

# CALCULO DIRECTO DE LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS Y ESFUERZOS DE LAS BARRAS EN ENTRAMADOS PLANOS Y ESPACIALES

Por M. A. HACAR BENITEZ  
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos.

En nuestro número anterior publicamos la primera parte de este importante trabajo, y en ella puede ver el lector el método propuesto por el autor para resolver el problema reseñado en el epígrafe, que a continuación se aplica a los ejemplos 2.<sup>o</sup>, 3.<sup>o</sup>, 4.<sup>o</sup>, 5.<sup>o</sup> y 6.<sup>o</sup>, presentándose después las conclusiones del estudio.

(Conclusión)

Ejemplo 2.<sup>o</sup>:

Hallar el desplazamiento del nudo O de la figura 4.<sup>a</sup> en el que concurren las 4 barras OA, OB, OC y OD de rigideces respectivas 2K; K; K; 3K, así como el esfuerzo en la barra OB.

SOLUCIÓN:

Lo mismo que antes tenemos para las distintas barras:

Barra	Regidez K	$\alpha$	$\beta$	$K \cos^2 \alpha$	$K \cos \alpha \cos \beta$	$K \cos^2 \beta$
OA	2K	120°	150°	$\frac{1}{2} K$	$\frac{3}{2} K$	$\frac{3}{2} K$
OB	K	30°	120°	$\frac{3}{4} K$	$\frac{3}{4} K$	$\frac{1}{4} K$
OC	K	135°	135°	$\frac{1}{2} K$	$\frac{1}{2} K$	$\frac{1}{2} K$
OD	3K	45°	135°	$\frac{3}{2} K$	$\frac{3}{2} K$	$\frac{3}{2} K$

Las 8 ecuaciones para los nudos A, B, C, D, son:

$$u_A = v_A = u_B = v_B = u_C = v_C = u_D = v_D = 0.$$

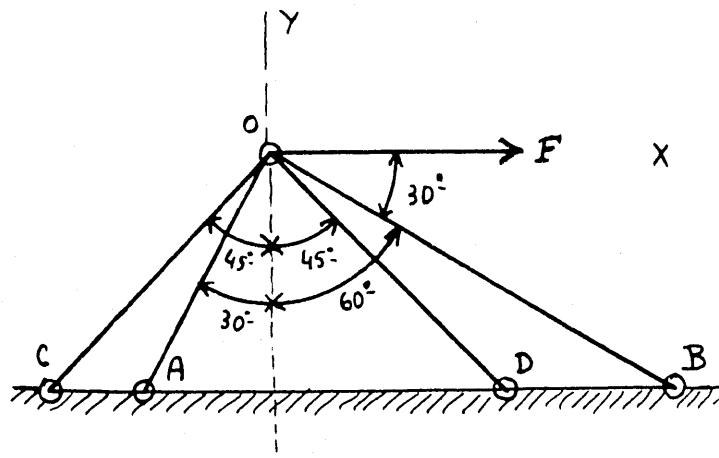


Figura 4.<sup>a</sup>

Y para el nudo  $O$ :

$$\left( \frac{1}{2}K + \frac{3}{2}K + \frac{1}{2}K + \frac{3}{2}K \right) u_0 + \left( \frac{\sqrt{3}}{2}K + \frac{\sqrt{3}}{4}K + \frac{1}{2}K - \frac{3}{2}K \right) v_0 = F$$

$$\left( \frac{\sqrt{3}}{2}K - \frac{\sqrt{3}}{4}K + \frac{1}{2}K - \frac{3}{2}K \right) u_0 + \left( \frac{3}{2}K + \frac{1}{4}K + \frac{1}{2}K - \frac{3}{2}K \right) v_0 = 0$$

Simplificando resulta:

$$26u_0 - (4 - \sqrt{3})v_0 = \frac{4F}{K}$$

$$(4 - \sqrt{3})u_0 - 15v_0 = 0$$

de donde se obtiene:

$$u_0 = \frac{15}{371 + 8\sqrt{3}} \cdot \frac{F}{K}$$

$$v_0 = \frac{1}{371 + 8\sqrt{3}} \cdot \frac{F}{K}$$

Valores muy inferiores a los del ejemplo anterior. Las barras añadidas  $OC$  y  $OD$  casi han inmovilizado el nudo  $O$ .

Esfuerzo de la barra  $OB$ :

$$K[(O - u_0) \cos 30^\circ + (O - v_0) \cos 120^\circ] = \frac{-15\sqrt{3} + 1}{742 + 16\sqrt{3}} F \text{ (Compresión)}$$

Esto nos prueba que esta barra se ha descargado.

*Ejemplo 3.º:*

Determinar los desplazamientos de todos los nudos y las tensiones de las 7 barras de la estructura triangulada isostática indicada en la figura 5.<sup>a</sup>. Se supondrán todas las barras exactamente iguales y de rigidez  $K = \frac{S \cdot E}{L}$ .

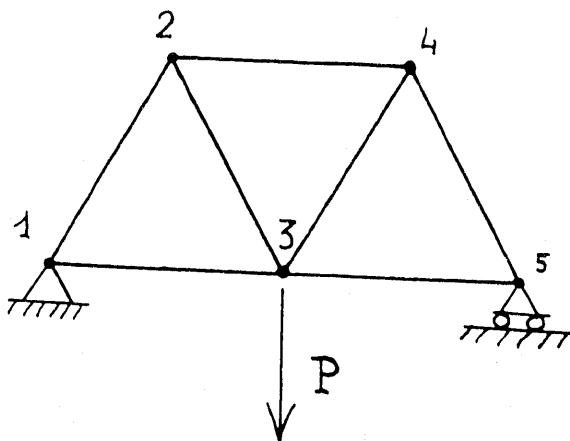


Figura 5.<sup>a</sup>

SOLUCIÓN:

Los valores  $K_{\alpha\alpha}$ ,  $K_{\alpha\beta}$  y  $K_{\beta\beta}$  se obtienen en el cuadro siguiente:

BARRA	$\alpha$	$\beta$	$K_{\alpha\alpha}$	$K_{\alpha\beta}$	$K_{\beta\beta}$
1-2	$60^\circ$	$30^\circ$	$\frac{K}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} K$	$\frac{3}{4} K$
2-4	$0^\circ$	$90^\circ$	$K$	0	0
4-5	$60^\circ$	$150^\circ$	$\frac{K}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} K$	$\frac{3}{4} K$
1-3	$0^\circ$	$90^\circ$	$K$	0	0
3-5	$0^\circ$	$90^\circ$	$K$	0	0
2-3	$60^\circ$	$150^\circ$	$\frac{K}{4}$	$-\frac{\sqrt{3}}{4} K$	$\frac{3}{4} K$
3-4	$60^\circ$	$30^\circ$	$\frac{K}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} K$	$\frac{3}{4} K$

Con ellos formamos los 3 esquemas indicados en la figura 6.<sup>a</sup> (hemos suprimido el factor  $K$ ).

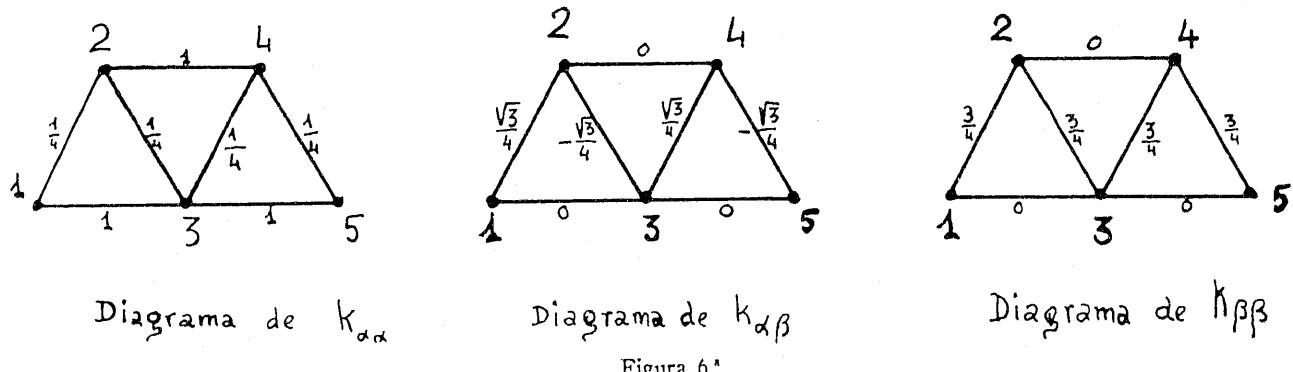


Figura 6.<sup>a</sup>

De las 10 ecuaciones que debieran resultar al establecer el equilibrio de los 5 nudos, 6 son muy sencillas y se pueden escribir inmediatamente:

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \end{cases} \text{ expresan la inmovilidad del nudo 1;}$$

$v_5 = 0$  expresa el movimiento exclusivamente en horizontal del nudo de apoyo 5;

$v_2 = v_4$  por razón de simetría;

$u_2 + u_4 = 2u_3$  por la misma razón;

$u_5 = 2u_3$  por la misma razón.

Las 4 ecuaciones restantes corresponden a los nudos 1 y 2 (con ellas completamos las 10).

$$\begin{array}{l} \text{Nudo 1} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{K}{4}u_2 - Ku_3 - \frac{\sqrt{3}}{4}Kv_2 = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}Ku_2 - \frac{3K}{4}v_2 = \frac{P}{2}; \end{array} \right. \\ \text{Nudo 2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{2}u_2 - u_4 - \frac{1}{4}u_3 + \frac{\sqrt{3}}{4}v_3 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{4}u_3 + \frac{3}{2}v_2 - \frac{3}{4}v_3 = 0. \end{array} \right. \end{array}$$

Sustituyendo  $u_4$  por su valor dado antes en función de  $u_2$  y  $u_3$ , se obtiene un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas cuya solución es:

$$u_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{K}, \quad u_3 = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{P}{K}; \quad v_2 = -\frac{P}{K}, \quad v_3 = -\frac{11}{6} \cdot \frac{P}{K}.$$

Por tanto, los desplazamientos de los nudos son (ver fig. 7.º):

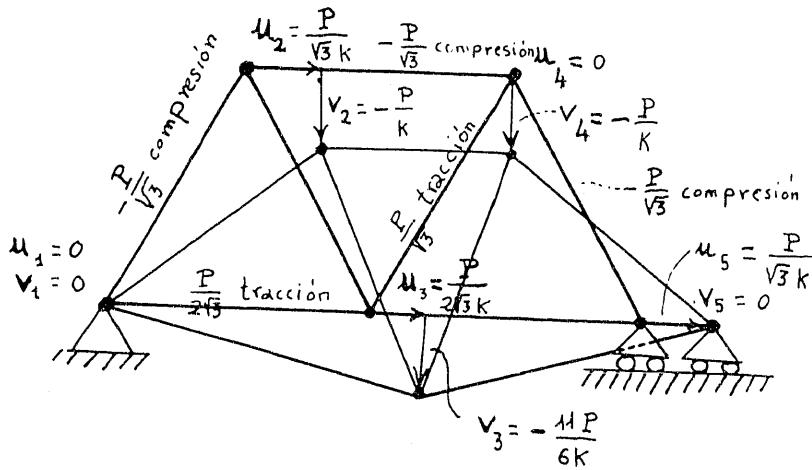


Figura 7.º

Nudos	$u$	$v$
1	0	0
2	$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{K}$	$-\frac{P}{K}$
3	$\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{P}{K}$	$-\frac{11}{6} \cdot \frac{P}{K}$
4	0	$-\frac{P}{K}$
5	$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{K}$	0

Los esfuerzos en cada barra son:

Barra	E S F U E R Z O
1 - 2	$K \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{K} - 0 \right) \cos 60^\circ + \left( -\frac{P}{K} - 0 \right) \cos 30^\circ \right] = -\frac{P\sqrt{3}}{3}$ compresión
2 - 4	$K \left[ \left( 0 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{K} \right) \cos 0^\circ + \left( -\frac{P}{K} + \frac{P}{K} \right) \cos 90^\circ \right] = -\frac{P\sqrt{3}}{3}$ compresión
4 - 5	$K \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{K} - 0 \right) \cos 60^\circ + \left( 0 + \frac{P}{K} \right) \cos 150^\circ \right] = -\frac{P\sqrt{3}}{3}$ compresión
1 - 3	$K \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{P}{K} - 0 \right) \cos 0^\circ + \left( -\frac{11}{6} \cdot \frac{P}{K} - 0 \right) \cos 90^\circ \right] = +\frac{P\sqrt{3}}{6}$ tracción
3 - 5	$K \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{P}{K} - \frac{3}{6} \cdot \frac{P}{K} \right) \cos 0^\circ + \left( P + \frac{11}{6} \cdot \frac{P}{K} \right) \cos 90^\circ \right] = +\frac{P\sqrt{3}}{6}$ tracción
2 - 3	$K \left[ \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{P}{K} - \frac{3}{3} \cdot \frac{P}{K} \right) \cos 60^\circ + \left( -\frac{11}{6} \cdot \frac{P}{K} + \frac{P}{K} \right) \cos 150^\circ \right] = +\frac{P\sqrt{3}}{3}$ tracción
3 - 4	$K \left[ \left( 0 - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{P}{K} \right) \cos 60^\circ - \left( \frac{P}{K} + \frac{11}{6} \cdot \frac{P}{K} \right) \cos 30^\circ \right] = +\frac{P\sqrt{3}}{3}$ tracción

Por ser el sistema estrictamente indeformable, o sea, sin barras en exceso, los esfuerzos de cada barra son independientes de las rigideces de las mismas.

Ejemplo 4.<sup>a</sup>:

Desplazamiento del nudo 2 y esfuerzo en la barra 1-2 de la estructura de la figura 8.<sup>a</sup>. Tiene dos barras en exceso que resultan de unir, además, los nudos 1 y 4 y los 2 y 5 de la estructura del ejemplo anterior por barras de la misma sección transversal (por tanto, de rigideces  $\frac{K}{\sqrt{3}}$ ).

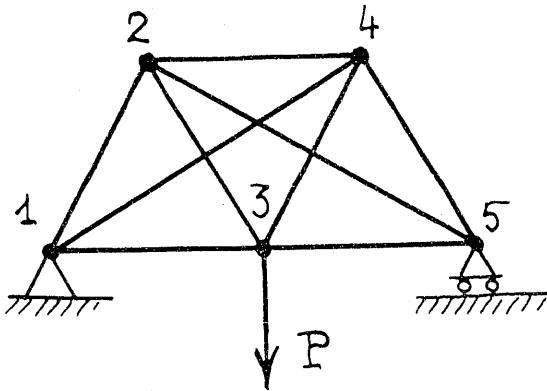


Figura 8.<sup>a</sup>

SOLUCIÓN:

El cuadro del ejemplo anterior se completa con las barras añadidas 1-4 y 2-5:

Barra	$\alpha$	$\beta$	$K_{\alpha\alpha}$	$K_{\alpha\beta}$	$K_{\beta\beta}$
1 - 4	$30^\circ$	$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{4} K$	$K$	$\frac{\sqrt{3}}{12} K$
2 - 5	$30^\circ$	$120^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{4} K$	$K$	$\frac{\sqrt{3}}{12} K$

A base del mismo, en la figura 9.<sup>a</sup> establecemos los esquemas de las  $K_{\alpha\alpha}$ ,  $K_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\beta\beta}$ .

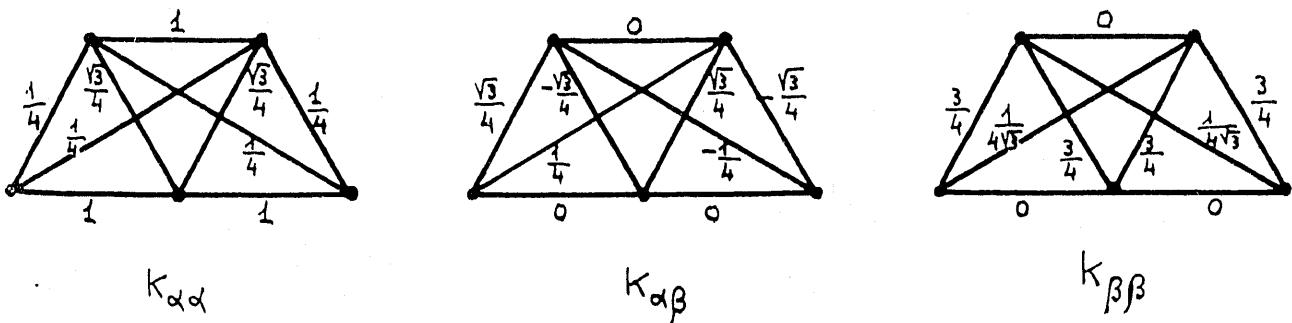


Figura 9.<sup>a</sup>

Lo mismo que en el ejemplo anterior tenemos las 6 ecuaciones:

$$u_1 = v_1 = v_5 = 0, \quad v_2 = v_4, \quad u_2 + u_4 = u_5 = 2u_3.$$

Las 4 que faltan resultan de establecer el equilibrio de dos nudos, por ejemplo, el 1 y el 2:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Nudo 1} \\ \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4}u_2 - \frac{\sqrt{3}}{4}u_4 - u_3 - \frac{\sqrt{3}}{4}v_2 - \frac{1}{4}v_4 = 0; \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}u_2 - \frac{1}{4}u_4 - \frac{3}{4}v_2 - \frac{\sqrt{3}}{12}v_4 = \frac{P}{2K}; \\ \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right)u_2 - u_4 - \frac{\sqrt{3}}{4}u_3 - \frac{1}{4}u_5 + \left( 0 - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \\ + v_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}v_3 = 0; \\ \left( 0 - \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)u_2 + \frac{1}{4}u_5 + \frac{\sqrt{3}}{4}u_3 + \left( 0 + \frac{\sqrt{3}}{12} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \right) - v_2 - \frac{3}{4}v_3 = 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{Nudo 2}$$

Simplificando queda el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} (1 - \sqrt{3})u_2 + (2\sqrt{3} + 4)u_3 + (1 + \sqrt{3})v_2 = 0; \\ (\sqrt{3} - 1)u_2 - 2u_3 - \left( 3 + -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)v_2 = \frac{2P}{K}; \\ (10 + \sqrt{3})u_2 - (9 + 2\sqrt{3})u_3 - v_2 + \sqrt{3}v_3 = 0; \\ -u_2 + (2 + 2\sqrt{3})u_3 + \left( 6 + \frac{\sqrt{3}}{3} \right)v_2 - 3v_3 = 0. \end{array} \right\}$$

Del cual se obtienen los desplazamientos del nudo 2 que son:

$$\boxed{v_2} = \frac{288 + 147\sqrt{3}}{432 + 256\sqrt{3}} \frac{P}{K} = \boxed{-0,619 \frac{P}{K}},$$

$$\boxed{u_2} = (\sqrt{3} + 2) \frac{P}{K} + \left( 3 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \right) v_2 = \boxed{+0,457 \frac{P}{K}}.$$

Son inferiores, como era de esperar, a los correspondientes del ejemplo anterior. Es natural que al aumentar barras, la estructura resulta más rígida y los desplazamientos de los nudos más pequeños.

El esfuerzo de la barra 1-2 es:

$$T = K \left[ \left( 0,457 \frac{P}{K} - 0 \right) \cos 60^\circ + \left( -0,619 \frac{P}{K} - 0 \right) \sin 30^\circ \right] = \boxed{-0,309 P},$$

que es una *compresión* casi mitad de la obtenida en el ejemplo anterior. Las barras en exceso la han descargado.

*Ejemplo 5.<sup>o</sup>:*

Estructura espacial (fig. 10) formada por el soporte de 4 barras 0-1, 0-2, 0-3 y 0-4, unidas por una articulación en  $O$ .

Los puntos o nudos de sustentación 1, 2, 3 y 4 están fijos en un plano horizontal.

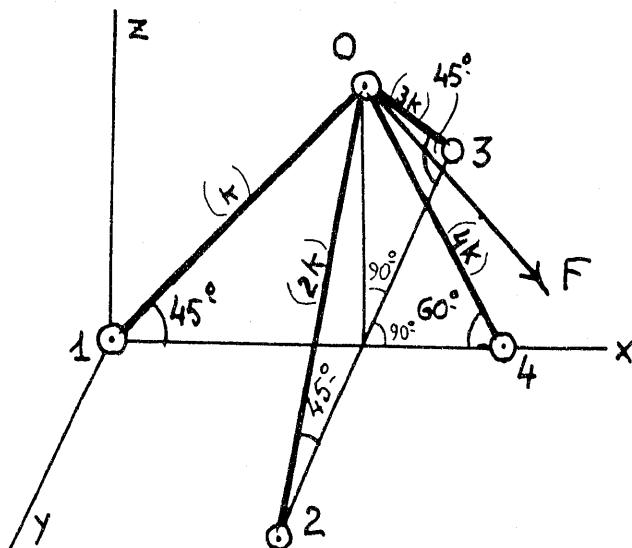


Figura 10.

Determinar el desplazamiento del nudo  $O$  y los esfuerzos de las barras cuando en él se aplican  $F$  toneladas en sentido horizontal paralelamente a la bisectriz de los ejes  $OX$  y  $OY$  del triedro de referencia.

Las rigideces de las 4 barras se suponen ser proporcionales a los números 1, 2, 3 y 4, siendo  $K$  la de la menor.

**SOLUCIÓN:**

Tomando como ejes coordenados los de las direcciones indicadas en la figura tenemos:

Barra	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$K_{\alpha\alpha}$	$K_{\beta\beta}$	$K_{\gamma\gamma}$	$K_{\alpha\beta}$	$K_{\alpha\gamma}$	$K_{\beta\gamma}$
0 - 1	$135^\circ$	$90^\circ$	$135^\circ$	$\frac{K}{2}$	0	$\frac{K}{2}$	0	$\frac{K}{2}$	0
0 - 2	$90^\circ$	$45^\circ$	$135^\circ$	0	$K$	$K$	0	0	$-K$
0 - 3	$90^\circ$	$135^\circ$	$135^\circ$	0	$\frac{3K}{2}$	$\frac{3K}{2}$	0	0	$\frac{3K}{2}$
0 - 4	$60^\circ$	$90^\circ$	$150^\circ$	$K$	0	$3K$	0	$-\sqrt{3}K$	0

Como la fuerza  $F$  tiene de componentes  $F_x = F_y = \frac{F}{\sqrt{2}}$ ,  $F_z = 0$ , las 3 ecuaciones correspondientes al nudo  $O$  serán:

$$\left(\frac{K}{2} + K\right)u_0 + \left(\frac{K}{2} - \sqrt{3}K\right)w_0 = F : \sqrt{2};$$

$$\left(K + \frac{3K}{2}\right)v_0 + \left(-K + \frac{3K}{2}\right)w_0 = F : \sqrt{2};$$

$$\left(\frac{K}{2} - \sqrt{3}K\right)u_0 + \left(-K + \frac{3K}{2}\right)v_0 + \left(\frac{K}{2} + K + \frac{3K}{2} + 3K\right)w_0 = 0.$$

Simplificando resulta:

$$3u_0 + (1 - 2\sqrt{3})w_0 = \sqrt{2}F : K;$$

$$5v_0 + w_0 = \sqrt{2}F : K;$$

$$(1 - 2\sqrt{3})u_0 + v_0 + 12w_0 = 0.$$

SOLUCIÓN:

$$u_0 = 0,450 \cdot \frac{F}{K}$$

$$v_0 = 0,288 \cdot \frac{F}{K}$$

$$w_0 = -0,0257 \cdot \frac{F}{K}$$

Los esfuerzos de las barras son:

$$T_{0-1} = 1 [(0 - 0,450) \cos 135^\circ + (0 - 0,288) \cos 90^\circ + (0 - 0,0257) \cos 135^\circ] = 0,337 F \text{ (tracción)}$$

$$T_{0-2} = 2 [(0 - 0,450) \cos 90^\circ + (0 - 0,288) \cos 45^\circ + (0 - 0,0257) \cos 135^\circ] = -0,370 F \text{ (compresión)}$$

$$T_{0-3} = 3 [(0 - 0,450) \cos 90^\circ + (0 - 0,288) \cos 135^\circ + (0 - 0,0257) \cos 135^\circ] = +0,666 F \text{ (tracción)}$$

$$T_{0-4} = 4 [(0 - 0,450) \cos 60^\circ + (0 - 0,288) \cos 90^\circ + (0 - 0,0257) \cos 150^\circ] = -0,811 F \text{ (compresión)}$$

Ejemplo 6.º:

Estructura formada por 9 barras.

Se apoya en 4 nudos firmes (fig. 11) sobre el terreno, que son los números 1, 2, 3 y 4.

La barra horizontal 5-6 tiene de rigidez  $3K$ , o sea, triple de las diagonales 1-6, 2-5, 4-6 y 3-5.

Los montantes 1-5, 4-5, 2-6 y 3-6 tienen de rigidez  $2K$ .

Determinar los recorridos  $(u_5 v_5 w_5)$  y  $(u_6 v_6 w_6)$  de los nudos 5 y 6, respectivamente, cuando la estructura está sometida a una fuerza  $F$  horizontal, paralela a la bisectriz de los ejes coordenados  $O X$ ,  $O Y$ , y aplicada en el nudo número 6.

SOLUCIÓN:

De acuerdo con el esquema y la orientación de ejes elegida tenemos que  $F_x = F_y = F \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_z = 0$ . Además, podemos establecer el cuadro siguiente:

Barra	$K$	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \gamma$	$K_{\alpha \alpha}$	$K_{\beta \beta}$	$K_{\gamma \gamma}$	$K_{\alpha \beta}$	$K_{\alpha \gamma}$	$K_{\beta \gamma}$
1 - 5	2	0	0,6	0,8	0	0,72	1,28	0	0	0,96
2 - 6	2	0	0,6	0,8	0	0,72	1,28	0	0	0,96
4 - 5	2	0	-0,6	0,8	0	0,72	1,28	0	0	-0,96
3 - 6	2	0	-0,6	0,8	0	0,72	1,28	0	0	-0,96
1 - 6	1	0,6	0,48	0,64	0,36	0,2304	0,4096	0,288	0,384	0,216
2 - 5	1	-0,6	0,48	0,64	0,36	0,2304	0,4096	-0,288	-0,384	-0,216
4 - 6	1	0,6	-0,48	0,64	0,36	0,2304	0,4096	-0,288	0,384	0,216
3 - 5	1	-0,6	-0,48	0,64	0,36	0,2304	0,4096	0,288	-0,384	-0,216
5 - 6	3	1	0	0	3	0	0	0	0	0

A la vista del mismo escribimos inmediatamente las ecuaciones de los nudos 5 y 6.

NUDO 5.

$$(0 + 0 + 0,36 + 0,36 + 3) u_5 - 0 \cdot u_1 - 0 \cdot u_4 - 0,36 u_2 - 0,36 u_3 - 3 u_6 + (0 + 0 - 0,288 + 0,288 + 0) v_5 - 0 \cdot v_1 - 0 \cdot v_4 + 0,288 + 0,288 v_3 - 0 \cdot v_6 + (0 + 0 - 0,384 - 0,384 + 0) w_5 - 0 \cdot w_1 - 0 \cdot w_4 + 0,384 w_2 + 0,384 w_3 - 0 \cdot w_6 = 0. \quad [1]$$

$$0 \cdot u_5 - 0 \cdot u_1 - 0 \cdot u_4 + 0,288 u_2 - 0,288 u_3 - 0 \cdot u_6 + (0,72 + 0,72 + 0,2304 + 0,2304 + 0) v_5 - 0,72 v_1 - 0,72 v_4 - 0,2304 v_2 - 0,2304 v_3 - 0 \cdot v_6 + (0,96 - 0,96 - 0,216 - 0,216 + 0) w_5 - 0,96 w_1 + 0,96 w_4 + 0,216 w_2 + 0,216 w_3 - 0 \cdot w_6 = 0. \quad [2]$$

$$-0,768 u_5 - 0 \cdot u_1 - 0 \cdot u_4 + 0,384 u_2 + 0,384 u_3 - 0 \cdot u_6 - 0,432 v_5 - 0,96 v_1 + 0,96 v_4 + 0,216 v_2 + 0,216 v_3 + (1,28 + 1,28 + 0,4096 - 0,4096 + 0) w_5 - 1,28 w_1 - 1,28 w_4 - 0,4096 w_2 - 0,4096 w_3 - 0 \cdot w_6 = 0. \quad [3]$$

NUDO 6.

$$(0 + 0 + 0,36 + 0,36 + 3) u_6 - 0 \cdot u_2 - 0 \cdot u_3 - 0,36 u_1 - 0,36 u_4 - 3 u_5 + (0 + 0 + 0,288 - 0,288 + 0) v_6 - 0 \cdot v_2 - 0 \cdot v_3 - 0,288 v_1 + 0,288 v_4 - 0 \cdot v_5 + (0 + 0 + 0,384 - 0,384 + 0) w_6 - 0 \cdot w_2 - 0 \cdot w_3 - 0,384 w_1 - 0,384 w_4 - 0 \cdot w_5 = \frac{F}{2}. \quad [4]$$

$$0 \cdot u_6 - 0 \cdot u_2 - 0 \cdot u_3 - 0,288 u_1 + 0,288 u_4 - 0 \cdot u_5 + (0,72 + 0,72 + 0,2304 + 0,2304 + 0) v_6 - 0,72 v_2 - 0,72 v_3 - 0,2304 v_1 - 0,2304 v_4 - 0 \cdot v_5 + (0,96 - 0,96 + 0,216 + 0,216 + 0) w_6 - 0,96 w_2 + 0,96 w_3 - 0,216 w_1 - 0,216 w_4 - 0 \cdot w_5 = \frac{F}{2}. \quad [5]$$

$$0,768 u_6 - 0 \cdot u_2 - 0 \cdot u_3 - 0,384 u_1 - 0,384 u_4 - 0 \cdot u_5 + 0,432 v_6 - 0,96 v_2 + 0,96 v_3 - 0,216 v_1 - 0,216 v_4 - 0 \cdot v_5 + (1,28 + 1,28 + 0,4096 + 0,4096 + 0) w_6 - 1,28 w_2 - 1,28 w_3 - 0,4096 w_1 - 0,4096 w_4 - 0 \cdot w_5 = 0. \quad [6]$$

A causa de la inmovilidad de los nudos 1, 2, 3 y 4 estas 6 ecuaciones se simplifican, ya que  $u_i = v_i = w_i = 0$  para  $i = 1, 2, 3$  y 4, resultando:

$$3,72 u_5 - 3 u_6 - 0,768 w_5 = 0,$$

$$1,9008 v_5 - 0,432 w_5 = 0,$$

$$-0,768 u_5 - 0,432 v_5 + 3,3792 w_5 = 0,$$

$$3,72 u_6 - 3 u_5 + 0,768 w_6 = \frac{F}{2 K},$$

$$1,9008 v_6 - 0,432 w_6 = \frac{F}{2 K},$$

$$0,768 u_6 + 0,432 v_6 + 3,3792 w_6 = 0.$$

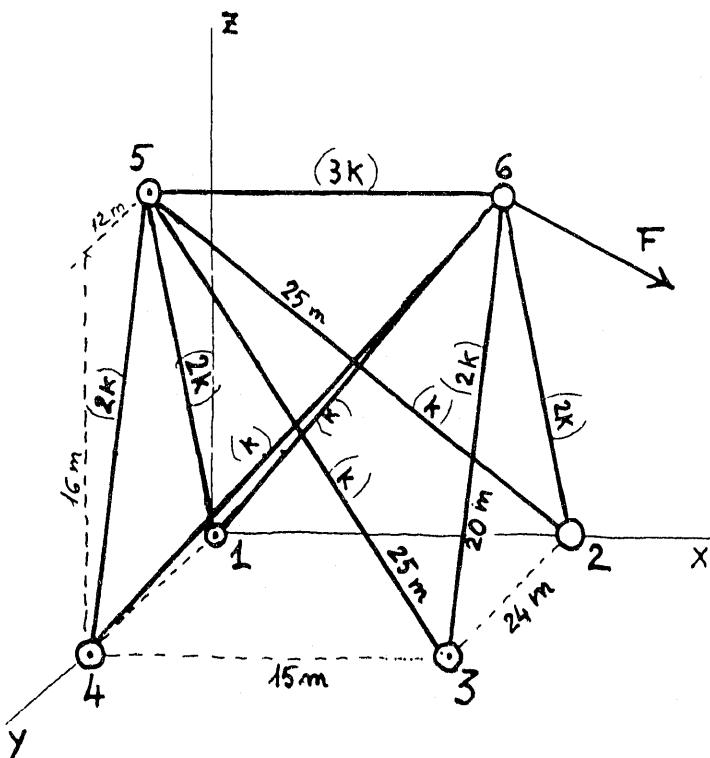


Figura 11.

Para resolver este sistema despejemos  $u_5$ ,  $v_5$ ,  $w_5$  de las tres primeras ecuaciones en función de  $u_6$ . Así queda:

$$u_5 = 0,845 u_6; \quad v_5 = 0,045 u_6; \quad w_5 = 0,198 u_6.$$

Colocando este valor de  $u_5$  en [4']; cambiando la ecuación [4'] por su diferencia con [5'], tenemos las 3 ecuaciones [4'], [5'] y [6'] sustituidas por el mismo sistema:

$$1,185 u_6 - 1,9008 v_6 + 0,336 w_6 = 0$$

$$1,900 v_6 + 0,432 w_6 = \frac{F}{\sqrt{2} K}$$

$$0,768 u_6 + 0,432 v_6 + 3,3792 w_6 = 0$$

que resuelto nos da para el *nudo* 6 los desplazamientos:

$$u_6 = 0,440 \cdot \frac{F}{K}$$

$$v_6 = 0,403 \cdot \frac{F}{K}$$

$$w_6 = -0,133 \cdot \frac{F}{K}$$

y teniendo en cuenta [7'] para el *nudo* 5:

$$u_5 = 0,372 \cdot \frac{F}{K}$$

$$v_5 = 0,0198 \cdot \frac{F}{K}$$

$$w_5 = 0,08772 \cdot \frac{F}{K}$$

Con ellos, la *tensión de cada barra* se obtiene inmediatamente:

$$\underline{T_{1-5}} = 2(0,372 \cdot 0 + 0,0198 \cdot 0,6 + 0,0872 \cdot 0,8) F = \boxed{0,082 F \text{ (tracción)}}$$

$$\underline{T_{2-6}} = 2(0,440 \cdot 0 + 0,403 \cdot 0,6 - 0,133 \cdot 0,8) F = \boxed{0,127 F \text{ (tracción)}}$$

$$\underline{T_{4-5}} = 2(0,372 \cdot 0 - 0,0198 \cdot 0,6 + 0,0872 \cdot 0,8) F = \boxed{0,058 F \text{ (tracción)}}$$

$$\underline{T_{3-6}} = 2(0,440 \cdot 0 - 0,403 \cdot 0,6 - 0,133 \cdot 0,8) F = \boxed{-0,800 F \text{ (compresión)}}$$

$$\underline{T_{1-6}} = (0,440 \cdot 0,6 + 0,403 \cdot 0,48 - 0,133 \cdot 0,64) F = \boxed{0,375 F \text{ (tracción)}}$$

$$\underline{T_{2-5}} = (-0,6 \cdot 0,372 + 0,0198 \cdot 0,48 + 0,0872 \cdot 0,64) F = \boxed{-0,158 F \text{ (compresión)}}$$

$$\underline{T_{4-6}} = (0,6 \cdot 0,440 - 0,48 \cdot 0,403 - 0,64 \cdot 0,133) F = \boxed{-0,0141 F \text{ (compresión)}}$$

$$\underline{T_{3-5}} = (-0,6 \cdot 0,372 - 0,48 \cdot 0,0198 + 0,64 \cdot 0,0872) F = \boxed{-0,078 F \text{ (compresión)}}$$

$$\underline{T_{5-6}} = 3(0,44 - 0,372) \cdot 1 F = \boxed{0,203 F \text{ (tracción)}}$$

## IX. Conclusiones.

No es suficiente añadir más ejemplos para dejar patente la eficacia del método, dados los elementos que en la actualidad se disponen para resolver sistemas lineales 40, 80, 100 e, incluso, muchas más ecuaciones. Esta es cuestión que no ofrece dificultad. El planteamiento de las ecuaciones resulta, como venimos diciendo, sencillo, pues los coeficientes se escriben inmediatamente.

La posición de los nudos puede referirse a un sistema de ejes coordenados cartesianos rectangulares, con lo cual se deducen las longitudes de las barras y los cosenos de los ángulos que éstas forman con dichos ejes. Con eso y con las rigideces de las barras, se establece un cuadro con el que se obtienen los coeficientes.

Pueden abordarse con la misma sencillez estructuras reticulares planas que estructuras estereas.

El hacer diversas hipótesis de carga en los nudos, o de variaciones de temperatura en las barras, ya explicamos que no exige más que cambiar los términos independientes de las ecuaciones lineales que dan los desplazamientos.

Pensamos en el extraordinario interés que tiene el que en la utilización de este método el número de incógnitas (componentes de los desplazamientos de los nudos) no aumente por el número de barras. Es sólo función del número de nudos, pero no de que estén éstos entre sí unidos por más o por menos barras. No entraña más complicación el que se interconecten más entre sí los diversos nudos. Es quizá lo más importante de su aplicación.

El método expuesto permite no tener que aplicar aproximaciones o simplificaciones (no siempre legítimas) para el proyecto de estructuras complicadas o para el refuerzo o pretensado de una ya construida. Para el estudio del pandeo y de las vibraciones también tiene suma utilidad. Son temas que dejamos para otra ocasión. Pensamos que generalizados estos métodos (utilizando programas a realizar las calculadoras eléctricas, etc.), pudieran servir de alguna ayuda a la investigación de cuestiones relativas a la constitución y la estabilidad de la materia mineral e incluso orgánica.

---