

CALCULO DIRECTO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS Y ESFUERZOS DE LAS BARRAS EN ENTRAMADOS PLANOS Y ESPACIALES

Por M. A. HACAR BENITEZ
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Propone el autor, y lo desarrolla en el presente trabajo, un método inverso al clásico para resolver el problema que reseña en el epígrafe. En el presente artículo publicamos la exposición completa del método y su aplicación al ejemplo primero dejando los cinco ejemplos restantes y las conclusiones para el próximo número.

I. Antecedentes.

Los entramados o estructuras de celosía que vamos a considerar están formados por *barras* (que por ahora supondremos rectas y de sección uniforme) articuladas en sus extremos, que llamamos *nudos*.

Los sistemas llamados *estrictamente indeformables* permiten obtener, al disponer fuerzas en los nudos, el número suficiente de ecuaciones para determinar las tensiones de las barras. Tal es el objeto de la estática clásica de los entramados que *no tienen líneas o barras en exceso* (1).

Cuando son planos suelen resolverse por los métodos llamados de las secciones (Cullmann y Ritter) y de los nudos (figuras recíprocas o de Cremona). Cuando son espaciales también hay, además de procedimientos analíticos, otros gráficos, como el de B. Mayor, fundado en la transformación de figuras.

Cuando un sistema o entramado tiene *líneas en exceso* (en general más de $2n - 3$ barras si es plano, y más de $3n - 6$ si es espacial; n es el número de nudos) hay que acudir al estudio de las deformaciones, o sea, a la Resistencia de Materiales.

Para el cálculo de los esfuerzos en las barras suele indicarse entonces en casi todos los tratados (2) la conveniencia de hallar primeramente los de una estructura estrictamente indeformable que resulte al *suprimirle barras de exceso*. En su lugar se ponen fuerzas ficticias, actuando en sus extremos. Por la aplicación del teorema de los trabajos virtuales y las ecuaciones de Maxwell se obtienen estas fuerzas ficticias. Superponiendo su acción a los esfuerzos primeros se obtienen los reales de la estructura, al imponer además las condiciones de sustentación (apoyos fijos, móviles, elásticos, etc.).

Los desplazamientos o recorridos de los nudos suelen obtenerse después (3) de conocer los esfuerzos.

En cuanto se trata de estructuras con varias barras en exceso el problema se complica de tal manera que casi todos los autores recomiendan recurrir a hipótesis simplificativas que, a veces, se alejan bastante de la realidad.

(1) F. Casares Bescansa: "Mecánica General", cap. XV. Gráficas Reunidas, S. A. Madrid, 1921.

(2) D. Mendizábal: "Estructuras metálicas" y "Tramos metálicos". E. Torroja: "Cálculo elemental de vigas trianguladas". Publicación núm. 101 del Instituto Técnico de la Construcción y del Cemento.

(3) E. Saliger: "Estática aplicada", cap. V. Ed. Labor. Tung. Au: "Elementary Structural Mechanics". Prentice-Hall Inc. N. Jersey, 1963.

Así, las vigas de celosía múltiple se descomponen en varias sencillas repartiendo las cargas. En las diagonales de los recuadros de las vigas de los puentes metálicos se supone que trabajan, según los casos, sólo las de tracción. Y muchas otras (4).

Para calcular los desplazamientos de los nudos, citan casi todos los autores el diagrama de Williot para estructuras planas (5), y otros más complicados aún para las estructuras espaciales (6).

Así, resulta que el trabajo para calcular con rigor y por completo una estructura, sobre todo si es espacial, con barras en exceso y hallando los recorridos de los nudos es inmenso y expuesto a error (7). No pueden hacerse demasiadas hipótesis diferentes de cargas si se quiere que el cálculo no se prolongue indefinidamente.

II. Desplazamientos y esfuerzos.

Estimamos que siempre es muy interesante conocer tanto los desplazamientos que experimentan los nudos de una estructura como los esfuerzos (tracción o compresión) de las barras, a causa de su peso propio y de las diversas cargas aplicadas y reacciones, por los siguientes motivos:

1.º Para su montaje hay que tener previstos dichos desplazamientos (contraflechas, variaciones de longitud según la temperatura en cada instante, etc.).

2.º La determinación de dichos desplazamientos nos permite prever las flechas que tomará la estructura al cargarlas, comprobando así en las pruebas las hipótesis y resultados obtenidos en los cálculos.

3.º Los desplazamientos de los nudos de una estructura sometida a cargas en los mismos, permite determinar su comportamiento dinámico (impacto, vibraciones, resonancias).

4.º El refuerzo de una estructura puede hacerse por varios procedimientos:

a) Aumentando las secciones de las barras que convenga o las inercias de sus secciones transversales para alejarlas de la posibilidad de pandeo.

b) Disponiendo barras superabundantes (contradiagonales, por ejemplo), que harán, en general, la estructura más rígida, haciendo variar su forma de trabajo.

c) Con tensiones previas o ulteriores dadas con gatos hidráulicos (8), con cables o con barras de aceros especiales puede lograrse un verdadero pretensado o una precompresión (9).

Todo esto exige un conocimiento exacto, fácil y rápido, tanto de los desplazamientos de los nudos como de las modificaciones de longitud de las barras bajo la acción de muy diversas hipótesis de carga.

(4) Milo, S. Ketchum: "The Design of Highway Bridges of Steel, Timber and Concrete", chap. VII. McGraw-Hill, 1920. E. Torroja: Obra citada, pág. 18, "Cálculo de celosías múltiples". I. Rubio Sanjuán: "Elementos de Grafostática", cap. IX. Ed. Labor, 1951.

(5) Ver obra citada de E. Torroja, pág. 18, o C. Fernández Casado: "Cálculo de estructuras reticulares". Ver obra citada de Ketchum, chap. VI.

(6) "Three-dimensional displacement diagrams for spaces frame structures". *Proceedings Am. Soc. Civil Engin.*, vol. LXXVI, Mayo 1950.

(7) Ver, por ejemplo, S. Timoshenko y D. H. Young: "Teoría de las estructuras", caps. IV y VII. E. Torroja, en la obra citada, pág. 16, dice textualmente: "Cuando el número de hiperestáticas es un poco grande, la resolución del sistema se hace demasiado penosa".

(8) Ver Vittorio Zignoli: "Costruzioni metalliche", vols. I y II. U.T.E.T.

(9) Son muy interesantes los estudios sobre estructuras de acero pretensado o precomprimidas hechos por Dischinger, Magnel y Colonnetti. Ver también obra citada de V. Zignoli, t. II, págs. 859 a 865. Ver artículo de Bernhard Fritz "Vorgespannte Stahl-konstruktionen zur Überdachung weiter Räume", en *V.D.I. Zeitschrift*, junio 1958, págs. 753 a 762.

III. Método a desarrollar.

Procederemos de modo inverso que en los clásicos.

Determinaremos *primeramente los desplazamientos de los nudos*. Una vez conocidos *se hallan inmediatamente los esfuerzos en cada barra* (10).

Probaremos en lo que sigue:

1.º Que es posible escribir de modo directo e *inmediato* el sistema de ecuaciones lineales que da los desplazamientos de los nudos (sus componentes u_i v_i w_i del nudo i sobre unas direcciones de ejes coordenados $O X O Y O Z$), tanto de un entramado plano como espacial, isostático o hiperestático, de cualquier número de barras articuladas en los nudos y en los cuales actúan las cargas o reacciones F_i (de componentes F_{x_i} F_{y_i} F_{z_i}).

2.º Estas ecuaciones son en número igual a $2n$, o sea, al doble del de nudos si el sistema es plano, o, a $3n$ o al triple si es espacial. *No depende del número de barras en exceso* que pueda tener el sistema.

3.º Los segundos miembros (términos independientes) de estas ecuaciones (2 ó 3 por cada nudo según que el sistema sea plano o espacial) son las componentes de la fuerza (o reacciones F_{x_i} F_{y_i} F_{z_i} sobre los ejes coordenados).

En las (2 ó 3) ecuaciones correspondientes a cada nudo i figuran como incógnitas los desplazamientos de dicho nudo i (o sea, u_i v_i w_i) y los de los nudos a los que *está unido directamente* por barras.

Los coeficientes son expresiones homogéneas, de primer grado de las rigideces K de las barras que concurren en el nudo (rigidez, correspondiente a esfuerzos longitudinales, se define, si la barra es de igual sección S en toda su longitud L y si su material tiene coeficiente de elasticidad E , por la expresión $K = E \cdot S : L$); y de segundo grado en los cosenos directores de los ángulos α β γ que cada una de dichas barras forma con los ejes coordenados de referencia.

4.º Para plantear las ecuaciones no es preciso hacer distinción alguna entre estructuras isostáticas o hiperestáticas ni si sus barras son superabundantes o no. Si el sistema de barras admite movimientos, resultarán desplazamientos infinitos, y entonces, el determinante (de grado $2n$ ó $3n$) de los coeficientes de las u_i v_i (o de las u_i v_i w_i) del sistema de ecuaciones será nulo.

Cuanto más pequeña sea su característica, mayor será el número de grados de libertad de los movimientos posibles.

5.º Determinando los desplazamientos (u_i v_i) (u_j v_j) de los nudos $i-j$ extremos de la barra $i-j$ que los une, la fuerza de tracción T (positiva) o compresión (negativa) a que está sometida es, cuando el sistema es plano:

$$T = K [(u_j - u_i) \cos \alpha + (v_j - v_i) \cos \beta],$$

siendo α y β los ángulos que la barra $i-j$ forma con las direcciones positivas de los ejes coordenados $O X$ y $O Y$ (11).

Análogamente, si es espacial y si (u_i v_i w_i) y (u_j v_j w_j) son los desplazamientos, la tracción (o compresión) de la barra será:

$$T = K [(u_j - u_i) \cos \alpha + (v_j - v_i) \cos \beta + (w_j - w_i) \cos \gamma].$$

(10) Hemos tomado las ideas principales que figuran a continuación del comunicado de Masao Naruoka a la Association Internationale de Ponts et Charpentes. *Memoires*, año 1961, vol. XXI, págs. 179 a 192. Posteriormente, vol. XXII, págs. 129 a 144. Shu-T'ien Li puso las ecuaciones fundamentales en forma matricial.

(11) Utilizaremos $\cos \beta$ en lugar de $\sin \alpha$ ($\alpha + \beta = 90^\circ$) para unificar la notación de estructuras planas y espaciales.

6.ª *Simplificaciones.* — Pueden hacerse algunas importantes que reducen el número de ecuaciones del sistema. Tal es el caso de estructuras simétricas o antisimétricas. En los puntos j de apoyo fijo se tiene simplemente $u_j = v_j = w_j = 0$. Si el apoyo j tiene movimiento libre horizontal se verifica para el mismo que $w_j = 0$ ($F_{xj} = 0$).

Pudiera ser que un apoyo de una estructura fuese sobre un muelle o suelo de rigidez C o reacción proporcional a su flecha o asiento. En tal caso, la ecuación correspondiente a la componente vertical de desplazamiento de este nudo de apoyo j será $C \cdot w = F_z$ siendo C conocida.

En algunos casos la condición de equilibrio del sistema (anulación de la suma de las componentes de las fuerzas y de sus momentos con respecto a los ejes coordenados) pueden facilitar la determinación de las reacciones de apoyo.

7.ª *Variación de cargas.* — La variación de cargas o fuerzas que actúan en los diversos nudos no exige más que la *modificación de los segundos miembros o términos independientes de las ecuaciones* (12). Así es que si cambia la carga de un nudo sólo hay que variar los 2.ª miembros de 2 ecuaciones (2 si es plana la estructura y de 3 si es espacial).

8.ª *Modificación, supresión o adición de una barra.* — Por lo que veremos más adelante, ello no supone más que modificar su rigidez $K = ES : L$ (nula si no existe barra). Ello tiene como consecuencia la variación de sólo los *coeficientes de las ecuaciones correspondientes a los nudos de sus extremos* (4 ecuaciones si la estructura es plana y 6 si espacial).

9.ª Numerados de 1 a n los nudos es inmediato el planteamiento de las ecuaciones de sus desplazamientos y esfuerzos de las barras que los unen; los ordenadores electrónicos constituyen un magnífico auxiliar para estos trabajos.

Aun cuando ahora haremos algunos ejemplos sencillos de aplicación del método expuesto, esperamos que en un próximo artículo mi amigo y compañero, D. Antonio Nieto, exponga el Programa número 9.2. E. 14 que ha hecho para estructuras planas de un número de nudos igual o inferior a 15, *con cualquier número de barras*. Es para un equipo de cálculo I. B. M. de 20.000 posiciones de memoria (e I. B. M. 1.622 unidad lectora perforadora de ficha).

El tiempo de cálculo es: carga de programa: cuatro minutos; ejecución y salida: cinco segundos por barra.

Se comprende que con equipos de mayores posiciones de memoria será muy fácil y rápido el cálculo de cualquier estructura (13).

IV. Ecuaciones de equilibrio de cada nudo.

Para mayor facilidad supondremos por ahora que se trata de una *estructura plana* (figura 1.ª). Sea 0 uno de los nudos y 0 — 1; 0 — 2; 0 — 3 y 0 — 4, cuatro barras que parten de él. Si las 0 — 2 y 0 — 3 están, por ejemplo, a *tracción*, su acción consistirá

(12) Sabido es la facilidad que supone, en el cálculo mecánico o con ordenadores electrónicos, el mantener invariable la matriz de los coeficientes. Por tal motivo, es fácil en una misma estructura variar las hipotesis de cargas, ya que éstas *sólo aparecen en los segundos miembros*.

(13) El duplicar o triplicar las posiciones memoria permite aumentar en *proporción mucho mayor* la posibilidad de cálculo de estructuras complicadas, ya que gran parte de dichas posiciones están ocupadas por el programa y no dependen, por tanto, del número de nudos. Véase el artículo resumen de A. Preismann, P. Berthier y R. Durand, en la revista *Acero*, noviembre 1963, págs. 483 y 484, "El empleo de calculadores electrónicos en varios problemas de estática de las construcciones".

en tirar del nudo 0. Como las 0—1 y 0—4 están a compresión, actuarán *hacia* o *contra* el nudo. La fuerza exterior F (de proyecciones F_x F_y sobre ejes coordenados OX , OY que pasen por el nudo considerado) estará en equilibrio con las \bar{C}_1 \bar{T}_2 \bar{T}_3 \bar{C}_4 , o sea, que la suma vectorial $\bar{F} + \bar{C}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3 + \bar{C}_4 = \bar{0}$.

En lo sucesivo consideraremos como *positivas* los esfuerzos de barras sometidas a *tracción*, y *negativas* los a *compresión*.

Vamos a calcular ahora la tracción de una barra (fig. 2.^a) de longitud inicial

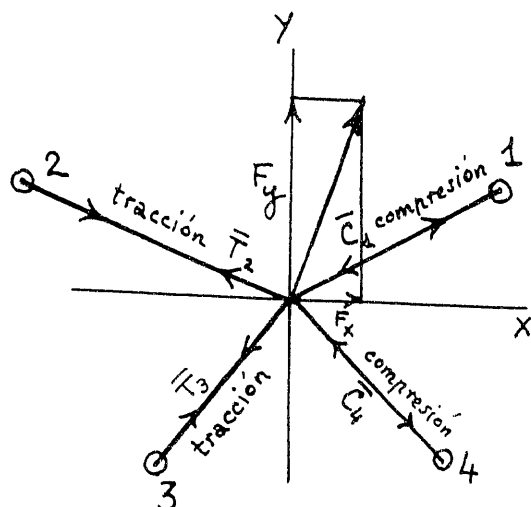


Figura 1.^a

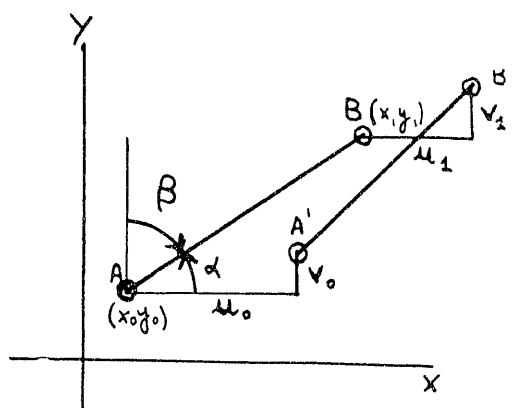


Figura 2.^a

l_0 y cuyos extremos A y B son de coordenadas (x_0, y_0) y (x_1, y_1) . Sea $A'B'$ la posición de la barra una vez cargada la estructura.

Llemos u_0, v_0 a las proyecciones del recorrido AA' del nudo A sobre los ejes coordenados; u_1 y v_1 son las correspondientes a B.

La barra $AB = l_0$ habrá incrementado su longitud en Δl_0 . Determinemos Δl_0 en función de $l_0, x_0, y_0, x_1, y_1, u_0, v_0, u_1, v_1$ suponiendo que *los recorridos u_i, v_i son muy pequeños con respecto a l_0 .*

Al ser:

$$\Delta l_0 = A'B' - AB = \sqrt{(x_1 + u_1 - x_0 - u_0)^2 + (y_1 + v_1 - y_0 - v_0)^2} - \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}.$$

Como:

$$l_0^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2,$$

queda:

$$\Delta l_0 = \sqrt{l_0^2 + 2(x_1 - x_0)(u_1 - u_0) + (y_1 - y_0)(v_1 - v_0) + (u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2} - l_0.$$

Considerando que los dos últimos sumandos de la cantidad subradical son de orden superior y que por ser la u_i, v_i pequeños con respecto a l_0 al desarrollar en serie lo que queda bajo la cantidad subradical y tomar sólo los dos primeros términos, queda:

$$\Delta l_0 = \frac{(x_1 - x_0)(u_1 - u_0) + (y_1 - y_0)(v_1 - v_0)}{l_0}.$$

Si α y β son los ángulos que la barra AB forma con los ejes coordenados, como:

$$x_1 - x_0 = l_0 \cdot \cos \alpha;$$

$$y_1 - y_0 = l_0 \cdot \cos \beta,$$

sustituyendo resulta:

$$\Delta l_0 = (u_1 - u_0) \cos \alpha + (v_1 - v_0) \cos \beta.$$

Ahora bien, si E es el coeficiente de elasticidad de la barra y S su sección (suponemos es constante en toda su longitud), la tracción T a que está sometida la barra es:

$$T = \frac{E \cdot S \cdot \Delta l_0}{l_0}.$$

La expresión $K = \frac{E \cdot S}{l_0}$ se llama *rigidez de la barra* (rigidez a esfuerzos longitudinales).

Depende, pues, sólo de sus condiciones geométricas y del material de que está constituida.

Como:

$$T = K [(u_1 - u_0) \cos \alpha + (v_1 - v_0) \cos \beta] \quad [1]$$

sus componentes sobre los ejes coordenados serán:

$$T_x = K [(u_1 - u_0) \cos^2 \alpha + (v_1 - v_0) \cos \alpha \cos \beta];$$

$$T_y = K [(u_1 - u_0) \cos \alpha \cos \beta + (v_1 - v_0) \cos^2 \beta].$$

Considerando el equilibrio de todas las barras que concurren en un nudo podremos establecer para *cada nudo las dos ecuaciones*:

$$\sum T_x + F_x = 0$$

$$\sum T_y + F_y = 0$$

o sea:

$$F_x - \sum (k_i \cos^2 \alpha_i) u_0 - \sum (k_i \cos \alpha_i \cos \beta_i) v_0 + \sum (k_i \cos^2 \alpha_i) u_i + \sum (k_i \cos \alpha_i \cos \beta_i) v_i = 0;$$

$$F_y - \sum (k_i \cos \alpha_i \cos \beta_i) u_0 - \sum (k_i \cos^2 \beta_i) v_0 + \sum (k_i \cos \alpha_i \cos \beta_i) u_i + \sum (k_i \cos^2 \beta_i) v_i = 0.$$

Si llamamos, para cada barra:

$$\left. \begin{aligned} k_{\alpha\alpha} &= k \cos^2 \alpha \\ k_{\beta\beta} &= k \cos^2 \beta \\ k_{\alpha\beta} &= k \cos \alpha \cos \beta \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

(14) Si la barra es de sección S variable en su longitud L , podremos escribir $S = S(x)$ para $0 \leq x \leq L$. Si su material fuese también de coeficiente de elasticidad variable a lo largo de la barra $E = E(x)$, la rigidez K a esfuerzos longitudinales vendría definida por la expresión

$$K \cdot \int_0^L \frac{dx}{E(x) \cdot S(x)} = 1$$

ya que, dividiendo la tracción a que está sometida la barra, por ella obtenemos su incremento de longitud. Cuando E y S son constantes, resulta $K = \frac{ES}{L}$, que es valor que hemos manejado para barras de E y S constantes.

las ecuaciones se convierten en:

$$\left. \begin{aligned} \sum (k_{a \alpha_i}) u_0 - \sum (k_{a \alpha_i} u_i) + (\sum k_{a \beta_i}) v_0 - \sum (k_{a \beta_i}) v_i &= F_x \\ \sum (k_{a \beta_i}) u_0 - \sum (k_{a \beta_i} u_i) + (\sum k_{\beta \beta_i}) v_0 - \sum (k_{a \beta_i}) v_i &= F_y \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

Estas 2 ecuaciones (escritas para cada nudo) resuelven por completo el problema. Constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones con las $2n$ incógnitas $u_1 v_1 u_2 v_2, \dots, u_i v_i, \dots, u_n v_n$.

Determinadas éstas, por la expresión [1] se halla la tracción (si es negativa, compresión) de cada barra.

V. Observaciones.

Hay tantas parejas de estas ecuaciones como nudos tiene la estructura.

Los coeficientes de los desplazamientos $u_0 v_0$ del nudo considerado, así como los $u_i v_i$ de los nudos a que está unido por barras, puede establecerse según el esquema siguiente:

| Ecuación | Coficiente | Nudo que se considera | Nudos inmediatos |
|---------------------------|------------|------------------------|---------------------------------------|
| $\dots u + \dots v = F_x$ | u | $\sum K_{a \alpha}$ | $-K_{a \alpha}$ para todas las barras |
| | v | $\sum K_{a \beta}$ | $-K_{a \beta}$ para todas las barras |
| $\dots u + \dots v = F_y$ | u | | |
| | v | $\sum K_{\beta \beta}$ | $-K_{a \alpha}$ para todas las barras |

Se facilita su escritura representando la estructura por medio de *tres esquemas* de las barras del mismo. Sobre cada una de las barras del primero se escribirá el valor de la $K_{a \alpha} = K \cos^2 \alpha$ (siempre positivo) de cada barra. Sobre cada una de las barras del segundo se escribirá su $K_{a \beta} = K \cos \alpha \cos \beta$ que será positivo si la barra va en la dirección del primer al tercer cuadrante o negativo si del segundo al cuarto.

Sobre el tercer esquema se escriben los $K_{\beta \beta} = K \cos^2 \beta$ (siempre positivos).

En los ejemplos que expresamos puede seguirse claramente la forma de operar.

VI. Estructuras espaciales.

Las ecuaciones se plantean de modo muy análogo. Los coeficientes de las tres ecuaciones para cada nudo pueden escribirse según el siguiente esquema:

| Línea | Ecuación | Coefficiente | Nudo considerado | Nudos inmediatos |
|-------|-------------------|--------------|---------------------------|---|
| 1 | $u + v + w = F_x$ | u | $\Sigma K_{\alpha\alpha}$ | $-K_{\alpha\alpha}$ para todas las barras |
| 2 | | v | $\Sigma K_{\alpha\beta}$ | $-K_{\alpha\beta}$ para todas las barras |
| 3 | | w | $\Sigma K_{\alpha\gamma}$ | $-K_{\alpha\gamma}$ para todas las barras |
| 4 | $u + v + w = F_y$ | u | | Igual que la línea 2 |
| 5 | | v | $\Sigma K_{\beta\beta}$ | $-K_{\beta\beta}$ para todas las barras |
| 6 | | w | $\Sigma K_{\beta\gamma}$ | $-K_{\beta\gamma}$ para todas las barras |
| 7 | $u + v + w = F_z$ | u | | Igual que la línea 3 |
| 8 | | v | | Igual que la línea 6 |
| 9 | | w | $\Sigma K_{\gamma\gamma}$ | $-K_{\gamma\gamma}$ para todas las barras |

De modo análogo a las estructuras planas pueden dibujarse 6 esquemas con los ejes de las barras y sobre cada una de ellas indicar en cada caso los valores de sus $K_{\alpha\alpha} = K \cos^2 \alpha \gg K_{\beta\beta} = K \cos^2 \beta \gg K_{\gamma\gamma} = K \cos^2 \gamma$, todos ellos positivos; y los de $K_{\alpha\beta} = K \cos \alpha \cos \beta \gg K_{\alpha\gamma} = K \cos \alpha \cos \gamma \gg K_{\beta\gamma} = K \cos \beta \cos \gamma$ que pueden ser positivos o negativos, según la dirección que la barra tenga con respecto a los ejes del triedro trirrectángulo de referencia.

VII. Efectos térmicos.

Es fácil determinar los recorridos de los nudos y los esfuerzos ocasionados por las variaciones térmicas de cada barra.

Si suponemos que sin variar la temperatura cada nudo i efectúa los desplazamientos que resultan al final, y que entonces, *sin dejarlos mover*, se produce en cada barra (de sección uniforme S , longitud L , coeficiente de dilatación ε) un aumento de temperatura t , el resultado será el mismo.

Pero este aumento de temperatura con los extremos inmovilizados, equivale a una compresión (tracción negativa) de valor:

$$ES \cdot \varepsilon \cdot t = K \cdot L \cdot \varepsilon \cdot t.$$

O sea, que los efectos de *incremento t de temperatura* en una barra equivale a la aparición de sendas fuerzas dirigidas *hacia los nudos de sus extremos* y cuya intensidad es la indicada.

Por estar dirigidas *hacia* el nudo i las componentes sobre los ejes OX , OY , OZ de dicha fuerza, serán:

$$F_x = -KL\varepsilon t \cos \alpha; \quad F_y = -KL\varepsilon t \cos \beta; \quad F_z = -KL\varepsilon t \cos \gamma,$$

siendo α , β , γ los ángulos que la barra (de origen en el nudo) forma con las direcciones positivas de los ejes coordenados.

Los primeros miembros de las ecuaciones son como en el caso general de fuerzas cualesquiera.

En resumen, podemos decir que las ecuaciones para el cálculo de los efectos térmicos (variación de temperatura de cada barra) pueden también establecerse de modo inmediato.

VIII. Ejemplos.

Vamos a hacer aplicación a unos ejemplos sencillos de entramados estrictamente indeformables y de entramados con barras en exceso.

Ejemplo 1.º.

Determinar el desplazamiento (fig. 3.ª) del nudo O de la estructura formada por las barras OA y OB suponiendo fijos los nudos A y B .

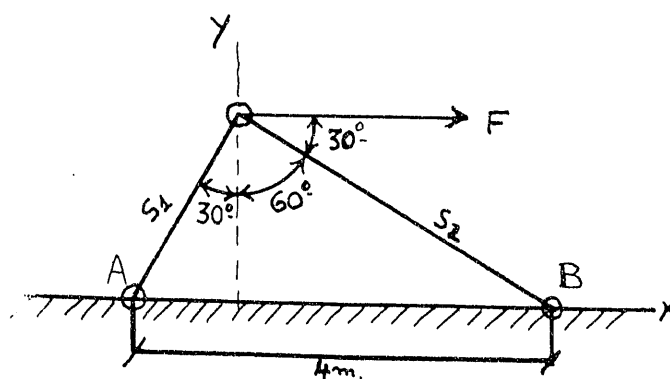


Figura 3.ª

En el nudo O actúa la fuerza horizontal F . Las rigideces de las barras OA y OB son K_1 y K_2 , respectivamente, siendo $K_1 = 2K_2 = 2K$.

SOLUCIÓN:

Tomando unos ejes OX y OY que pasen por O tenemos:

| Barra \overline{OA} | Barra \overline{OB} |
|--|--|
| $\alpha = 120^\circ$ | $\alpha = 30^\circ$ |
| $\beta = 150^\circ$ | $\beta = 120^\circ$ |
| $K_{\alpha\alpha} = \frac{1}{4} K_1$ | $K_{\alpha\alpha} = \frac{3}{4} K_2$ |
| $K_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{3}}{4} K_1$ | $K_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{3}}{4} K_2$ |
| $K_{\beta\beta} = \frac{3}{4} K_1$ | $K_{\beta\beta} = \frac{1}{4} K_2$ |

Ecuaciones del nudo A:

$$u_A = 0,$$

$$v_A = 0.$$

Ecuaciones del nudo B:

$$u_B = 0,$$

$$v_B = 0.$$

Ecuaciones del nudo O:

$$\left(\frac{1}{4} K_1 + \frac{3}{4} K_2 \right) u_0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} K_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} K_2 \right) v_0 = F,$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4} K_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} K_2 \right) u_0 + \left(\frac{3}{4} K_1 + \frac{1}{4} K_2 \right) v_0 = 0.$$

Simplificando esta última, como $K_1 = 2 K_2 = 2 K$ obtenemos:

$$\boxed{u_0 = \frac{7}{8} \frac{F}{K}} \quad \boxed{v_0 = -\frac{\sqrt{3}}{8} \frac{F}{K}},$$

como componente horizontal (hacia la derecha) y vertical (hacia abajo) del nudo O.

Los esfuerzos en las barras son:

$$T_{OA} = 2k [(O - u_0) \cos 120^\circ + (O - v_0) \cos 150^\circ] = 2k \left(\frac{7}{16} \frac{F}{K} - \frac{3}{16} \frac{F}{K} \right) = \boxed{\frac{F}{2}} \dots \text{tracción.}$$

$$T_{OB} = k [(O - u_0) \cos 30^\circ + (O - v_0) \cos 120^\circ] = k \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{7}{8} \frac{F}{K} - \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{F}{K} \frac{1}{2} \right) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} F} \dots \text{compresión.}$$

Valores éstos que se comprueban inmediatamente, pues son las proyecciones de F sobre OA y OB , respectivamente. Este ejemplo tan sencillo sólo lo hemos desarrollado con objeto de indicar el modo de aplicar el método.

Pasemos a otro un poco más complicado.

(Continuará).