

INFLUENCIA DE LAS PRESIONES INTERSTICIALES EN UN MEDIO POROSO, SOBRE SU ESTADO TENSIONAL. APLICACION A PRESAS DE GRAVEDAD Y PRESAS BOVEDA

Por ALEJANDRO DEL CAMPO AGUILERA
y JOSE PIQUER CHANZA
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Continúa el importante trabajo de los autores sobre el tema epigrafiado, que si vino publicando en los meses de septiembre y noviembre del pasado año, y que terminará en el próximo número con los Ejemplos de Aplicación y Conclusiones.

Sección horizontal de bloque de ancho y longitud infinita.

Este caso, tiene aplicación práctica en las proximidades de la impermeabilización de una junta según el eje x , de un bloque sometido a una presión p_e en la cara y (figura 17).

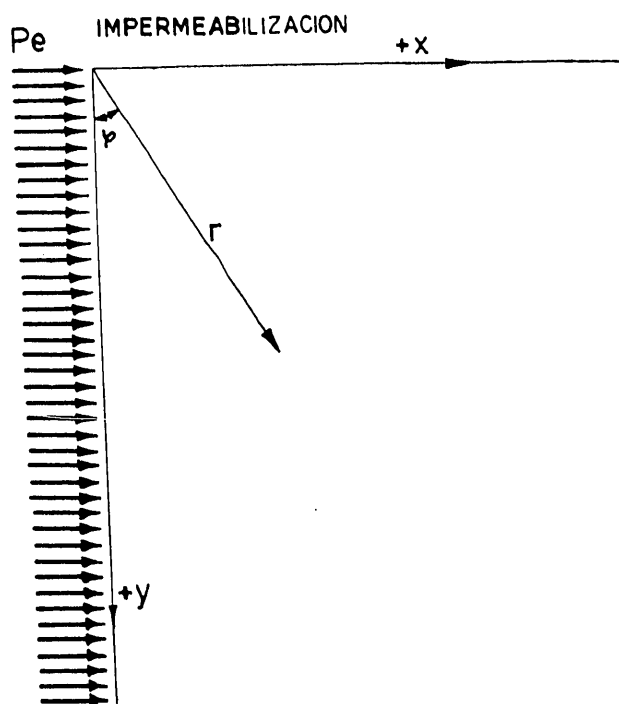


Figura 17.

Operaremos en coordenadas polares, deduciendo inmediatamente.

$$V_r = 0;$$

$$V_\varphi = K \frac{p_e}{r \frac{\pi}{2}}; \quad p = \left(1 - \frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}} \right) p_e.$$

Las condiciones de equilibrio entre tensiones, exigen:

$$\frac{\partial(\sigma_r + p)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_\varphi + p)}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} = 0.$$

Por razones de homotecia respecto al vértice, las tensiones deben ser independientes del radio, quedando:

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + (\sigma_r - \sigma_\varphi) = 0;$$

$$\frac{\partial(\sigma_\varphi + p)}{\partial \varphi} + 2 \tau_{r\varphi} = 0.$$

La condición de compatibilidad de deformaciones en coordenadas polares, exige:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \varphi^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_\varphi}{\partial \varphi^2} \right) +$$

$$+ (1 + \mu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) \right] + 2(1 + \mu) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (r \tau_{r\varphi}) = 0.$$

Como las tensiones son independientes del radio, quedará:

$$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi) = 2(1 + \mu) \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}.$$

Sustituyendo los valores de $\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}$ en las dos ecuaciones de equilibrio:

$$2(1 + \mu) \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi) = -2(1 + \mu) (\sigma_r - \sigma_\varphi);$$

$$2 \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} = - \frac{\partial^2 \sigma_\varphi}{\partial \varphi^2} = -2(\sigma_r - \sigma_\varphi),$$

y:

$$2(1 + \mu) \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi) = - \frac{\partial^2 \sigma_\varphi}{\partial \varphi^2} (1 + \mu).$$

De donde:

$$\sigma_r + \sigma_\varphi = A + B\varphi.$$

Derivando la 2.ª ecuación de equilibrio y sustituyendo en ella, queda:

$$\frac{\partial^2 \sigma_\varphi}{\partial \varphi^2} + 4 \sigma_\varphi - 2A - 2B\varphi = 0;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B\varphi + C \sin 2\varphi + D \cos 2\varphi;$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B\varphi - C \sin 2\varphi - D \cos 2\varphi;$$

$$r_\varphi = - \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{p_c}{\pi} = - \frac{1}{4} B + \frac{p_c}{\pi} - C \cos 2\varphi + D \sin 2\varphi.$$

Para $\varphi = 0$ y $\varphi = \frac{\pi}{2}$ deben ser: $\sigma_{\varphi} = 0$; $\tau_{r\varphi} = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} A & + D = 0; \\ \frac{1}{2} A + \frac{\pi}{4} B & - D = 0; \\ -\frac{1}{4} B - C & = -\frac{p_e}{\pi}; \\ -\frac{1}{4} B + C & = -\frac{p_e}{\pi}.\end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned}A & = -p_e; \\ B & = 4 \frac{p_e}{\pi}; \\ C & = 0; \\ D & = \frac{1}{2} p_e.\end{aligned}$$

Quedando:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varphi} & = -p_e \left(\sin^2 \varphi - \frac{2}{\pi} \varphi \right); \\ \sigma_r & = -p_e \left(\cos^2 \varphi - \frac{2}{\pi} \varphi \right); \\ \tau_{r\varphi} & = p_e \sin \varphi \cos \varphi.\end{aligned}$$

En el caso de ser impermeable el paramento, la presión es constante y las ecuaciones de las tensiones serán:

$$\begin{aligned}\sigma'_{\varphi} & = \frac{1}{2} A' + \frac{1}{2} B' \varphi + C' \sin 2 \varphi + D' \cos 2 \varphi; \\ \sigma'_r & = \frac{1}{2} A' + \frac{1}{2} B' \varphi - C' \sin 2 \varphi - D' \cos 2 \varphi; \\ \tau'_{r\varphi} & = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{\varphi}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{4} B' - C' \cos 2 \varphi + D' \sin 2 \varphi.\end{aligned}$$

Para:

$$\varphi = 0; \quad \sigma'_{\varphi} = p_e; \quad \tau'_{r\varphi} = 0.$$

Y para: $\varphi = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\sigma'_{\varphi} = \tau'_{r\varphi} & = 0; \\ \frac{1}{2} A' & + D' = p_e; \\ \frac{1}{2} A' + \frac{\pi}{4} B' - D' & = 0; \\ -\frac{1}{4} B' - C' & = 0; \\ -\frac{1}{4} B' + C' & = 0.\end{aligned}$$

De donde:

$$B' = C' = 0; \quad A' = p_e; \quad D' = \frac{1}{2} p_e;$$

$$\sigma'_\varphi = \frac{p_e}{2} (1 + \cos 2\varphi) = p_e \cos^2 \varphi;$$

$$\sigma'_r = \frac{p_e}{2} (1 - \cos 2\varphi) = p_e \sin^2 \varphi,$$

$$\tau'_{r\varphi} = \frac{p_e}{2} \sin 2\varphi = p_e \sin \varphi \cos \varphi.$$

Puede comprobarse, que en este caso:

$$\sigma'_r - p = p_e \cos^2 \varphi - p_e \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right) = -p_e \left(\sin^2 \varphi - \frac{2\varphi}{\pi}\right) = \sigma_r;$$

$$\sigma'_\varphi - p = p_e \sin^2 \varphi - p_e \left(1 - \frac{2\varphi}{\pi}\right) = -p_e \left(\cos^2 \varphi - \frac{2\varphi}{\pi}\right) = \sigma_\varphi,$$

$$\tau'_{r\varphi} = p_e \sin \varphi \cos \varphi = \tau_{r\varphi}.$$

Lo que nos permite generalizar lo siguiente: En secciones horizontales de presas sin drenajes, al estado de tensiones producido por las fuerzas exteriores, se superpondrán unas tracciones en cada punto, iguales a las presiones intersticiales.

Si existen drenes, ya no será aplicable esta superposición, produciéndose una reducción, difícil de calcular, en las tracciones producidas por las presiones intersticiales, de donde se deduce la ventaja de colocar un orificio de drenaje en la zona central de las cabezas de los contrafuertes o varios drenes en cada bloque de las presas de gravedad.

Estado de tensiones en un anillo circular filtrante con presión exterior.

Se estudiará el problema en coordenadas polares, facilitándose la solución por existir simetría radial (fig. 18).

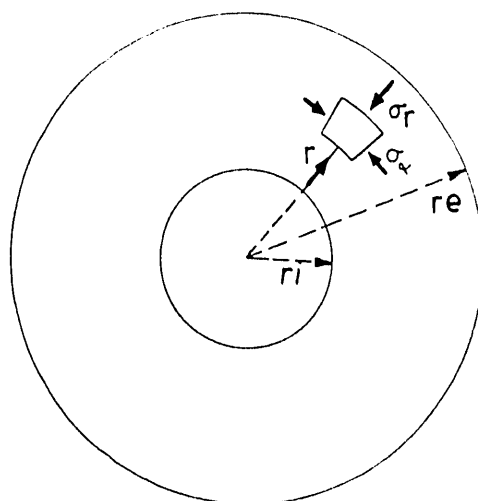


Fig. 18. — Tensiones en un anillo circular filtrante.

Las presiones en el interior del anillo, siguen la ley:

$$p = p_e \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}.$$

Las condiciones de equilibrio entre las tensiones, dan:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{\partial p}{\partial r} = 0.$$

Sólo existirán desplazamientos radiales u , que darán lugar a unas deformaciones unitarias:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\varphi).$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r); \quad \frac{du}{dr} = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r) + \frac{r}{E} \left(\frac{d\sigma_\varphi}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} \right).$$

De donde:

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi) (1 + \mu) = r \left(\frac{d\sigma_\varphi}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r}{dr} \right).$$

Pero:

$$(\sigma_r - \sigma_\varphi) = -r \frac{d\sigma_r}{dr} - r \frac{dp}{dr},$$

y, por consiguiente:

$$\frac{d\sigma_\varphi}{dr} = 2 \frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + r \frac{d^2p}{dr^2} + \frac{dp}{dr}.$$

Resultando una ecuación diferencial en σ_r :

$$\left(\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{dp}{dr} \right) (1 + \mu) = -2 \frac{d\sigma_r}{dr} - r \frac{d^2\sigma_r}{dr^2} - r \frac{d^2p}{dr^2} - \frac{dp}{dr} + \mu \frac{d\sigma_r}{dr};$$

$$\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{d^2p}{dr^2} + \frac{2+\mu}{r} \frac{dp}{dr} = 0.$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$\frac{d}{dr} \left[r^3 \frac{d}{dr} (\sigma_r + p) \right] = r^3 (1 - \mu) \frac{dp}{dr} = \frac{(1 - \mu) p_e}{\ln \frac{r_e}{r_i}} r.$$

Integrando, obtenemos:

$$r^3 \frac{d}{dr} [\sigma_r + p] = \frac{(1-\mu) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} (r^2 - A);$$

$$\sigma_r + p = \frac{(1-\mu) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} \left[\ln \frac{r}{r_i} + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) \right].$$

Puesto que para $r = r_i$; $\sigma_r = p = 0$.

Se determina el valor de la constante A, de modo que para $r = r_e$; $\sigma_r + p = p_e$:

$$p_e = \frac{(1-\mu) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} \left[\ln \frac{r_e}{r_i} + \frac{A}{2} \left(\frac{1}{r_e^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) \right];$$

$$\frac{A}{2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{\ln \frac{r_e}{r_i}}{\frac{1}{r_e^2} - \frac{1}{r_i^2}} = - \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{r_e^2 r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \ln \frac{r_e}{r_i}.$$

De donde:

$$\sigma_r + p = \frac{(1+\mu) p_e}{2 (r_e^2 - r_i^2)} r_e^2 \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{(1-\mu) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i};$$

$$\sigma_r = \frac{(1+\mu) p_e}{2} \left[\frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \right];$$

$$\sigma_\varphi + p = \sigma_r + p + r \frac{d}{dr} (\sigma_r + p) =$$

$$= (1+\mu) \frac{p_e}{2} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) + (1-\mu) \frac{p_e}{2} \left[\frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} + \mu \frac{1}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \right];$$

$$\sigma_\varphi = (1+\mu) \frac{p_e}{2} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{(1-\mu) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} - \frac{(1+\mu) p_e}{2} \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}}.$$

En caso de ser impermeable la superficie del cilindro, se sabe que:

$$\sigma_r = p_e \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right);$$

$$\sigma_\varphi = p_e \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right).$$

Puede observarse, que las expresiones de las tensiones en ambos casos son muy distintas.

Los desplazamientos radiales, serán:

Con paramento impermeable:

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta) = \frac{p_e r}{E} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \frac{r_i^2}{r^2} \right].$$

Para:

$$r = r_e; \quad u = \frac{p_e r_e^3}{E (r_e^2 - r_i^2)} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \left(\frac{r_i}{r_e} \right)^2 \right];$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{p_e r_e^2}{2 E (r_e - r_i)} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \left(\frac{2 r_i}{r_e + r_i} \right) \right];$$

$$r = r_i; \quad u = \frac{2 p_e r_i r_e^2}{E (r_e^2 - r_i^2)}.$$

Con anillo poroso:

$$u = \frac{p_e r}{2 E} \left[\frac{(1 + \mu) r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] - (1 - \mu^2) \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \right].$$

Para:

$$r = r_e; \quad u = \frac{p_e r_e}{2 E} \left[\frac{(1 + \mu) r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \left(\frac{r_i}{r_e} \right)^2 \right] - (1 - \mu^2) + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \right];$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{p_e (r_e + r_i)}{4 E} \left[\frac{(1 + \mu) r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \left(\frac{2 r_i}{r_e + r_i} \right)^2 \right] - (1 - \mu^2) \frac{\ln \frac{r_e + r_i}{2 r_i}}{\ln \frac{r_e}{r_i}} + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \right];$$

$$r = r_i; \quad u = \frac{p_e r_i}{2 E} \left[\frac{2 (1 + \mu) r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{r_e}{r_i}} \right].$$

Si se trata de arcos relativamente delgados, se puede suponer la tensión circun-

ferencial σ_r lineal y llamando e al espesor del arco y $\varepsilon = r_e - r$, desarrollando en serie:

$$\begin{aligned}\frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} &\approx \frac{r_e}{2e} + \frac{1}{4}; \\ 1 + \frac{r_i^2}{r_e^2} &\approx \frac{2\varepsilon}{r_e} - \frac{2e}{r_e} + 2; \\ 1 - \frac{r_i^2}{r_e^2} &\approx \frac{2e}{r_e} - \frac{2\varepsilon}{r_e}; \\ \ln \frac{r_e}{r_i} &\approx \frac{r_e}{e} - \frac{1}{2}; \\ \ln \frac{r}{r_i} &\approx \frac{e}{r_e} - \frac{\varepsilon}{r_e}.\end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores y despreciando $\frac{e}{r_e}$ y sus potencias positivas, queda:

Con paramento impermeable:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= p_e \left(1 - \frac{\varepsilon}{e}\right); \\ \sigma_\varphi &= \frac{p_e r_e}{e} - p_e \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{e}\right).\end{aligned}$$

Para:

$$\begin{aligned}r = r_e; \quad \sigma_\varphi &= \frac{p_e r_e}{e} - \frac{p_e}{2}; \\ r = r_i; \quad \sigma_\varphi &= \frac{p_e r_e}{e} + \frac{p_e}{2}.\end{aligned}$$

Con anillo poroso:

$$\begin{aligned}p &= p_e \left(1 - \frac{\varepsilon}{e}\right); \\ \sigma_r &= 0; \\ \sigma_\varphi &= \frac{p_e r_e}{e} - p_e (1 + \mu) \left(1 - \frac{\varepsilon}{e}\right) + p_e \frac{\mu}{2}.\end{aligned}$$

Para:

$$\begin{aligned}r = r_e; \quad \sigma_\varphi &= \frac{p_e r_e}{e} - \frac{p_e}{2} (2 + \mu); \\ r = r_i; \quad \sigma_\varphi &= \frac{p_e r_e}{e} + \frac{p_e}{2} \mu.\end{aligned}$$

La diferencia: (σ_φ) impermeable $-(\sigma_\varphi)$ poroso $= p_e \left(\frac{1+\mu}{2} - \mu \frac{\varepsilon}{e}\right)$.

Lo que nos demuestra que no es admisible descontar íntegramente las presiones intersticiales en un anillo delgado, pues las tensiones circunferenciales se reducen solamente en la presión, multiplicadas por el factor $\frac{1+\mu}{2}$ en el paramento exterior y por $\frac{1-\mu}{2}$ en el interior, lo que más bien podemos considerar efecto de que las presiones actúan en la circunferencia media y que al anularse sensiblemente las tensiones radiales, se reducen las circunferenciales en su producto por el módulo de Poisson.

Los desplazamientos radiales serán:

Con paramento impermeable:

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_\varphi - \mu \sigma_r) = \frac{p_e r}{E} \left[\frac{r_e}{e} - \frac{1+2\mu}{2} + (1+\mu) \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Para:

$$r = r_e; \quad u = \frac{p_e r_e}{E} \left[\frac{r_e}{e} - \frac{1+2\mu}{2} \right];$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{p_e (r_e + r_i)}{2E} \left[\frac{r_e}{e} - \frac{\mu}{2} \right];$$

$$r = r_i; \quad u = \frac{p_e r_i}{E} \left[\frac{r_e}{e} + \frac{1}{2} \right].$$

Con anillo poroso:

$$u = \frac{r}{E} \sigma_\varphi = \frac{p_e r}{E} \left[\frac{r_e}{e} - (1+\mu) \left(1 - \frac{\varepsilon}{e} \right) + \frac{\mu}{2} \right].$$

Para:

$$r = r_e; \quad u = \frac{p_e r_e}{E} \left[\frac{r_e}{e} - \frac{2+\mu}{2} \right];$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{p_e (r_e + r_i)}{2E} \left[\frac{r_e}{e} - \frac{1}{2} \right];$$

$$r = r_i; \quad u = \frac{p_e r_i}{E} \left[\frac{r_e}{e} + \frac{\mu}{2} \right].$$

La diferencia de desplazamientos es: $\Delta u = \frac{1}{2} (1-\mu) \frac{p_e r}{E}$, o sea, sensiblemente proporcional a la diferencia de tensiones circunferenciales.

Si en lugar de tratarse de un anillo completo, se trata de un arco empotrado en dos planos radiales impermeables, la ley de presiones a lo largo del radio será la misma obtenida anteriormente y las mismas leyes de tensiones si se dejase al arco deslizar a lo largo de los apoyos. Sin embargo, al estar el arco empotrado las tensiones originadas por el acortamiento uniforme del arco, se superpondría con las debidas a la flexión producida, al mantenerse los arranques del arco en una posición fija.

Estudiaremos a continuación el caso de que mediante una pantalla de drenaje las presiones intersticiales se redujesen en una circunferencia de radio r_i (fig. 19). La presión en el contorno exterior, será: $p = p_e$; para $r = r_e$. En el contorno interior, para $r = r_i$, se anulará la presión y en la circunferencia de radio $r = r_d$, correspondiente a la capa de drenaje o al límite de la zona impermeabilizada, suponemos $p = p_d = \alpha p_e$. En el anillo exterior, deberá verificarse:

$$v_e r_e = v_i r = \frac{r}{\gamma} K \frac{dp_i}{dr}; \quad p_i = \frac{\gamma v_e r_e}{K} \ln r + A.$$

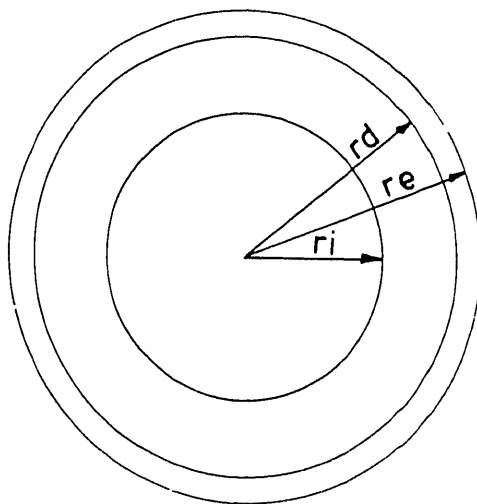


Fig. 19. — Pantalla de drenaje en un anillo circular.

Particularizando para $r = r_e$ y $r = r_d$:

$$p_e = \frac{\gamma v_e r_e}{K} \ln r_e + A; \quad p_d = \alpha p_e = \frac{\gamma v_e r_e}{K} \ln r_d + A.$$

De donde:

$$p_i = \frac{p_e}{\ln \frac{r_e}{r_d}} \left[\ln \frac{r}{r_d} - \alpha \ln \frac{r}{r_e} \right].$$

En la zona interior del anillo, será:

$$p_i = \alpha \frac{p_e}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \ln \frac{r}{r_i}.$$

Lo mismo que en el caso de anillo homogéneo, será:

$$\sigma_\varphi = \sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + r \frac{dp}{dr};$$

$$[E \varepsilon_r = E \frac{du}{dr} = \sigma_r - \mu \sigma_\varphi];$$

$$E \varepsilon_\varphi = E \frac{u}{r} = \sigma_\varphi - \mu \sigma_r.$$

Eliminando σ_{φ} y σ_r entre estas tres ecuaciones, queda:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right];$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\mu \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right];$$

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{u}{r} (1-\mu) - \frac{du}{dr} (1+\mu) - r \frac{d^2u}{dr^2} - \mu \frac{du}{dr} + \mu \frac{u}{r} \right] = \frac{E}{1-\mu^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r u - r^2 \frac{du}{dr} \right] = r \frac{dp}{dr}.$$

En la zona exterior del anillo, se tendrá:

$$\frac{E}{1-\mu^2} \frac{d}{dr} \left[r u - r^2 \frac{du}{dr} \right] = r^2 \frac{(1-\alpha) p_e}{\ln \frac{r_e}{r_d}} \frac{1}{r} = r \frac{(1-\alpha) p_e}{\ln \frac{r_e}{r_d}}.$$

Integrando:

$$\frac{E}{1-\mu^2} \left[r u - r^2 \frac{du}{dr} \right] = \frac{1}{2} r^2 \frac{(1-\alpha) p_e}{\ln \frac{r_e}{r_d}} + B_1 = - \frac{E}{1-\mu^2} r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{u}{r} \right).$$

De donde:

$$u_1 = C_1 r - r \frac{(1-\mu^2)(1-\alpha) p_e}{2 E \ln \frac{r_e}{r_d}} \ln r + \frac{(1-\mu^2) B_1}{2 r E}.$$

Y del mismo modo:

$$u_2 = C_2 r - r \frac{(1-\mu^2) \alpha p_e}{2 E \ln \frac{r_e}{r_i}} \ln r + \frac{(1-\mu^2) B_2}{2 r E}.$$

Las tensiones serán:

$$\sigma_{1r} = C_1 \frac{E}{1-\mu^2} (1+\mu) - \frac{(1-\alpha) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_d}} [1 + (1+\mu) \ln r] - \frac{B_1}{2} (1-\mu) \frac{1}{r^2};$$

$$\sigma_{2r} = C_2 \frac{E}{1-\mu^2} (1+\mu) - \frac{\alpha p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} [1 + (1+\mu) \ln r] - \frac{B_2}{2} (1-\mu) \frac{1}{r^2};$$

$$\sigma_{1\varphi} = C_1 \frac{E}{1-\mu^2} (1+\mu) - \frac{(1-\alpha) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_d}} [(1+\mu) \ln r + \mu] + \frac{B_1}{2} (1-\mu) \frac{1}{r^2};$$

$$\sigma_{2\varphi} = C_2 \frac{E}{1-\mu^2} (1+\mu) - \frac{\alpha p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} [(1+\mu) \ln r + \mu] + \frac{B_2}{2} (1-\mu) \frac{1}{r^2}.$$

Las condiciones en los límites, exigen:

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_{1r} = 0;$$

$$C_1 \frac{E}{1-\mu} - \frac{(1-\alpha) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_d}} [1 + (1+\mu) \ln r_e] - \frac{B_1 (1-\mu)}{2 r_e^2} = 0.$$

Para:

$$r = r_i; \quad \sigma_{2r} = 0;$$

$$C_2 \frac{E}{1-\mu} - \frac{\alpha p_e}{2 \ln \frac{r_d}{r_i}} [1 + (1+\mu) \ln r_i] - \frac{B_2 (1-\mu)}{2 r_i^2} = 0.$$

Para:

$$r = r_d; \quad \sigma_{1r} = \sigma_{2r} \quad y \quad u_1 = u_2;$$

$$(C_1 - C_2) \frac{E}{1-\mu} - \frac{1 + (1+\mu) \ln r_d}{2} p_e \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right] - \frac{1-\mu}{2 r_d^2} (B_1 - B_2) = 0;$$

$$(C_1 - C_2) r_d - \frac{r_d \ln r_d (1-\mu^2)}{2 E} p_e \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right] + \frac{1-\mu^2}{2 E r_d} (B_1 - B_2) = 0$$

De donde:

$$\begin{aligned} C_1 - C_2 &= \frac{p_e (1-\mu)}{2 E} \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right] \left[\frac{1+\mu}{2} + (1+\mu) \ln r_d \right] = \\ &= \frac{p_e (1-\mu^2)}{2 E} \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right] \left[\frac{1}{2} + \ln r_d \right]. \end{aligned}$$

$$B_1 - B_2 = - \frac{p_e r_d^2}{2} \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right].$$

Por otra parte, sustituyendo los valores de C_1 y C_2 tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{p_e (1-\alpha)}{2 \ln \frac{r_e}{r_d}} (1+\mu) (\ln r_d - \ln r_e) - \frac{\alpha p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_i}} (1+\mu) (\ln r_d - \ln r_i) + \\ + \frac{B_1 (1-\mu)}{2} \left(\frac{1}{r_d^2} - \frac{1}{r_e^2} \right) - \frac{B_2 (1-\mu)}{2} \left(\frac{1}{r_d^2} - \frac{1}{r_i^2} \right) = 0; \end{aligned}$$

$$p_e (1+\mu) - (1-\mu) B_1 \frac{r_e^2 - r_d^2}{r_e^2 r_d^2} - (1-\mu) \frac{r_d^2 - r_i^2}{r_d^2 r_i^2} B_2 = 0;$$

$$p_e (1+\mu) = (1-\mu) B_2 \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_e^2} \right) - (1-\mu) \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right] \frac{r_e^2 - r_d^2}{2 r_e^2} p_e;$$

$$B_2 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} p_e + \frac{r_e^2 - r_d^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{r_i^2 p_e}{2} \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right];$$

$$B_1 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{r_i^2 r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} p_e - \frac{r_d^2 - r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{r_e^2 p_e}{2} \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right];$$

$$C_2 \frac{E}{1-\mu} = \frac{1+\mu}{2} \frac{r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} p_e + (1-\mu) \frac{r_e^2 - r_d^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p_e}{4} \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right] + \frac{\alpha p_e}{2 \ln \frac{r_d}{r_i}} [1 + (1+\mu) \ln r_i];$$

$$C_1 \frac{E}{1-\mu} = \frac{1+\mu}{2} \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} p_e - (1-\mu) \frac{r_d^2 - r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \frac{p_e}{4} \left[\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right] + \frac{(1-\alpha) p_e}{2 \ln \frac{r_e}{r_d}} [1 + (1+\mu) \ln r_e].$$

Las tensiones, en definitiva, serán:

$$\sigma_{1r} = - \frac{p_e (1-\alpha)}{2 \ln \frac{r_e}{r_d}} (1+\mu) \ln \frac{r}{r_e} + \frac{1}{2} \frac{p_e}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1+\mu) r_i^2 - (1-\mu) \frac{r_d^2 - r_i^2}{2} \left(\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right) \right] \left[1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right];$$

$$\sigma_{2r} = - \frac{\alpha p_e}{2 \ln \frac{r_d}{r_i}} (1+\mu) \ln \frac{r}{r_i} + \frac{1}{2} \frac{p_e}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1+\mu) r_e^2 + (1-\mu) \frac{r_e^2 - r_d^2}{2} \left(\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right) \right] \left[1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right];$$

$$\sigma_{1\varphi} = - \frac{p_e (1-\alpha)}{2 \ln \frac{r_e}{r_d}} \left[(1+\mu) \ln \frac{r}{r_e} - (1-\mu) \right] + \frac{1}{2} \frac{p_e}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1+\mu) r_i^2 - (1-\mu) \frac{r_d^2 - r_i^2}{2} \left(\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right) \right] \left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right];$$

$$\sigma_{2\varphi} = - \frac{\alpha p_e}{2 \ln \frac{r_d}{r_i}} \left[(1+\mu) \ln \frac{r}{r_i} - (1-\mu) \right] + \frac{1}{2} \frac{p_e}{r_e^2 - r_i^2} \left[(1+\mu) r_e^2 + (1-\mu) \frac{r_e^2 - r_d^2}{2} \left(\frac{1-\alpha}{\ln \frac{r_e}{r_d}} - \frac{\alpha}{\ln \frac{r_d}{r_i}} \right) \right] \left[1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right].$$