantalla y con perfil homogéneo en el límite de la pantalla.

Las velocidades serán:

$$v_{1x} = -\frac{a_1 k_{1x}}{\gamma} = \frac{k_{2x} + n^2 k_{2y}}{(m-n) k_{1x} + n k_{2x} + n^2 m k_{2y}} k_{1x};$$

$$v_{1y} = 0;$$

$$v_{2x} = -\frac{a_2 k_{2x}}{\gamma} = \frac{k_{1x} + n^2 k_{2y}}{(m-n) k_{1x} + n k_{2x} + n^2 m k_{2y}} k_{2x};$$

$$v_{2y} = \left(1 - \frac{b_2}{\gamma}\right) k_{2y} = \frac{n(k_{2x} - k_{1x})}{(m-n) k_{1x} + n k_{2x} + n^2 m k_{2y}} k_{2y}.$$

En este caso, si el perfil triangular se asentase sobre un cimiento impermeable, se perturbaría este régimen incrementándose las presiones cerca de la base de la presa.

El caudal que circularía por el macizo hasta una profundidad  $h$  sería:

$$q = h v_{1x} = \frac{k_{2x} + n^2 k_{2y}}{(m-n) k_{1x} + n k_{2x} + n^2 m k_{2y}} h k_{1x}.$$

Las cargas másticas transmisiones por el agua al hormigón serán:

$$m_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow m_{1x} = -a_1 \Rightarrow m_{2x} = -a_2;$$

$$m_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \Rightarrow m_{1y} = -\gamma \Rightarrow m_{2y} = a_2 m.$$

Calculamos el empuje total de la subpresión con  $\gamma = 1$ :

$$V = \frac{1}{2} m y \cdot \alpha y + \frac{1}{2} n y (1-\alpha) y = \frac{y^2}{2} [n + \alpha(m-n)].$$

Si llamamos  $\Delta V$  a su diferencia con la subpresión triangular:

$$\Delta V = \frac{1}{2} y^2 m - \frac{y^2}{2} [n + \alpha(m-n)] = \frac{y^2}{2} (1-\alpha)(m-n) = \frac{y^2}{2} \frac{n(m-n)(\lambda-1)}{m-n+\lambda n(1+m n)}.$$

Si fijamos  $m$  y  $\lambda$  esta función alcanza un máximo para:

$$n = \frac{m(-1 + \sqrt{\lambda(1+m^2)})}{\lambda(1+m^2)-1},$$

que nos da la pendiente óptima de la superficie de separación de las dos zonas de distinta permeabilidad.

Hemos calculado las presiones, velocidades y cargas para:

$$m = 0.8 \Rightarrow n = 0.1 \Rightarrow \gamma = 1 \Rightarrow k_{1x} = k_{1y} \Rightarrow k_{2x} = k_{2y};$$

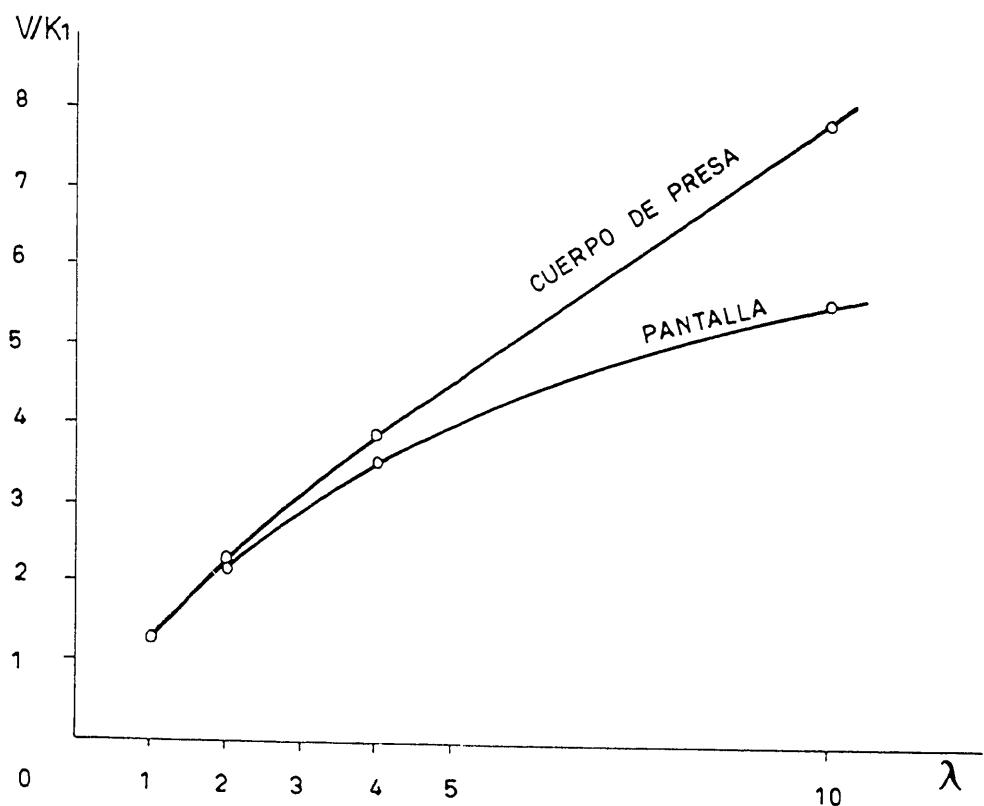


Figura 4.3

y diversas proporciones de permeabilidad:  $\lambda = \frac{k_{2x}}{k_{1x}}$ ,  $= 2, 4, 10$  y resultan:  
Para  $\lambda = 2$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= -2.205x + y, \\ p_2 &= -1.113x + 0.891y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{1x} &= 2.205 k_{1x}, & v_{1y} &= 0, \\ v_{2x} &= 1.113 k_{2x} = 2.227 k_{1x}, & v_{2y} &= 0.109 k_{2y} = 0.218 k_{1x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{1x} &= 2.205, & m_{1y} &= -1, \\ m_{2x} &= 1.113, & m_{2y} &= -0.891. \end{aligned}$$

Para  $\lambda = 4$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= -3.569x + y, \\ p_2 &= -0.919x + 0.735y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{1x} &= 3.569 k_{1x}, & v_{1y} &= 0, \\ v_{2x} &= 0.919 k_{2x} = 3.675 k_{1x}, & v_{2y} &= 0.265 k_{2y} = 1.060 k_{1x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{1x} &= 3.569, & m_{1y} &= -1, \\ m_{2x} &= 0.919, & m_{2y} &= -0.735. \end{aligned}$$

Para  $\lambda = 10$ :

$$p_1 = -5,674x + y, \\ p_2 = -0,618x + 0,494y.$$

$$v_{1,x} = 5,674k_{1,x}, \quad v_{1,y} = 0, \\ v_{2,x} = 0,618k_{2,x} = 0,18k_{1,x}, \quad v_{2,y} = 0,506k_{2,y} = 5,056k_{1,x}, \\ m_{1,x} = 5,674, \quad m_{1,y} = -1, \\ m_{2,x} = 0,618, \quad m_{2,y} = -0,494.$$

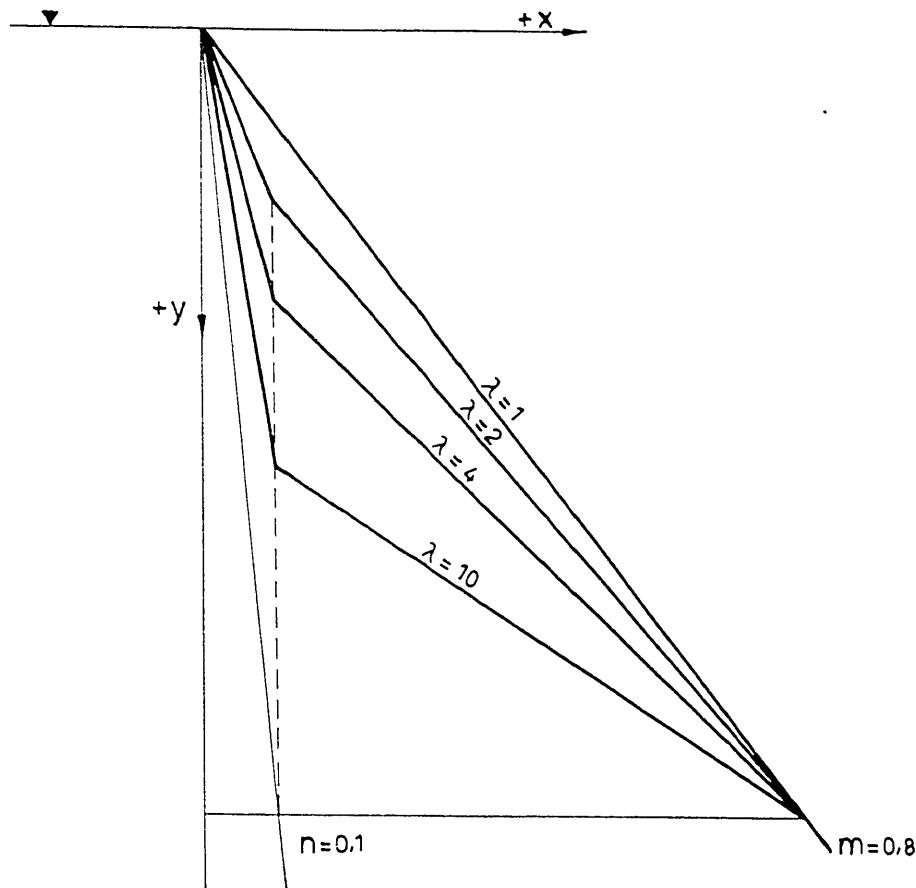
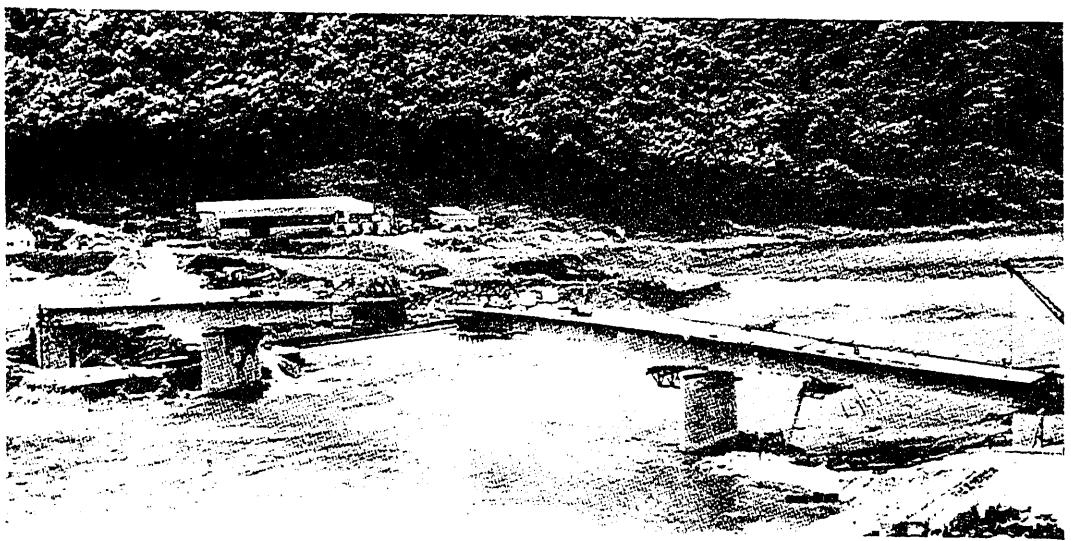


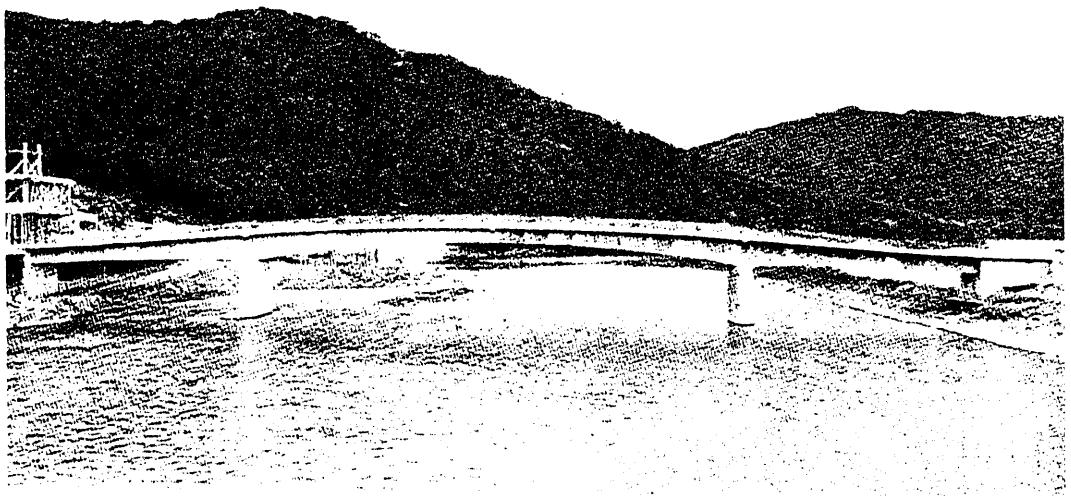
Figura 5.a.

Hemos representado la variación de las velocidades en las dos zonas para distintos valores de  $\lambda$  (fig. 4.a). También hemos dibujado las leyes de presiones para diversas relaciones entre las permeabilidades del hormigón de la pantalla y el del cuerpo de la presa (fig. 5.a). Se deduce que para que se produzca una reducción importante en el régimen de presiones intersticiales dentro de una presa de gravedad, la relación entre permeabilidades de la pantalla y del resto de la presa, deberá ser muy reducido.

(Continuará.)



(En construcción.)



Puente sobre el Meuse, para la central nuclear de Chooz (Ardeches), construido en hormigón precomprimido. Longitud total, 110,50 m.; viga central, 50 m.