

INFLUENCIA DE LAS PRESIONES INTERSTICIALES EN UN MEDIO POROSO, SOBRE SU ESTADO TENSIONAL. APLICACION A PRESAS DE GRAVEDAD Y PRESAS BOVEDA

Por ALEJANDRO DEL CAMPO AGUILERA
y JOSE PIQUER CHANZA
Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Con la presentación de los ejemplos de aplicación termina el importante trabajo que hemos venido publicando en nuestros números de septiembre y noviembre del pasado año y marzo del corriente.

(Conclusión)

Ejemplos de aplicación.

Para determinar la influencia del reparto de presiones, filtraciones y drenaje, en arcos sometidos a presión exterior, calculamos a continuación los valores de las tensiones para las relaciones del espesor al radio exterior:

$$\frac{e}{r_e} = \frac{1}{3}; \quad \frac{e}{r_e} = \frac{1}{5}; \quad \frac{e}{r_e} = \frac{1}{10}.$$

Tomamos el módulo de Poisson con valor $\mu = 0,2$ y la distancia del manto circular de drenaje al paramento exterior igual a $\frac{e}{5}$.

Caso:

$$\frac{e}{r_e} = \frac{1}{3}.$$

Con paramento impermeable:

$$\sigma_r = \frac{9 p_e}{5} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right);$$

$$\sigma_\varphi = \frac{9 p_e}{5} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right).$$

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = p_e;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{13}{5} p_e = 2,6 p_e;$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{9 p_e r_i}{100 E} [25 (1 - \mu) + 16 (1 + \mu)] = \frac{2,352}{E} p_e r_e;$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{18}{5} p_e = 3,6 p_e.$$

Por las fórmulas de arcos semidelgados:

$$\sigma_r = 2 p_e \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right);$$

$$\sigma_\varphi = p_e \left(5,5 - \frac{2 r}{r_i} \right).$$

Para:

$$\begin{aligned} r &= r_e; & \sigma_r &= p_e; \\ & & \sigma_\varphi &= 2,5 p_e; \\ r &= \frac{r_e + r_i}{2}; & u &= \frac{5}{6} \left(3 - \frac{\mu}{2} \right) \frac{p_e r_e}{E} = 2,417 \frac{p_e r_e}{E}; \\ r &= r_i; & \sigma_r &= 0; \\ & & \sigma_\varphi &= 3,5 p_e. \end{aligned}$$

Anillo preso:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_e (1 + \mu)}{2} \left[\frac{9}{5} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{\ln \frac{r_i}{r}}{\ln \frac{3}{2}} \right] = \left(1,08 - 1,08 \frac{r_i^2}{r^2} + 3,407 \log \frac{r_i}{r} \right) p_e; \\ \sigma_\varphi &= \frac{p_e}{2} \left[\frac{9}{5} (1 + \mu) \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1 + \mu}{\ln \frac{3}{2}} \ln \frac{r_i}{r} \right] = \left(2,066 + 1,080 \frac{r_i^2}{r^2} + 3,407 \log \frac{r_i}{r} \right) p_e. \end{aligned}$$

Para:

$$\begin{aligned} r &= r_e; & \sigma_r &= 0; & \sigma_\varphi &= \frac{p_e}{2} \left[\frac{8}{5} (1 + \mu) + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{3}{2}} \right] = 1,946 p_e \\ r &= \frac{r_e + r_i}{2}; & u &= \frac{5 p_e r_i}{8 E} \left[\frac{9}{5} (1 + \mu) \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \frac{16}{25} \right] + (1 - \mu^2) \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln \frac{5}{2}} + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{3}{2}} \right] \\ & & &= 3,020 \frac{p_e r_i}{E} = 2,013 \frac{p_e r_e}{E}; \\ r &= r_i; & \sigma_r &= 0; & \sigma_\varphi &= \frac{p_e}{2} \left[\frac{18}{5} (1 + \mu) + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{3}{2}} \right] = 3,146 p_e. \end{aligned}$$

Mediante las fórmulas de arcos semidelgados:

$$\begin{aligned} p &= 2 p_e \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right); \\ \sigma_r &= 0; \\ \sigma_\varphi &= p_e \left[\frac{6 + \mu}{2} - 2 (1 + \mu) \left(\frac{r}{r_i} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Para:

$$\begin{aligned} r &= r_e; & \sigma_r &= 0; & \sigma_\varphi &= \frac{4 - \mu}{2} p_e = 1,900 p_e; \\ r &= \frac{r_e + r_i}{2}; & u &= 2,083 \frac{p_e r_e}{E}; \\ r &= r_i; & \sigma_r &= 0; & \sigma_\varphi &= \frac{6 + \mu}{2} p_e = 3,100 p_e. \end{aligned}$$

Anillo con drenaje:

$$\alpha = 0; \quad r_d = \frac{4 r_e + r_i}{5};$$

$$\sigma_{1r} = \frac{p_e (1 + \mu) \ln \frac{r_e}{r}}{2 \ln \frac{15}{14}} + \frac{2 p_e}{5} \left[(1 + \mu) - (1 - \mu) \frac{0,48}{\ln \frac{15}{14}} \right] \left[1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right] =$$

$$\left[20,00 \log \frac{r_e}{r} - 1,74 \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right) \right] p_e;$$

$$\sigma_{2r} = \frac{9 p_e}{10} \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{29}{450 \ln \frac{15}{14}} \right] \left[1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right] = 1,752 \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) p_e;$$

$$\sigma_{1\varphi} = \frac{p_e}{2 \ln \frac{15}{14}} \left[(1 + \mu) \ln \frac{r_e}{r} + (1 - \mu) \right] + \frac{2 p_e}{5} \left[(1 + \mu) - (1 - \mu) \frac{0,48}{\ln \frac{15}{14}} \right] \left[1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right] =$$

$$= \left[4,047 + 20,00 \log \frac{r_e}{r} - 1,744 \frac{r_e^2}{r^2} \right] p_e.$$

$$\sigma_{2\varphi} = \frac{9 p_e}{10} \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{29}{450 \ln \frac{15}{14}} \right] \left[1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right] = 1,752 \left[1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right] p_e.$$

Con estas expresiones, podemos construir el siguiente cuadro, que nos permite dibujar los gráficos de la figura 20.

Caso:

$$\frac{e}{r_e} = \frac{1}{5}.$$

Con paramento impermeable:

$$\sigma_r = \frac{25 p_e}{9} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right);$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{25 p_e}{9} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right).$$

Para:

$$r = r_e;$$

$$\sigma_r = p_e$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{41}{9} p_e = 4,555 p_e;$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad \mu = \frac{25 p_e r_i}{648 E} [81 (1 - \mu) + 64 (1 + \mu)] = 4,370 \frac{p_e r_e}{E};$$

$$r = r_i;$$

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{50}{9} p_e = 5,555 p_e.$$

Por las fórmulas de arcos semidelgados:

$$\sigma_r = \left[1 - 5 \left(1 - \frac{r}{r_e} \right) \right] p_e;$$

$$\sigma_\varphi = \left[5 \left(2 - \frac{r}{r_e} \right) - 0,5 \right] p_e.$$

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = p_e;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{9}{2} p_e = 4,500 p_e;$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{9 p_e r_e}{10 E} \left[5 - \frac{\mu}{2} \right] = 4,410 \frac{p_e r_e}{E};$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = 5,500 p_e.$$

Anillo poroso:

$$\sigma_r = \frac{p_e (1 + \mu)}{2} \left[\frac{25}{9} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) - \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{5}{4}} \right] = \left(1,666 - 1,666 \frac{r_i^2}{r^2} - 6,191 \log \frac{r}{r_i} \right) p_e.$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{p_e}{2} \left[\frac{25}{9} (1 + \mu) \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{5}{4}} - \frac{1 + \mu}{\ln \frac{5}{4}} \ln \frac{r}{r_i} \right] = \\ &= p_e \left(3,459 + 1,666 \frac{r_i^2}{r^2} - 6,191 \log \frac{r}{r_i} \right). \end{aligned}$$

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p_e}{2} \left[\frac{41}{9} (1 + \mu) + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{5}{4}} - (1 + \mu) \right] = 3,926 p_e;$$

$$\begin{aligned} r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u &= \frac{9 p_e r_e}{20 E} \left[(1 + \mu) \frac{25}{9} \left[(1 - \mu) + \frac{64}{81} (1 + \mu) \right] - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \mu^2) \frac{\ln \frac{9}{8}}{\ln \frac{5}{4}} + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{5}{4}} \right] = 4,007 \frac{p_e r_e}{E}; \end{aligned}$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = \frac{p_e}{2} \left[\frac{50}{9} (1 + \mu) + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{5}{4}} \right] = 5,126 p_e.$$

Mediante las fórmulas de arcos semidelgados:

$$p = p_e \left[1 - 5 \left(1 - \frac{r}{r_i} \right) \right];$$

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = p_e \left[5 - (1 + \nu) \left(5 - \frac{r}{r_e} - 4 \right) + \frac{\nu}{2} \right].$$

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = 3,900 p_e.$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = 4,050 \frac{p_e r_e}{E};$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = p_e \left[5 + \frac{\nu}{2} \right] = 5,100 p_e.$$

Anillo con drenaje:

$$u = 0; \quad r_d = \frac{4r_e + r_i}{5};$$

$$\sigma_{1r} = \frac{p_e (1 + \nu) \ln \frac{r_e}{r}}{2 \ln \frac{25}{24}} + \frac{8 p_e}{9} \left[(1 + \nu) - (1 - \nu) \frac{176}{800 \ln \frac{25}{24}} \right] \left[1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right] =$$

$$= \left[33,803 \log \frac{r_e}{r} + 2,761 \left(\frac{r_e^2}{r^2} - 1 \right) \right] p_e;$$

$$\sigma_{2r} = \frac{25 p_e}{18} \left[(1 + \nu) + (1 - \nu) \frac{40}{1250 \ln \frac{25}{24}} \right] \left[1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right] = 2,736 \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) p_e.$$

$$\sigma_{1\varphi} = \frac{p_e}{2 \ln \frac{25}{24}} \left[(1 + \nu) \ln \frac{r_e}{r} + (1 - \nu) \right] + \frac{8}{9} \left[(1 + \nu) - (1 - \nu) \frac{176}{800 \ln \frac{25}{24}} \right] \left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right] p_e =$$

$$= \left(33,803 \ln \frac{r_e}{r} + 2,761 \frac{r_e^2}{r^2} + 7,026 \right) p_e;$$

$$\sigma_{2\varphi} = \frac{25 p_e}{18} \left[(1 + \nu) + (1 - \nu) \frac{40}{1250 \ln \frac{25}{24}} \right] \left[1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right] = 2,736 \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) p_e.$$

De igual forma obtenemos su representación en la figura 21.

Caso:

$$\frac{r_e}{r_i} = \frac{1}{10}.$$

Con paramento impermeable:

$$\sigma_r = \frac{100}{19} p_e \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right).$$

$$\sigma_z = \frac{100}{19} p_e \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right).$$

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = p_e;$$

$$\sigma_z = \frac{181}{19} p_e = 9,526 p_e;$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{5 p_e r_e}{E} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \left(\frac{18}{19} \right) \right] = 9,385 \frac{p_e r_e}{E}$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_z = \frac{200}{19} p_e = 10,526 p_e;$$

Por las fórmulas de arcos semidelgados:

$$\sigma_r = p_e \left[1 - 10 \left(1 - \frac{r}{r_e} \right) \right];$$

$$\sigma_z = p_e \left[10 \left(1 - \frac{r}{r_e} \right) + 9,5 \right].$$

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = p_e;$$

$$\sigma_z = 9,5 p_e;$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad u = \frac{19 p_e r_e}{20 E} \left[10 - \frac{\mu}{2} \right] = 9,405 \frac{p_e r_e}{E};$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0,$$

$$\sigma_z = 10,5 p_e.$$

Anillo poroso:

$$\sigma_r = \frac{(1 + \mu) p_e}{2} \left[\frac{100}{19} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{\ln \frac{r_i}{r}}{\ln \frac{10}{9}} \right] = \left[3,158 \left(\frac{r_i^2}{r^2} \right) - 13,100 \log \frac{r}{r_i} \right] p_e.$$

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \left[\frac{50 (1 + \mu)}{19} \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) + \frac{1 - \mu}{2 \ln \frac{10}{9}} - \frac{1 + \mu}{2} \frac{\ln \frac{r}{r_i}}{\ln \frac{10}{9}} \right] p_e = \\ &= \left[3,158 \left(1 + \frac{r_i^2}{r^2} \right) - 13,100 \log \frac{r}{r_i} + 3,793 \right] p_e. \end{aligned}$$

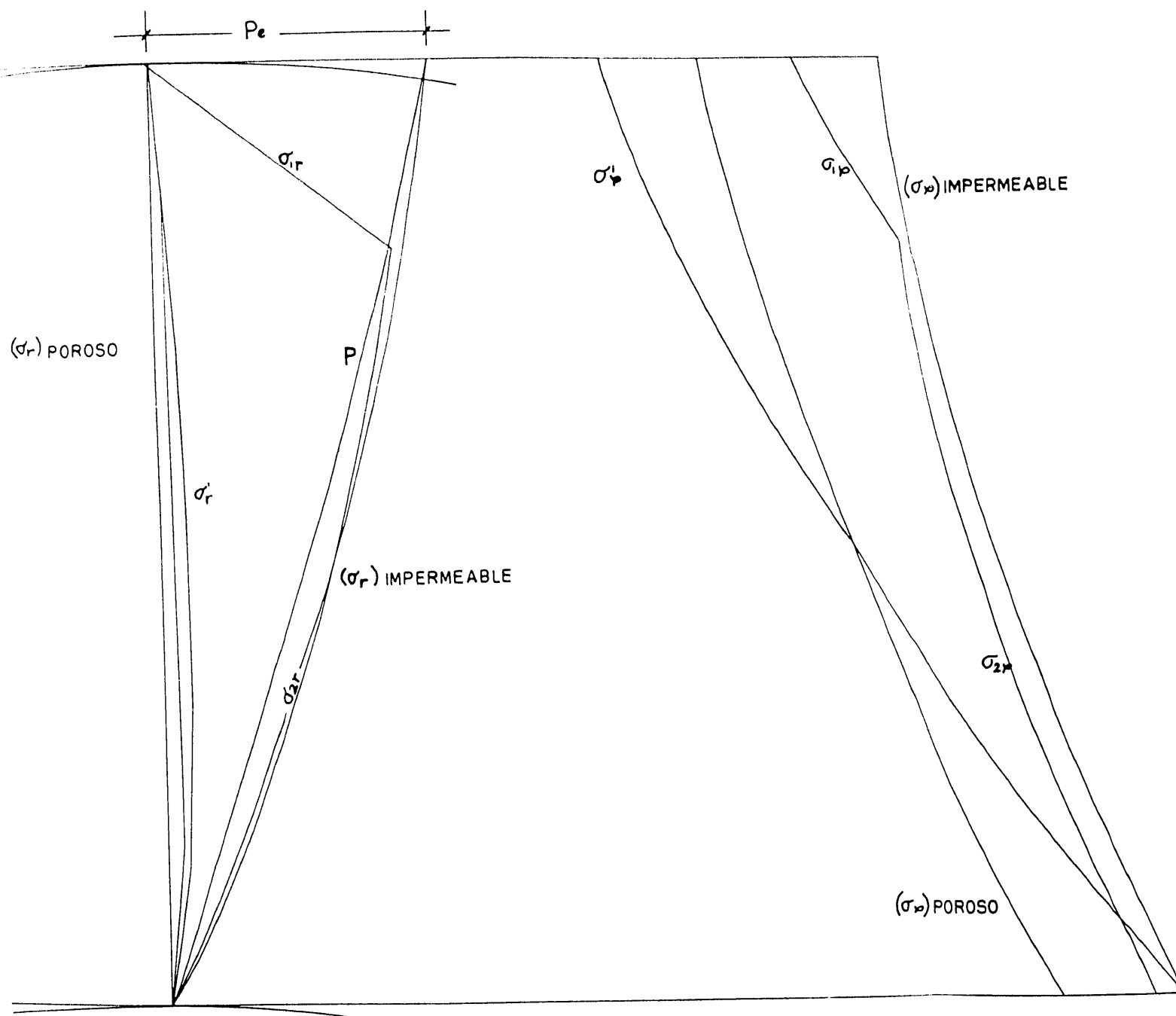


Fig. 20.—Tensiones producidas por la presión exterior en un anillo para $\frac{e}{r_e} = \frac{1}{3}$.

VALORES PARA EL CAL				
r	$\frac{r_i}{r}$	$\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$	$\log \frac{r}{r_i}$	$\frac{r_e}{r}$
r_e	2/3	0,445	0,176	1,000
	7/10	0,490	0,155	1,050
$\frac{4r_e + r_i}{5}$	5/7	0,510	0,146	1,071
$\frac{r_e + r_i}{2}$	8/10	0,640	0,097	1,200
	9/10	0,810	0,045	1,350
	9,5/10	0,902	0,022	1,425
r_i	1	1,000	0,000	1,500

$$\text{Anillo con } \frac{e}{r_e} = \frac{1}{3}$$

VALORES PARA EL CALCULO							ANILLO CON PARAMENTO IMPERMEABLE										ANILLO POROSO								ANILLO CON DRENAJE	
							ARCO GRUESO					ARCO SEMIDELGADO					ARCO GRUESO				ARCO SEMIDELGADO				$a=0; r_d = \frac{4r_e + r_i}{5}$	
r	$\frac{r_i}{r}$	$\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$	$\log \frac{r}{r_i}$	$\frac{r_e}{r}$	$\left(\frac{r_e}{r}\right)^2$	$\log \frac{r_e}{r}$	σ_r p_e	σ_φ p_e	$\sigma_r - p$ p_e	$\sigma_\varphi - p$ p_e	$\frac{1}{2}E$ $p_e r_e$	σ_r p_e	σ_φ p_e	$\sigma_r - p$ p_e	$\sigma_\varphi - p$ p_e	$\frac{1}{2}E$ $p_e r_e$	p p_e	σ_r p_e	σ_φ p_e	$\frac{1}{2}E$ $p_e r_e$	p p_e	σ_r p_e	σ_φ p_e	$\frac{1}{2}E$ $p_e r_e$	σ_r p_e	σ_φ p_e
r_e	2/3	0,445	0,176	1,000	1,000	0,000	1,000	2,60	0,000	1,60	2,40	1,00	2,50	0	1,50	2,30	1,00	0,000	1,94	1,94	1,00	0	1,90	1,90	0,00	2,30
	7/10	0,490	0,155	1,050	1,102	0,0212	0,918	2,68	0,038	1,76	2,38	0,86	2,64	0	1,78	2,35	0,88	0,023	2,07	1,98	0,86	0	2,07	1,97	0,60	2,55
$\frac{4r_e + r_i}{5}$	5/7	0,510	0,146	1,071	1,147	0,0288	0,882	2,72	0,051	1,89	2,37	0,80	2,70	0	1,90	2,37	0,83	0,030	2,12	1,97	0,80	0	2,14	1,99	0,85	2,64
$\frac{r_e + r_i}{2}$	8/10	0,640	0,097	1,200	1,440	0,0792	0,630	2,95	0,080	2,40	2,35	0,50	3,00	0	2,50	2,42	0,55	0,059	2,42	2,02	0,50	0	2,50	2,08	0,63	2,87
	9/10	0,810	0,045	1,350	1,822	0,130	0,342	3,26	0,087	3,00	2,36	0,22	3,28	0	3,06	2,40	0,26	0,052	2,79	2,06	0,22	0	2,84	2,10	0,33	3,17
	9,5/10	0,902	0,022	1,425	2,030	0,154	0,176	3,42	0,051	3,30	2,38	0,10	3,40	0	3,30	2,37	0,13	0,030	2,96	2,08	0,10	0	2,98	2,09	0,17	3,33
r_i	1	1,000	0,000	1,500	2,250	0,176	0,000	3,60	0,000	3,60	2,40	0,00	3,50	0	3,50	2,33	0,00	0,000	3,15	2,10	0,00	0	3,10	2,07	0,00	3,50

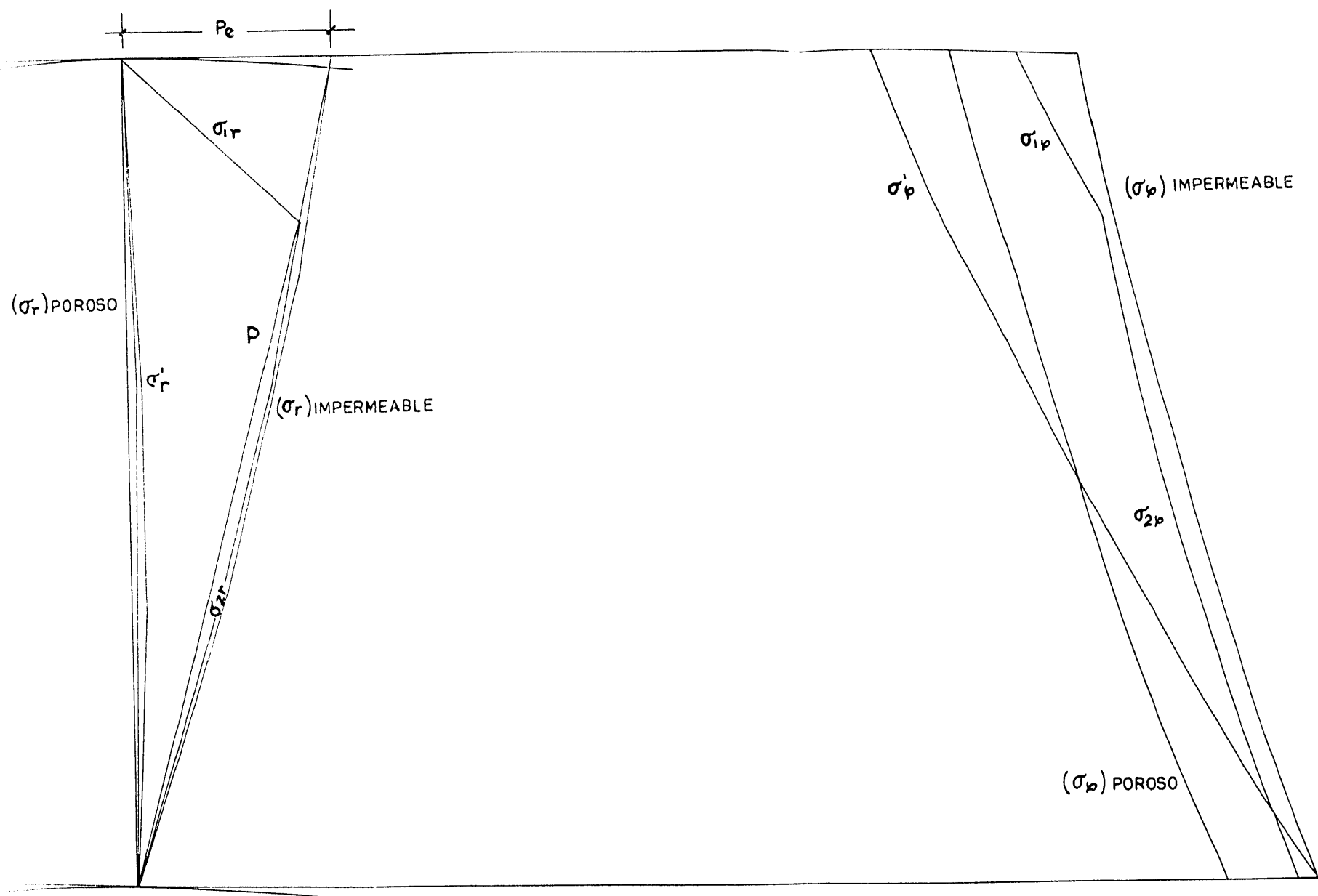


Fig. 21. - Tensiones producidas por una presión exterior P_e en un anillo con relación $\frac{e}{r_e} = \frac{1}{5}$.

Anillo con $\frac{c}{r_p} = \frac{1}{5}$

VALORES PARA EL CALCULO								ANILLO CON PARAMENTO IMPERMEABLE								ANILLO POROSO								ANILLO CON DRENAJE		
								ARCO GRUESO					ARCO SEMIDELGADO					ARCO GRUESO				ARCO SEMIDELGADO				$a = 0; \quad r_d$
r	$\frac{r_i}{r}$	$\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$	$\frac{r_e}{r}$	$\left(\frac{r_e}{r}\right)^2$	$\log \frac{r}{r_i}$	$\log \frac{r_e}{r}$	σ_r	σ_φ	$\frac{\sigma_r - p}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi - p}{p_e}$	$\frac{\mu E}{p_e r_e}$	σ_r	σ_φ	$\frac{\sigma_r - p}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi - p}{p_e}$	$\frac{\mu E}{p_e r_e}$	p	σ_r	σ_φ	$\frac{\mu E}{p_e r_e}$	p	σ_r	σ_φ	$\frac{\mu E}{p_e r_e}$	σ_r	σ_φ
							p_e	p_e	$= \frac{\sigma'_r}{p_e}$	$= \frac{\sigma'_\varphi}{p_e}$	$p_e r_e$	p_e	p_e	$= \frac{\sigma'_r}{p_e}$	$= \frac{\sigma'_\varphi}{p_e}$	$p_e r_e$	p_e	p_e	p_e	$p_e r_e$	p_e	p_e	p_e	$p_e r_e$	p_e	p_e
r_e	1.5	0.6400	1.0000	1.0000	0.0969	0.000	1.000	4.555	0.000	3.555	4.355	1.00	4.50	0	3.50	4.30	1.000	0.000	3.926	3.926	1.00	0	3.90	3.90	0.000	4.20
	8.2/10	0.6724	1.0250	1.0505	0.0862	0.0107	0.910	4.65	0.030	3.77	4.35	0.875	4.625	0	3.755	4.33	0.880	0.012	4.063	3.96	0.87	0	4.05	3.95	0.502	4.49
$\frac{4r_e + r_i}{5}$	5/6	0.6914	1.0110	1.0850	0.0792	0.0177	0.849	4.70	0.030	3.88	4.35	0.80	4.70	0	3.90	4.36	0.819	0.019	4.126	3.96	0.80	0	4.14	3.96	0.834	4.63
$\frac{r_e + r_i}{2}$	8/9	0.9701	1.1111	1.2345	0.0512	0.0458	0.582	4.98	0.053	4.45	4.37	0.50	5.00	0	4.50	4.41	0.529	0.033	4.158	4.01	0.50	0	4.50	4.05	0.574	4.88
	9.2/10	0.8464	1.1500	1.3225	0.0362	0.0607	0.426	5.13	0.052	4.76	4.38	0.35	5.15	0	4.80	4.42	0.374	0.032	4.645	4.03	0.35	0	4.68	4.06	0.420	5.05
	9.7/10	0.9409	1.2125	1.4701	0.0132	0.0832	0.164	5.40	0.028	5.26	4.43	0.125	5.375	0	5.255	4.42	0.136	0.015	4.946	4.08	0.12	0	4.95	4.08	0.162	5.30
r_i	1	1.0000	1.250	1.5625	0.000	0.0969	0.000	5.555	0.000	5.55	4.44	0.00	5.50	0	5.50	4.40	0.000	0.000	5.126	4.10	0.00	0	5.1	4.08	0.00	5.46

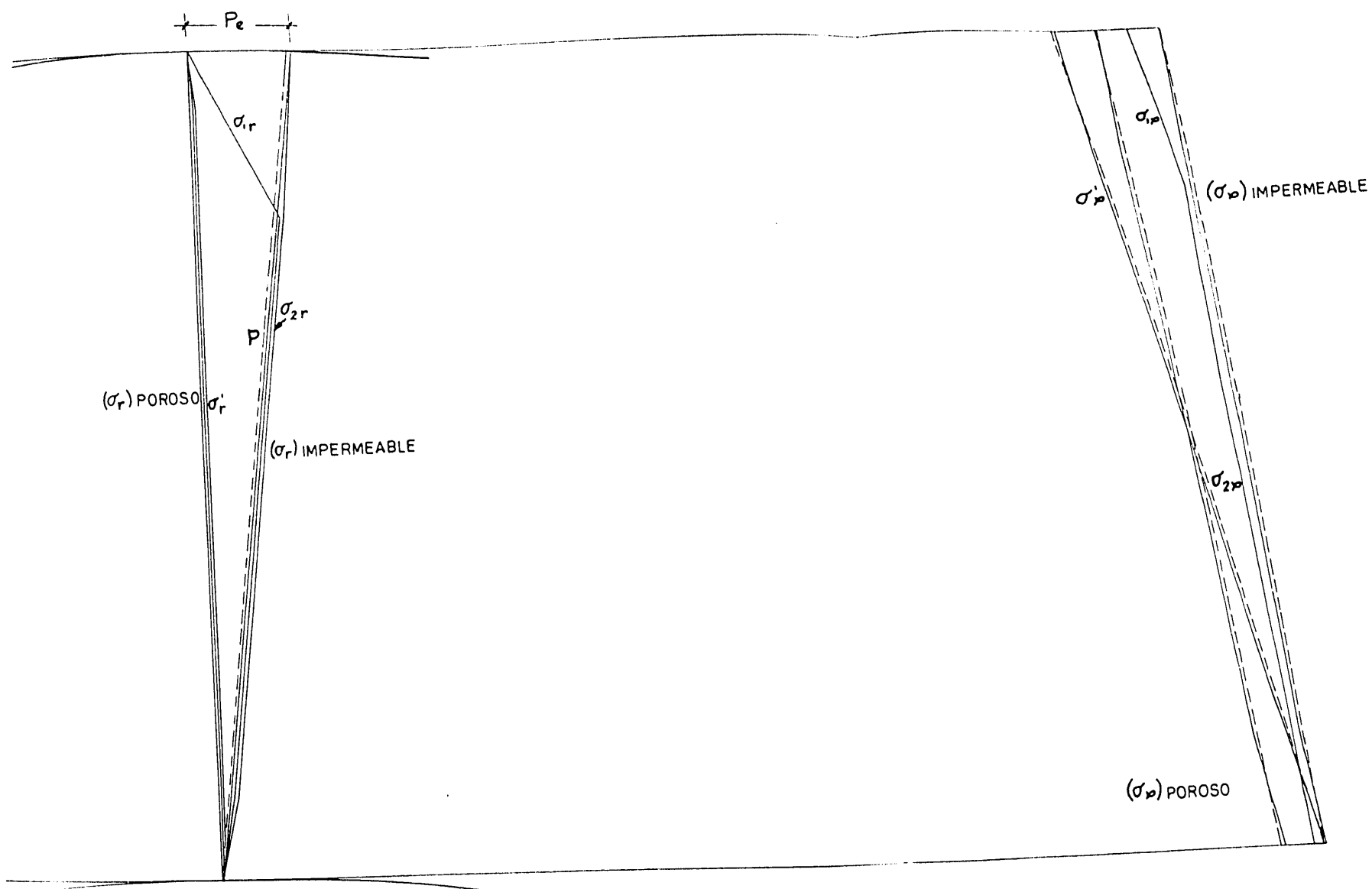


Fig. 22. Tensiones producidas por una presión p_e en un anillo con relación $\frac{e}{r_e} = \frac{1}{10}$. Se indican de trazos las tensiones obtenidas, suponiendo que las leyes de tensiones son lineales.

$$\text{Anillo con } \frac{e}{r_e} = \frac{1}{10}.$$

VALORES PARA EL CALCULO							ANILLO CON PARAMENTO IMPERMEABLE								ANILLO POROSO								ANILLO CON DRENAJE			
							ARCO GRUESO					ARCO SEMIDELGADO					ARCO GRUESO				ARCO SEMIDELGADO				$\alpha = 0; \quad r_d = \frac{4 r_e + r_i}{5}$	
r	$\frac{r_i}{r}$	$\left(\frac{r_i}{r}\right)^2$	$\frac{r_i}{r}$	$\left(\frac{r_e}{r}\right)^2$	$\log \frac{r}{r_i}$	$\log \frac{r_e}{r}$	$\frac{\sigma_r}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi}{p_e}$	$\frac{\sigma_r - p}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi - p}{p_e}$	$\frac{1/E}{p_e r_e}$	$\frac{\sigma_r}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi}{p_e}$	$\frac{\sigma_r - p}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi - p}{p_e}$	$\frac{1/E}{p_e r_e}$	$\frac{p}{p_e}$	$\frac{\sigma_r}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi}{p_e}$	$\frac{1/E}{p_e r_e}$	$\frac{p}{p_e}$	$\frac{\sigma_r}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi}{p_e}$	$\frac{1/E}{p_e r_e}$	$\frac{\sigma_r}{p_e}$	$\frac{\sigma_\varphi}{p_e}$
r_e	9/10	0,8100	1,000	1,000	0,0458	0,000	1,000	9,52	0,000	8,52	9,32	1,00	9,50	0	8,50	9,30	1,000	0,0000	8,91	8,90	1,00	0	8,90	8,90	0,000	9,24
	9,05/10	0,81002	1,0055	1,01114	0,0434	0,0024	0,953	9,56	0,007	8,61	9,34	0,95	9,56	0	8,61	9,33	0,946	0,0030	8,97	8,91	0,95	0	8,97	8,92	0,22	9,33
$\frac{4 r_e + r_i}{5}$	45/49	0,84338	1,0203	1,04108	0,0370	0,0086	0,825	9,70	0,018	8,89	9,35	0,81	9,70	0	8,89	9,35	0,807	0,0099	9,13	8,94	0,81	0	9,13	8,94	0,81	9,61
	9,3/10	0,8649	1,0333	1,06777	0,0315	0,0142	0,711	9,81	0,024	9,12	9,36	0,68	9,82	0	9,14	9,36	0,687	0,0140	9,27	8,96	0,68	0	9,28	8,95	0,70	9,73
$\frac{r_e + r_i}{2}$	18/19	0,89738	1,05262	1,10801	0,0235	0,0222	0,540	9,97	0,027	9,46	9,38	0,50	10,01	0	9,51	9,36	0,513	0,0162	9,48	8,99	0,51	0	9,49	8,95	0,54	9,89
	9,7/10	0,9409	1,0777	1,16160	0,0132	0,0324	0,311	10,20	0,023	9,91	9,42	0,29	10,21	0	9,92	9,45	0,288	0,0137	9,75	9,04	0,29	0	9,76	9,00	0,31	10,1
r_i	1	1,000	1,1111	1,23456	0,000	0,0457	0,000	10,52	0,000	10,52	9,47	0,00	10,50	0	10,50	9,47	0,000	0,0000	10,11	9,10	0,00	0	10,10	9,07	0,00	10,4

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = \left[\frac{81}{19} (1 + \mu) + \frac{1 - \mu}{2 \ln \frac{10}{9}} \right] p_e = 8,909 p_e;$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad \mu = \frac{19 p_e r_e}{40 E} \left[\frac{120}{19} \left[(1 - \mu) + (1 + \mu) \frac{324}{361} \right] - (1 - \mu^2) \frac{\ln \frac{19}{18}}{\ln \frac{10}{9}} + \frac{1 - \mu}{\ln \frac{10}{9}} \right] = 9,468 \frac{p_e r_e}{E};$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = \left[\frac{100 (1 + \mu)}{19} + \frac{1 - \mu}{2 \ln \frac{10}{9}} \right] p_e = 10,109 p_e.$$

Por las fórmulas de arcos semidelgados:

$$\sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = \left[10 + (1 + \mu) \left(9 - \frac{10 r}{r_e} \right) + \frac{\mu}{2} \right] p_e = \left(20,9 - \frac{12 r}{r_e} \right) p_e.$$

Para:

$$r = r_e; \quad \sigma_r = 0 \quad \sigma_\varphi = 8,900 p_e;$$

$$r = \frac{r_e + r_i}{2}; \quad \mu = \frac{19 p_e r_e}{20 E} \left[10 - \frac{\mu}{2} \right] = 9,405 p_e;$$

$$r = r_i; \quad \sigma_r = 0;$$

$$\sigma_\varphi = 10,100 p_e.$$

Anillo con drenaje:

$$\alpha = 0; \quad r_d = \frac{4 r_e + r_i}{5};$$

$$\sigma_{1r} = \frac{p_e (1 + \mu) \ln \frac{r_e}{r}}{2 \ln \frac{50}{49}} + \frac{81 p_e}{38} \left[(1 + \mu) - (1 - \mu) \frac{376}{4050 \ln \frac{50}{49}} \right] \left[1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right] =$$

$$= 68,18 \log \frac{r_e}{r} - 5,255 \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right);$$

$$\sigma_{2r} = \frac{50 p_e}{19} \left[(1 + \mu) + (1 - \mu) \frac{99}{5000 \ln \frac{50}{49}} \right] \left[1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right] = 5,215 \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) p_e;$$

$$\begin{aligned}\sigma_{1r} &= p_e (1 + \mu) \ln \frac{r_e}{r} + 1 - \mu + \frac{81}{38} \left[(1 + \mu) - (1 - \mu) - \frac{376}{4050 \ln \frac{50}{49}} \right] \left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right] p_e \\ &= \left[68,18 \log \frac{r_e}{r} - 5,255 \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) + 19,741 \right] p_e; \\ \sigma_{2r} &= \frac{50 p_e}{19} \left[(1 + \mu) - (1 - \mu) - \frac{99}{5000 \ln \frac{50}{49}} \right] \left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right] = 5,215 \left[1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right] p_e.\end{aligned}$$

Con estas expresiones, hemos calculado el siguiente cuadro que representa en la figura 22.

Resumen y conclusiones.

Hemos estudiado la influencia de las presiones intersticiales dentro de un cuerpo poroso, en los repartos de tensiones, estableciendo las ecuaciones generales de la elasticidad y aplicándolas a diversos casos particulares, habiéndose llegado a las siguientes conclusiones:

1.^a En un estado tridimensional de tensiones, solamente es admisible calcular las tensiones a partir de las cargas exteriores que transmitirían las presiones hidrostáticas si los paramentos fueran impermeables, deduciendo de ellas las presiones intersticiales, en caso de que todas las derivadas segundas de éstas respecto a las tres coordenadas en cualquier combinación, sean nulas.

2.^a En estados de tensión o deformación plana, sólo en caso de que la permeabilidad sea constante y la ley de presiones internas cumpla la condición de Laplace es admisible calcular las tensiones a partir de las cargas que producirían las presiones hidrostáticas sobre paramentos impermeables descontando de ellas las presiones intersticiales.

3.^a En el caso de una presa de gravedad con pantalla menos permeable en el paramento de aguas arriba, la discontinuidad de permeabilidades hará que no sea aplicable la superposición considerada en el caso anterior y en el caso particular de perfil triangular indefinido con pantalla impermeabilizante triangular, la ley de tensiones calculada difiere considerablemente de la que se obtendría sustrayendo la superposición de las tensiones calculadas, suponiendo el paramento impermeable y algo menor de las tensiones calculadas, suponiendo que las tensiones normales verticales se distribuyan linealmente.

4.^a La condición de Laplace para la ley de presiones, es equivalente, a la de que no existan manantiales o sumideros en el contorno considerado, por lo que la superposición del estado de tensiones producido por las presiones exteriores con las presiones intersticiales, no es admisible en caso de que existan drenes interiores o se trate de espacios múltiplemente conexos, como en el caso de anillos y presas en arco.

5.^a En una presa de gravedad de perfil triangular indefinido, el efecto de una pantalla de drenaje de eficacia creciente con la altura, pasando por el vértice, es desde el punto de vista elástico, similar al caso de pantalla impermeable.

6.^a Las secciones horizontales de bloques de presas de gravedad o de cabezas de contrafuertes sin drenaje, las tensiones en todos los sentidos obtenidas por aplica-

ción de las cargas exteriores, se incrementarán en tracciones equivalentes a las presiones intersticiales.

7.^a El efecto de la porosidad del hormigón en anillos o arcos cerrados o que sus extremos pudieran deslizar radialmente, es que se anulan prácticamente las tensiones radiales y que las circunferenciales se reducen en una proporción equivalente a que se aplicase sobre un radio medio, incrementándose la diferencia entre las tensiones equivalentes entre los paramentos en una magnitud equivalente al producto de la presión por el módulo de Poisson.

8.^a Las flexiones en un arco empotrado se producen al tratar de impedirse los desplazamientos radiales, como éstos también son menores en anillos o arcos porosos, se puede afirmar que el efecto de la filtración sobre los arcos, es reducir tensiones circunferenciales en la proporción del radio medio al exterior, siempre que el módulo de Poisson del material sea reducido.

9.^a De la observación de los datos numéricos y gráficos de los ejemplos anteriores y de las fórmulas obtenidas para arcos relativamente delgados, puede deducirse: que por efecto de la porosidad de anillos o arcos de hormigón, prácticamente se anulan las tensiones radiales y las circunferenciales se reducen en todo el espesor del arco, casi uniformemente, con efecto análogo al que se produciría si las presiones actuasen en un plano medio. También se reducen los desplazamientos, si se trata de un medio poroso, lo que tendrá como consecuencia una reducción proporcional de las tensiones producidas por la flexión como consecuencia de estar los arcos empotrados y no libres para desplazarse radialmente. En caso de reducirse las presiones en la zona media del arco mediante pantallas impermeables o de drenaje, el estado de tensiones que se obtiene será intermedio entre las correspondientes a paramento impermeable y poroso. Por tener, como hemos visto, poca influencia las presiones intersticiales en el aumento de tracciones en el paramento de agua arriba de los arcos, el drenaje tiene un interés secundario en las presas bóvedas por lo que se refiere a sus secciones horizontales, pero puede ser necesario para limitar las tracciones verticales en el paramento de aguas arriba.

NOTACION

x, y	Coordenadas cartesianas.
r, φ	Coordenadas polares.
u, v	Desplazamientos.
ϵ_x, ϵ_y	Deformaciones.
σ, τ	Tensiones normales y tangenciales.
ϕ	Angulo en el vértice del perfil triangular.
m, n	Pendientes del paramento de aguas abajo y de la línea de separación de las dos zonas del perfil.
γ	Peso específico del fluido.
m_x, m_y, m_z	Fuerzas máscas.
V_x, V_y	Velocidades.
V	Fuerzas verticales de subpresión.
ρ	Caudal sumido por unidad de volumen.
p	Presiones.
q	Caudales.
α	Relación de presiones.
β	Relación de caudales.
λ	Relación de permeabilidades.
E	Módulo de Young o de elasticidad a compresión.

G	Coficiente de elasticidad al esfuerzo cortante.
μ	Módulo de Poisson.
K	Coficiente de permeabilidad.
∇^2	Operador laplaciano.
ψ	Función potencial.

BIBLIOGRAFIA

- HOFFMAN: *Permeazioni d'acqua e loro effetti nei muri di ritenute*, 1928.
- LUDIN Y TOLKE: *Wasserkraftanlagen*, 1938.
- TERZAGHI: *Engineering News Record*, 18 de junio de 1936.
- LELIAVSKY: "Transaction of A. S. C. E., de 1947". *Uplift in gravity Dams*, 1954. Washington, octubre 1959 a febrero 1960.
- HARZA: "Proceedings of A. S. C. E.", diciembre de 1947. *III Congreso de Grandes Presas de Estocolmo*, 1948.
- MC. HENRY: *III Congreso de Grandes Presas en Estocolmo*, 1948.
- LACINHA SERAFIM: *A Subpressao nas Barragens*, 1954.
- GÓMEZ NAVARRO Y JUAN-ARACIL: *Salto de aguas y Presas de Embalse*, 1953.
- ZIENKIEWICZ: "The effect of pore pressures on stresses in gravity dams", *Proceedings of A. S. C. E.*, agosto 1958.